国外工业控制与智能制造丛书





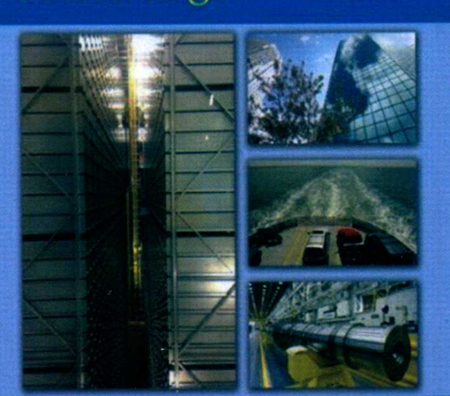
数字控制系统分析与设计

（原书第4版）

查尔斯 L. 菲利普斯（Charles L. Phillips）
[美] H. 特洛伊·内格尔（H. Troy Nagle） 著
阿兰尼亚·查克拉博蒂（Aranya Chakrabortty）
王萍 等译

Digital Control System Analysis & Design

Fourth Edition



机械工业出版社
China Machine Press

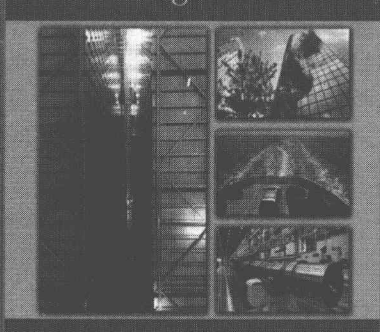
国外工业控制与智能

数字控制系统分析与设计

（原书第4版）

查尔斯 L. 菲利普斯（Charles L. Phillips）
[美] H. 特洛伊·内格尔（H. Troy Nagle） 著
阿兰尼亚·查克拉博蒂（Aranya Chakrabortty）
王萍 等译

Digital Control System
Analysis & Design
Fourth Edition



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数字控制系统分析与设计（原书第4版）/（美）查尔斯L. 菲利普斯等著；王萍等译．—北京：机械工业出版社，2017.6
（国外工业控制与智能制造丛书）
书名原文：Digital Control System Analysis & Design, Fourth Edition

ISBN 978-7-111-57356-2

I. 数…　II. ①查…　②王…　III. 数字控制系统–高等学校–教材　IV. TP273

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第155934号

本书版权登记号：图字：01-2014-2707

本书就数字控制系统的分析和设计问题进行全面系统的介绍。它从5个实际的控制问题切入（第1章），在对z变换等必要的数学问题做出适当铺垫（第2章）和对采样/数据保持等特殊问题进行适当讲解（第3章）之后，第4~8章讲解数字控制系统的分析问题，第9~11章讲解数字控制系统的设计问题，最后（第12章）给出了5个案例的设计例程。

本书兼顾数字控制系统和模拟控制系统的关系，注重从经典方法到现代方法的自然过渡，强调计算机辅助分析及计算机辅助设计技术的讲解，示例丰富且具有连贯性，习题配置充分。

本书适合作为本科高年级或研究生一年级的数字控制系统教材，也可作为控制工程师的自学读本。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码：100037）

责任编辑：张梦玲	责任校对：殷　虹
印　　刷：中国电影出版社印刷厂	版　　次：2017年7月第1版第1次印刷
开　　本：185mm×260mm　1/16	印　　张：22.25
书　　号：ISBN 978-7-111-57356-2	定　　价：79.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

出版者的话

文艺复兴以来，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出Alan V. Oppenheim Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Peter Wilson 、H. Vincent Poor、Hassan K. Khalil、Gene F. Franklin、Rex Miller等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气技术丛书”和“国外工业控制与智能制造丛书”为系列出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www.hzbook.com
电子邮件：hzjsj@hzbook.com
联系电话：(010)88379604
联系地址：北京市西城区百万庄南街1号
邮政编码：100037



华章科技图书出版中心

译 者 序

数字控制系统是现代控制系统的主要类型，它以数字计算机为核心组建，也称为计算机控制系统。

从控制系统的组建方式上看，数字控制系统通过“采样”和 A/D(模/数)转换、D/A(数/模)转换，将模拟控制系统中由硬件控制器完成的连续模拟运算转换为由计算机执行的离散数值运算；从理论意义上讲，控制系统问题是系统模型的求解问题，数值方法适用于离散系统模型求解，由于只求数值解，所以摆脱了解析方法的局限，同时可以实现快速求解，这使数字控制系统的应用领域更宽广；从工程角度看，控制系统是一种以控制器为核心组织起来的物理系统，在数字控制系统中，控制器的使命由数字计算机担当，它通过数值计算实现的系统控制的策略(算法)更丰富，例如数字滤波、数字PID，以及模糊和智能控制算法等。

计算机强大的运算能力和编程的灵活性为数字控制系统的设计、组织和实现提供了极大的灵活性，并为更高级的控制策略的实施和更复杂的特性补偿提供了可能，从而大大强化了控制器的功能，并使复杂控制系统的品质得以改善；计算机的联网通信功能为大系统的控制问题提供了多种现实的解决途径，使得大工业生产自动化的实现成为可能。现代工业控制工程中广泛应用分层、分布式、集生产管理与过程控制为一体的 DCS (Distributed Control System)系统，即所谓的分散(集散)控制系统就是基于数字控制系统构建的。

奥本大学电气工程系 Charles L. Phillips 教授等撰写的这本著作对数字控制系统的分析和设计问题进行了全面介绍，并在以下方面具有鲜明特色：

1) 起止于实际案例的编写方式，使读者一开始就具有很强的代入感。教材在对必要的数学知识和特殊的“采样/数据保持”内涵讲解之后，分别介绍了数字控制系统分析和设计的基本概念、常用方法和贯穿始终的应用示例；章后习题与章内讲解配合紧密、章间内容前后呼应。当你带着解决实际问题的渴望开始本书的学习后，会发现，结束本书学习之时，你已有能力对类似于飞机自动着陆、新生儿的自动供氧等数字控制系统进行分析和设计。

2) 经典方法和现代方法相融合。将经典控制与现代控制组织成两门课程是形成目前比较常见的教材编写体系的客观背景。与此不同，本教材从一开始(第 1 章除外)，就针对数字控制系统的具体分析和设计问题将这两种方法相融合，每一次从经典方法到现代方法的过渡自然、衔接顺畅，令人耳目一新。这一编写方法可为从事控制类课程的教师提供新的教学改革思路。

3) 计算机辅助分析与计算机辅助设计贯穿始终。为了方便读者对教材中基本概念和基本方法的掌握，删繁就简是许多控制类教材的通常做法。这会使学习者依然解决不了实际的复杂自动控制系统的分析问题，承担不起实际的控制系统的设计使命。本教材各章均强调使用 MATLAB 软件对相关问题的实现进行计算机辅助分析和设计，同时给出各段程序及程序运行结果，如此，在准确掌握数字控制系统分析和设计的基本概念、基本方法和要领的基础上，进一步领会计算机辅助方法，有助于学习者增强解决实际复杂问题的信心和能力。

参加本书翻译工作的有王萍、王娟、窦冰杰、王迪和石君志，其中，王娟博士完成对第 3～6 章的初译，窦冰杰完成对第 9～11 章的初译，王迪博士翻译了附录Ⅲ和附录Ⅳ，其余章节及附录由王萍翻译，同时也由她完成全书的统稿和审校。

由于译者水平所限，译文中难免有疏漏和不妥之处，恳请读者不吝赐教。

王　萍

2017 年 4 月于天津大学

前　言

本书适合作为高年级本科生或一年级研究生离散时间控制系统方面的教材，也可作为执业控制工程师的自学读本。

本书基于奥本大学、北卡罗来纳州立大学的离散时间系统课程以及美国和欧洲的短期集中课程中的教学内容。受那些参加短期集中课程的执业工程师的影响，本书的内容和定位更侧重数字控制系统设计及实现的实际问题。

第 1 章对全书内容梗概进行了简要介绍。第 2～11 章讲述线性离散时间系统的分析和设计问题，这时，知晓一些连续时间系统的知识将非常有助于理解相关的内容，所涉及的数学知识是 z 变换和向量矩阵差分方程，这些内容在第 2 章讲述；第 3 章的议题非常重要，讲的是采样信号、采样器及数据保持器的数学模型，该模型是本书后续内容的基础，其中特别强调了其内涵及应用局限。

接下来，第 4～7 章讲解如何将第 2 章的数学方法应用到离散时间系统(特别是数字控制系统)的分析中。第 8 章介绍经典的设计方法——基于频率响应的伯德图法，现代设计方法安排在第 9～11 章。第 12 章就离散时间控制系统的设计问题给出了几个实际案例研究。本书各章均强调使用 MATLAB 软件对相关问题的实现进行计算机辅助分析和设计。

与前几版相比，第 4 版的变动内容如下：

- 在全书各章追加了基于 MATLAB 的应用举例；
- 新增一章(第 11 章)讲述系统辨识问题；
- 对大部分章节内容增补了习题；
- 对章后习题进行了重新编号，以便于将习题与正文内容对应起来；
- 第 8 章增加了基于 MATLAB pidtool 工具包的设计方法；
- 第 12 章添加了两个案例研究；
- 删掉了关于数字滤波器实现方法的内容(上一版的第 11～14 章及附录Ⅴ和附录Ⅵ)，以节省篇幅，并使读者将更多的精力放到控制系统设计上。

章后习题与章内基本内容相辅相成。章内的多数例题配置了小段 MATLAB 程序，并给出了计算机执行那段程序的结果，对这些程序稍做修改，就可用于对章后习题的求解。

为了帮助教师用好本书，我们制作了一套 PPT 及含有章后习题答案的手册。作者认为，章后习题是本书不可或缺的部分，所有使用本书的人应该充分利用它们。索取章后习题答案及 PPT 材料的请求可直接发给本教材外方出版商(service. cn@pearson. com)。

在奥本大学，基于本书第 2～11 章讲述的控制内容开设有三门课程。其中，第 2～8 章用于开设一门研究生课程，占 4 学分系列课程中的 1 个学分，而北卡罗来纳州立大学则将其用于一门 3 学时的课程；还可以将 2～8 章用于 20 学时的本科生课程，不过这时应删减掉许多内容，如状态变量、改进的 z 变换、非同步采样、闭环同步采样等；第 3 种课程所获学分为 3 学分系列课程中的 1/3 学分，这时应先修前述的一种课程，课程中，先介绍第 2 章状态变量的内容和第 4 章的状态变量模型，然后详细讲授第 9～11 章的现代设计方法。本教材已经在北卡罗来纳州立大学使用，他们用书中第 2～11 章的内容在近期组织了一门一学季 3 学分的课程，同时完成了与之配套的 PPT。

最后，衷心感谢我们的许多同事、研究生、本科生，以及奥本大学电气工程系的工作

人员，他们促成了本书前三版的出版。特别感谢奥本大学电气工程系系主任 J. 戴维·欧文教授这些年来的帮助和鼓励。还要感谢在北卡罗来纳州立大学电气和计算机工程系的同事和学生们对第 4 版教材的支持和所做的贡献。

奥本大学　查尔斯 L. 菲利普斯
北卡罗来纳州立大学　H. 特洛伊·内格尔
北卡罗来纳州立大学　阿兰尼亚·查克拉博蒂

目　录

出版者的话
译者序
前言

第1章　引言 …… 1
1.1　概述 …… 1
1.2　数字控制系统 …… 2
1.3　控制问题 …… 3
1.4　卫星模型 …… 4
1.5　伺服电动机系统模型 …… 5
1.6　温度控制系统 …… 8
1.7　单机无穷大电力系统 …… 9
1.8　小结 …… 11
参考文献 …… 11
习题 …… 11
第2章　离散时间系统及 z 变换 …… 16
2.1　引言 …… 16
2.2　离散时间系统 …… 16
2.3　变换法 …… 17
2.4　z 变换的性质 …… 19
2.5　求 z 变换 …… 23
2.6　求解差分方程 …… 24
2.7　z 反变换 …… 26
2.8　仿真图和信号流图 …… 31
2.9　状态变量 …… 33
2.10　其他状态变量公式 …… 39
2.11　传递函数 …… 45
2.12　求解状态方程 …… 47
2.13　线性时变系统 …… 51
2.14　小结 …… 51
参考文献 …… 52
习题 …… 52
第3章　采样与重构 …… 59
3.1　引言 …… 59
3.2　采样控制系统 …… 59
3.3　理想采样器 …… 61
3.4　对 $E^*(s)$ 的估计 …… 62
3.5　傅里叶变换结果 …… 64
3.6　$E^*(s)$ 的性质 …… 65
3.7　数据重构 …… 67
3.8　小结 …… 72
参考文献 …… 72
习题 …… 73
第4章　开环离散时间系统 …… 76
4.1　引言 …… 76
4.2　$E(z)$ 与 $E^*(s)$ 的联系 …… 76
4.3　脉冲传递函数 …… 77
4.4　含数字滤波器的开环系统 …… 80
4.5　改进的 z 变换 …… 82
4.6　时间延迟系统 …… 84
4.7　异步采样 …… 86
4.8　状态变量模型 …… 88
4.9　连续时间状态变量回顾 …… 89
4.10　离散时间系统的状态方程 …… 91
4.11　程序计算 …… 94
4.12　小结 …… 95
参考文献 …… 95
习题 …… 95
第5章　闭环系统 …… 103
5.1　引言 …… 103
5.2　初步概念 …… 103
5.3　推导 …… 105
5.4　状态变量模型 …… 109
5.5　小结 …… 115
参考文献 …… 115
习题 …… 115
第6章　系统的时间响应特性 …… 122
6.1　引言 …… 122
6.2　系统的时间响应 …… 122
6.3　系统特征方程 …… 127
6.4　s 域到 z 域的映射 …… 128
6.5　稳态精度 …… 132
6.6　仿真 …… 134
6.7　控制软件 …… 137
6.8　小结 …… 137
参考文献 …… 137

习题 …………………………………… 137
第 7 章 稳定性分析 ……………………… 143
7.1 引言 ………………………………… 143
7.2 稳定性 ……………………………… 143
7.3 双线性变换 ………………………… 146
7.4 劳斯-赫尔维茨准则 ……………… 147
7.5 朱里稳定性测试 ………………… 149
7.6 根轨迹 ……………………………… 151
7.7 奈奎斯特准则 …………………… 154
7.8 伯德图 ……………………………… 159
7.9 解释频率响应 …………………… 161
7.10 闭环系统的频率响应 ………… 161
7.11 小结 ……………………………… 168
参考文献 ……………………………… 168
习题 …………………………………… 168
第 8 章 数字控制器设计 ……………… 175
8.1 引言 ………………………………… 175
8.2 控制系统特性 …………………… 175
8.3 补偿 ………………………………… 179
8.4 相位滞后补偿 …………………… 180
8.5 相位超前补偿 …………………… 184
8.6 相位超前设计方法 ……………… 186
8.7 滞后-超前补偿 …………………… 191
8.8 积分滤波器和微分滤波器 …… 193
8.9 PID 控制器 ……………………… 194
8.10 PID 控制器设计 ……………… 197
8.11 基于根轨迹的设计 …………… 202
8.12 小结 ……………………………… 212
参考文献 ……………………………… 212
习题 …………………………………… 212
第 9 章 极点配置与状态估计 ………… 219
9.1 引言 ………………………………… 219
9.2 极点配置 ………………………… 219
9.3 状态估计 ………………………… 224
9.4 降维观测器 ……………………… 232
9.5 实时观测器 ……………………… 236
9.6 能控性与能观性 ………………… 239
9.7 具有输入的系统 ………………… 242
9.8 小结 ………………………………… 245
参考文献 ……………………………… 245
习题 …………………………………… 246
第 10 章 离散时间系统的系统辨识 …………………………………… 250
10.1 引言 ……………………………… 250
10.2 静态系统的辨识 ……………… 250
10.3 动态系统的辨识 ……………… 252
10.4 黑箱辨识 ………………………… 253
10.5 最小二乘系统辨识 …………… 257
10.6 部分零极点已知下的传递函数估计 …………………………………… 261
10.7 递归的最小二乘系统辨识法 …………………………………… 262
10.8 辨识过程中的现实因素 ……… 265
10.9 小结 ……………………………… 266
参考文献 ……………………………… 266
习题 …………………………………… 267
第 11 章 线性二次最优控制 ………… 270
11.1 引言 ……………………………… 270
11.2 二次代价函数 ………………… 271
11.3 最优准则 ………………………… 272
11.4 线性二次最优控制设计 ……… 274
11.5 最小值原理 ……………………… 279
11.6 最优稳态控制 ………………… 280
11.7 最优状态估计——卡尔曼滤波 …………………………………… 284
11.8 最小二乘函数的最小化 ……… 288
11.9 小结 ……………………………… 289
参考文献 ……………………………… 289
习题 …………………………………… 290
第 12 章 案例研究 …………………… 295
12.1 引言 ……………………………… 295
12.2 伺服电动机系统 ……………… 295
12.3 人工气候室控制系统 ………… 300
12.4 飞机着陆系统 ………………… 303
12.5 新生儿供氧系统 ……………… 308
12.6 电力系统模型拓扑辨识 ……… 316
参考文献 ……………………………… 320
附录Ⅰ 设计方程 ……………………… 321
附录Ⅱ 梅森增益公式 ………………… 322
附录Ⅲ 对 $E^*(s)$ 的估计 …………… 325
附录Ⅳ 矩阵 …………………………… 328
附录Ⅴ 拉普拉斯变换 ………………… 333
附录Ⅵ z 变换表 ……………………… 343

第1章 引 言

1.1 概述

本书讲述一类闭环系统的分析和设计，这种闭环系统是物理的、内嵌数字计算机的系统。数字计算机会改变闭环系统的动态性能，例如，获得满意度更高的系统响应。

在闭环系统中，其动力函数(输入)至少部分地取决于系统响应(输出)，即输入是输出的函数。图 1-1 给出了一个简单的闭环系统示意。这是一个物理系统，其受控的物理过程称为“控制对象(被控对象)”，执行器含于其中，它通常需要一种称为控制器的装置来驱动，传感器将经驱动后的被控对象的响应检测出来，与期望响应进行对比，对比后所获得的信号差促使被控对象动作，以使信号差降低直至趋于零，这时，将导致实际响应逼近期望响应。一般来讲，如果被控对象的输入仅简单地取期望响应与实际响应的差，则会使闭环系统的响应不尽如人意。为此，必须再引入称为补偿器(控制器，或简单地称为滤波器)的物理环节对这个信号差进行处理。因此，控制系统设计就是进行补偿器的设计。

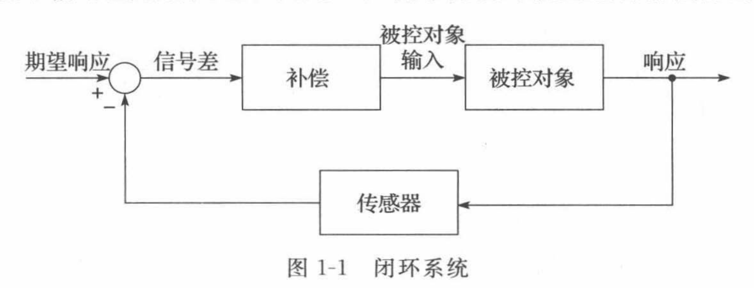


图 1-1 闭环系统

举一个用于飞行员降落飞机的闭环系统的例子。对该例而言，图 1-1 中的被控对象就是飞机，飞机的输入是飞行员控制飞机行为和飞行速度的操作。飞行员是传感器，提供对飞机位置、速度、仪表指示等的视觉感受和对飞机平衡、飞机运动等的感觉。期望响应是飞行员关于所期望飞行路径的想法，补偿是校正飞行员察觉到的飞行路径的偏差。可见，该例的补偿、传感及所生成的期望响应是飞行员所执行的各项工作。显然，这里的补偿一定是飞机的动态函数，即使飞行员能够实施控制操作，仅接受过驾驶战斗机训练的飞行员还是不能胜任降落大型客机的工作。

接下来，讨论图 1-1 示出的典型系统，系统中传感器是一台适宜的测量仪器，补偿工作交给一台数字计算机来完成，被控对象具有动态行为，我们为计算机编程，使其动态行为与被控对象的动态行为具有相同的性质。进一步讲，尽管通常无法决定被控对象的动态行为，但能选择计算机的动态行为，以使闭环系统的动态行为在某种意义上满足要求。例如，如果我们设计飞机自动降落系统，那么首要的是安全着陆，且其降落过程必须能够被飞行员和所有乘客所接受，因此，不能对飞机过度加压。

本书对经典控制和现代控制的分析和设计方法展开讨论，几乎所有的控制系统分析与设计方法均适用于线性时不变离散时间系统模型。线性系统可用叠加原理。设系统对输入 $x_1(t)$产生的响应(输出)为 $y_1(t)$，对输入 $x_2(t)$产生的响应(输出)为 $y_2(t)$，那么，如果该系统是线性的，则根据叠加原理，系统对输入$[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]$产生的响应(输出)便为$[a_1y_1(t)+a_2y_2(t)]$，其中，a_1、a_2 为常数。所有的物理系统本质上是非线性的。然而，

如果系统中的信号仅在一个小范围内变化，就可以使用线性方法分析这一系统的响应。尽管现有的分析和设计方法仅适于线性系统，我们还是会讨论到一些系统的非线性效应问题。

如果系统参数不随时间变化而变化，则称该系统为时不变系统。空间飞行器的助推器是一个时变系统的例子，其燃料以一个已知的速率不断地消耗掉，其间，飞行器质量将随时间的推移而下降。

离散时间系统中的信号仅为离散时间瞬间的取值，而所有信号取值随时间变化而连续变化的系统则称为连续时间系统，或称为模拟系统。

本书谈及的系统补偿器(控制器)是一种数字滤波器，它履行传递函数的职责。第 2 章到第 9 章，以及第 11 章介绍数字控制器的传递函数的设计，一旦获知了传递函数，便要实现基于数字计算机的算法编程。第 10 章介绍系统辨识方法，以实现对被控对象的动态行为建模。第 12 章给出一些数字控制系统的设计案例。

下面举一个数字控制系统的例子，然后给出闭环系统中三类典型被控对象的描述式。

1.2 数字控制系统

我们以飞机自动着陆系统为例，引出数字控制系统的基本结构。这个系统的设计很像美国海军当今航母上使用的飞机自动着陆系统[2]，不过，这里仅涉及对该系统的简单描述。

图 1-2 所展现的就是这一飞机自动着陆系统，它由三个基本部分组成，即飞机、雷达装置和控制单元。其中，雷达装置用来测量飞机的纵向及横向的近似位置，并将测量结果发射给控制单元，控制单元根据输入的测量值计算出适当的间距，将飞行命令发射给飞机自动驾驶仪，从而依次使飞机做出相应的飞行动作。

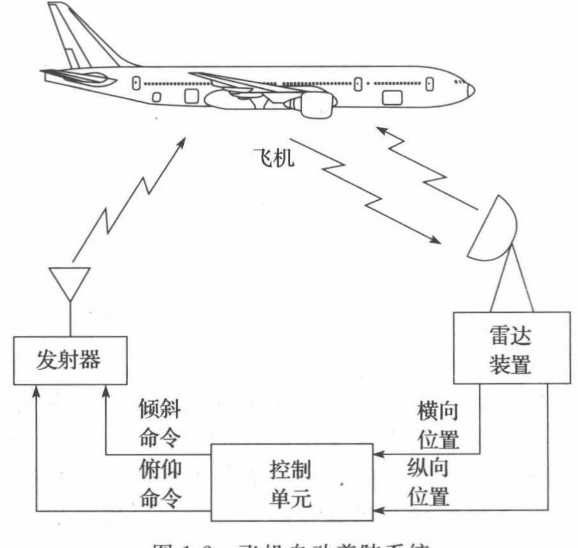


图 1-2 飞机自动着陆系统

图 1-2 中的控制单元实际上是一台数字计算机，其横向控制系统和纵向控制系统的工作是相互独立的，分别用来控制飞机的横向位置和纵向位置。就是说，倾斜命令影响的是飞机的横向位置，俯仰命令影响的是飞机的纵向位置。为简化起见，接下来仅讨论其中的横向控制系统。

横向控制系统的框图由图 1-3 给出。飞机的横向位置 $y(t)$ 为飞机距跑道中心延长线的水平距离，控制系统力图使 $y(t)$ 为 0。雷达装置每 0.05s 测一次 $y(t)$，得到 $y(t)$ 的采样 $y(kT)$，其中，$T=0.05$s，称为采样周期，$k=0, 1, 2, 3, \cdots$。数字控制器对这些采样值进行处理并产生离散的倾斜命令 $\phi(kT)$，飞机上的数据保持器将最近收到的命令倾斜值 $\phi(t)$ 持续维持到下一个命令值的到来，也就是说，倾斜命令值每 0.05s 更新一次，飞机对这些命令的响应就是改变它的横向位置 $y(t)$。

图 1-3 中有两个不希望出现的额外输入(称为干扰)。第一个是风 $w(t)$，风会在一定程度上影响飞机的位置。第二个干扰输入是雷达噪声，源于雷达无法给出飞机位置的精准测量，从而导致在飞机位置的测量值与实际值之间出现差异。理想传感器是不存在的，因此，控制系统中的传感器噪声总是不可避免的。

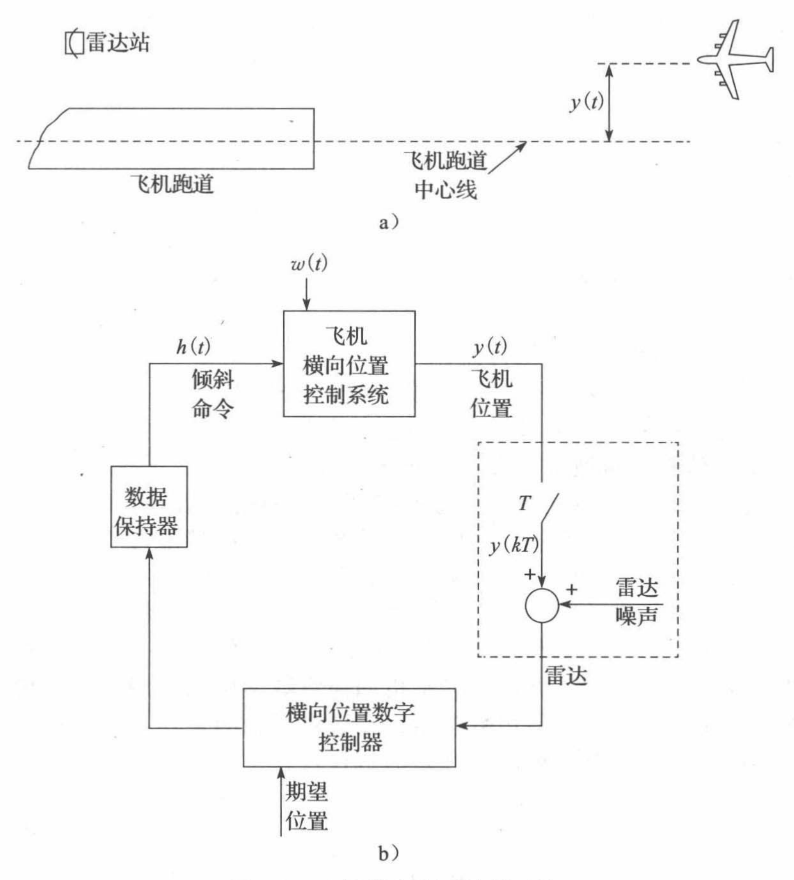


图 1-3　飞机横向位置控制系统

设计上述系统所面临的问题是如何在风及雷达噪声的干扰下，依然将 $y(t)$的变化维持在一个较小的级别上。此外，飞机的响应行为必须在一定程度上使飞行员所能承受，同时也不能对飞机体过度施压。

为了完成此项设计，必须了解飞机所承受的风、倾斜命令输入 $\phi(t)$与飞机的横向位置 $y(t)$之间的数学关系，这一数学关系可称为飞机的数学模型，或简称为飞机模型。例如，麦克唐纳-道格拉斯公司的 $F4$ 型飞机的横向位置系统模型是一个九阶非线性常微分方程[3]。对此，倾斜命令 $\phi(t)$保持较小的幅值，以使系统的非线性不再明显，并使这个九阶非线性常微分方程所描述系统模型可用于系统的设计。

控制系统设计者的任务是明确指出数字处理器欲实现怎样的处理。会涉及飞机的九阶函数模型、预计的风的输入、雷达噪声、采样周期 T 和所期望的响应特性。本书第 8 章、第 9 章，及第 11 章将谈到数字控制器的多种设计方法。

九阶飞机模型过于复杂，不适合作为本书的例子，对这一模型的研究也已超出本书的范畴。因此，为了说明建立物理系统模型的历程，本章将介绍四个简单而常见的控制系统的数学模型，其中的两个系统与位控相关，一个与温控相关，第四个涉及的则是电力系统的单机无穷大模型的电力控制问题。第 10 章将介绍如何通过对物理系统输入输出的测量，建立其模型的方法。

1.3　控制问题

可以这样来谈控制系统：闭环结构或反馈手段可实现对一个物理系统或物理过程的精准控制。系统中，称为响应的输出变量(信号)受到误差信号的调节，这个误差信号是关于

系统响应和期望响应之间差异的测量值，其中，系统响应由某一传感器所感知。

一般来讲，为了能满足一定的控制规格，需要用控制器来处理误差信号。这些控制规格可以是(但又不限于此)：

1）抗扰能力；

2）稳态误差；

3）瞬态响应；

4）对被控对象参数变化的敏感度。

待解决的控制问题一般包括：

1）选择用于测量所需反馈信号的传感器；

2）选择驱动控制对象动作的执行器；

3）研发被控对象、传感器和执行器的模型(数学方程)；

4）在所给模型及控制规格的基础上，进行控制器设计；

5）先通过系统仿真，再通过物理系统测试，对其设计进行分析性评估；

6）重复上述过程，直到得到令人满意的物理系统的响应结果。

初次的设计不能通过物理系统测试的原因是数学模型的精准性不够，这时，控制工程师必须反复上述设计过程，其间，需要采用所有可能的办法对系统进行改进。在这一设计过程中，对物理系统进行实验时所产生的直觉往往会起到重要的作用。

图 1-4 给出了这个数学分析与物理系统设计过程的关系[4]。本书将讨论该图中各阶段，需要强调的是，其中概念层面的内容是指如何将数学概念应用到数学模型上。在实际设计时，所面临的主要难题是如何用数学语言完成对问题的表述，以及如何针对客观的物理世界诠释数学解，其间，常常要用到许多的迭代过程。

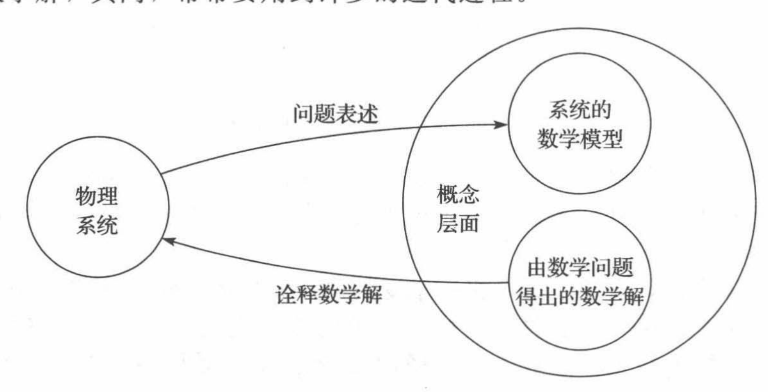


图 1-4　物理系统的数学解

在进行系统设计时，有些早先列出的步骤可以略去，这取决于系统的特点以及设计者的经验。实际上，许多控制系统选用的是标准控制器，并依靠经验确定控制器的参数，将规定好的方法一步步地直接用于物理系统，而不伴随数学模型的构建和使用，这种方法对有些控制系统非常奏效，有些则不然。例如，空间飞行器的控制系统就不能如此设计，该系统必须在第一时间就使空间飞行器状态良好。

本书采用数学的方法展开对控制系统分析与设计问题的讨论，在特定的控制系统的设计问题上，这些方法具有参考价值，但也不尽然。不过，本书采用标准控制器，将分析方法上升到控制系统设计的概念层面，同时给出每个标准控制器的应用。

1.4　卫星模型

卫星姿态控制系统属于物理系统，我们将其选作首例，来介绍如何建立物理系统的数学模型。设卫星为圆形，为其配置的推进器如图 1-5 所示。图中，$\theta(t)$为卫星的偏航角。

卫星推进器需要对卫星实施三维姿态控制，因此，除了要控制图示的偏航角之外，还要控制卫星的俯仰角和滚转角。在这里，我们仅介绍偏航角控制系统。

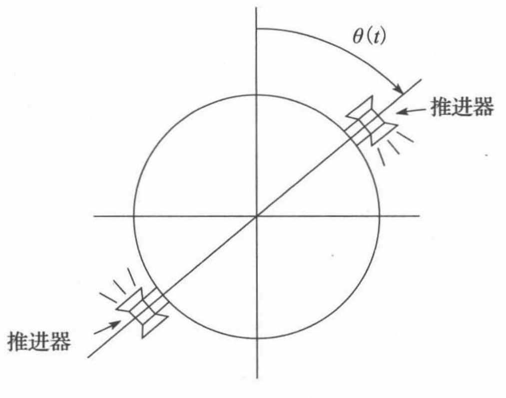


图 1-5 卫星

卫星运转时，被激活的推进器将产生转矩 $\tau(t)$。就是说，在图 1-5 所示卫星中，两个被激活的推进器将通过转矩减小 $\theta(t)$，而另两个推进器则有使 $\theta(t)$ 角增大的趋势。

考虑到卫星为刚体，且在其工作环境中摩擦力几乎为零，因此，可写出如下关系式：

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}=\tau(t) \tag{1-1}$$

式中：J 为卫星关于偏航轴的转动惯量。

下面推导其传递函数。设 $\theta(t)$ 和 $\tau(t)$ 的初始值为 0，对式(1-1)进行拉普拉斯变换，得：

$$Js^2\Theta(s)=T(s)=\mathscr{L}[\tau(t)] \tag{1-2}$$

我们称一个对象的传递函数为其输出变量 $\theta(t)$ 的拉普拉斯变换与输入变量 $\tau(t)$ 的拉普拉斯变换之比，记为 $G_{\mathrm{p}}(s)$，于是由式(1-2)可得：

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)}=G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{1}{Js^2} \tag{1-3}$$

关于拉普拉斯变换的简要介绍请见附录Ⅴ。

于是，卫星模型可以由式(1-1)给出的二阶微分方程来说明，也可以用二阶传递函数(见式(1-3))来表示，还可以使用状态变量模型，现在我们就来推导这个状态变量模型。首先将 $\theta(t)$ 定义为变量 $x_1(t)$，$x_1(t)$ 的微分定义为变量 $x_2(t)$，即

$$x_1(t)=\theta(t) \tag{1-4}$$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{\theta}(t) \tag{1-5}$$

将式(1-1)和式(1-5)进行联立，得

$$\dot{x}_2(t)=\ddot{\theta}(t)=\frac{1}{J}\tau(t) \tag{1-6}$$

式中：$\ddot{\theta}(t)$ 表示对 $\theta(t)$ 求关于时间 t 的二阶导数。

将式(1-5)和式(1-6)改写成如下的向量-矩阵形式(参见附录Ⅵ)：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{J}\end{bmatrix}\tau(t) \tag{1-7}$$

式中：$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 称为状态变量。

至此，我们可以为卫星模型指定三种形式，分别为式(1-1)、式(1-3)和式(1-7)。关于模拟系统状态变量模型较详细的讨论见第 4 章。

1.5 伺服电动机系统模型

下面我们以一个天线跟踪系统为例，来推导伺服(定位)系统的模型。在这个系统中，天线通过旋转实现对飞机的自动跟踪，而天线由电动机带动，电动机由经过放大的偏差信号驱动，这个偏差信号正比于天线所指方向到飞机的视线方向之间的差，它使电动机朝着降低这一差值的方向旋转。

图 1-6 所示直流电动机为恒定磁场下的电枢控制型电动机，其中，R_{a} 和 L_{a} 分别为电枢电阻和电枢电感，按照对伺服电动机的惯常做法，将电感 L_{a} 忽略，得电动机反电势 $e_{\mathrm{m}}(t)$ 与电动机轴的角速度 $\omega(t)$ 及电动机反电势 $e_{\mathrm{m}}(t)$ 与电动机轴的位移 $\theta(t)$ 之间的关系[5]，如式(1-8)所示。

$$e_m(t)=K_b\omega(t)=K_b\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{1-8}$$

式中：K_b 为常数，与电动机相关。

设电动机转子的总惯性矩为 J，总黏性摩擦力为 B，则电动机产生的扭矩为：

$$\tau(t)=J\frac{d\theta^2(t)}{dt^2}+B\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{1-9}$$

该扭矩由下式给定：

$$\tau(t)=K_T i(t) \tag{1-10}$$

其中：$i(t)$为电枢电流；K_T 为电动机参数。

电枢电路电压约束式为：

$$e(t)=i(t)R_a+e_m(t) \tag{1-11}$$

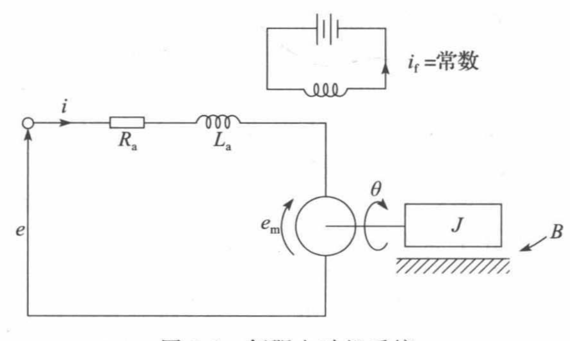


图 1-6　伺服电动机系统

为了导出输出 $\theta(t)$与输入 $e(t)$的函数关系，首先，将式(1-8)代入式(1-11)，得：

$$i(t)=\frac{e(t)-e_m(t)}{R_a}=\frac{e(t)}{R_a}-\frac{K_b}{R_a}\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{1-12}$$

然后，根据式(1-9)、式(1-10)和式(1-12)，得：

$$\tau(t)=K_T i(t)=\frac{K_T}{R_a}e(t)-\frac{K_T K_b}{R_a}\frac{d\theta(t)}{dt}=J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+B\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{1-13}$$

可将上式改写成：

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{BR_a+K_T K_b}{R_a}\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{K_T}{R_a}e(t) \tag{1-14}$$

这就是我们要寻求的模型。该模型是二阶的。如果不忽略电枢电感，所推出的模型会是三阶的[6]。

对式(1-14)进行拉普拉斯变换，可得传递函数为：

$$\frac{\Theta(s)}{E(s)}=G_p(s)=\frac{K_T/R_a}{Js^2+\dfrac{BR_a+K_T K_b}{R_a}s}=\frac{K_T/JR_a}{s\left(s+\dfrac{BR_a+K_T K_b}{JR_a}\right)} \tag{1-15}$$

这个传递函数在本书的多个举例中均会用到。

按照前述方法，同样可导出这个系统的状态变量模型。即令

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\theta(t)\\ x_2(t)&=\dot{\theta}(t)=\dot{x}_1(t)\end{aligned} \tag{1-16}$$

由式(1-14)，可得：

$$\dot{x}_2(t)=\ddot{\theta}(t)=-\frac{BR_a+K_T K_b}{JR_a}x_2(t)+\frac{K_T}{JR_a}e(t) \tag{1-17}$$

其向量-矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{BR_a+K_T K_b}{JR_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{K_T}{JR_a}\end{bmatrix}e(t) \tag{1-18}$$

1. 天线定向系统

我们把自动控制装置(简称伺服电动机)定义为能够控制机械定位(定向)的系统。那么天线定向需要两套伺服系统，如图 1-7 所示。图中，基座顶视图给出偏转轴控制系统的解释，其偏转角 $\theta(t)$由电动机和齿轮系统控制，齿轮系统是实施控制的执行器，示于基座侧视图内。

俯仰角 $\phi(t)$示于侧视图上，该角度由电动机和齿轮系统实施控制，作为执行器的齿轮

系统安装在基座内部，未示于图 1-7 中。

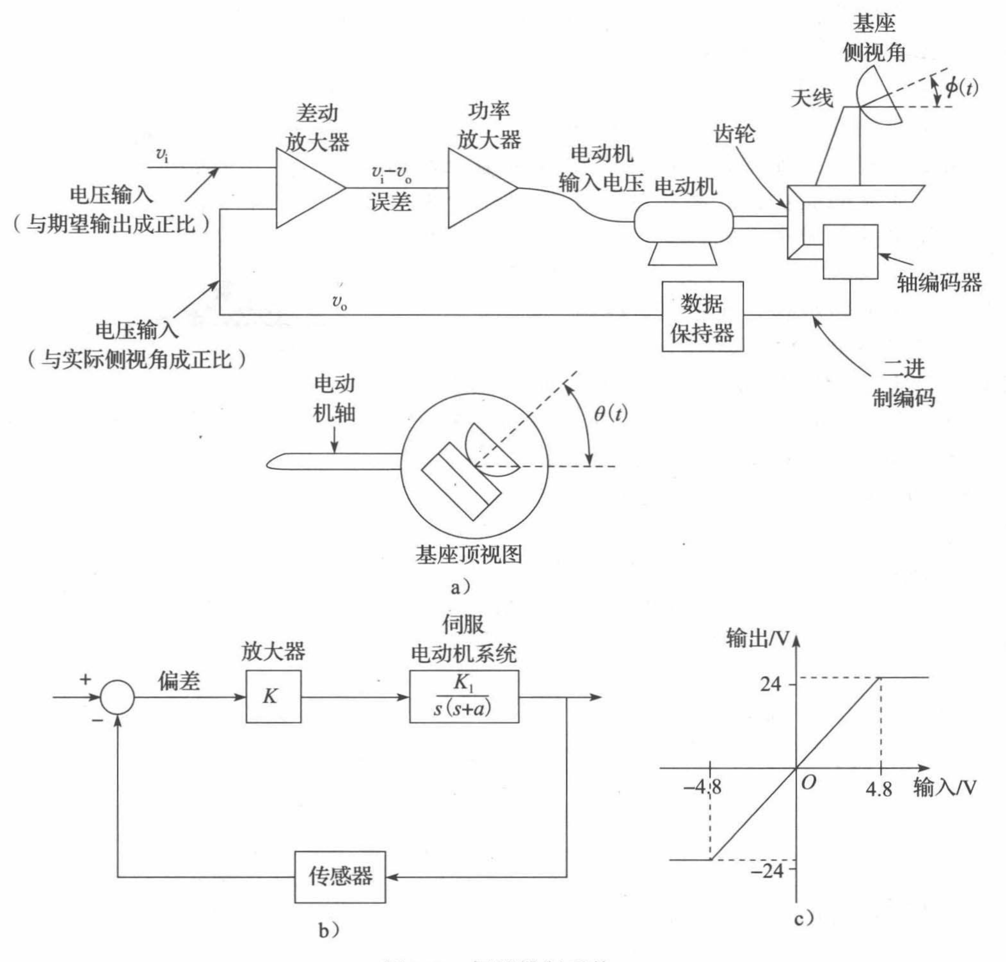


图 1-7　伺服控制系统

下面，我们仅来讨论偏转轴控制系统的问题。系统中，电动机带动天线和传感器旋转，传感器选用轴数字编码器，该编码器对轴转动的角度进行编码，并以二进制数的形式输出，这个二进制数与轴的转动角度成正比。可用 D/A（数/模）转换器将此二进制数转换成电压 $v_o(t)$，电压 $v_o(t)$ 自然也与轴的转动角度成正比。后面我们将给出直接将二进制数传送到数字控制器的一些例子。

在图 1-7a 所示视图中，电压 $v_o(t)$ 与天线的实际偏转角度成正比，电压 $v_i(t)$ 与天线的期望偏转角成正比，两个正比例系数相等。如果实际的偏转角度与其期望值不同，则误差电压 $e(t)\neq 0$，放大器将这个不为 0 的电压放大后送入电动机，引发电动机轴沿降低误差电压的方向转动。

图 1-7b 给出了上述系统的框图，考虑到误差信号的功率通常较弱，加入功率放大器对其放大，然后再去驱动电动机工作。不过这会导致非线性问题的出现，原因是放大器有一个输出电压的最大限度，此后放大器会处于饱和状态。设放大器的输入输出特性曲线如图 1-7c 所示，可求得其线性增益为 5，最大输出电压为 24V。当输入为 4.8V 时，放大器达到饱和，因此，当误差信号的模值大于 4.8V 之后，系统处于非线性状态。

对于许多控制系统，我们会竭尽全力确保其运行于线性区域。而对于有些系统，我们会有意识地设计出一些非线性的操作。例如，在上述伺服系统中，必须为电动机提供最大电压以获得最大的响应速度，于是当大的误差信号来临时，为了获得快速响应，我们宁肯

让放大器饱和。

关于非线性系统的分析与设计，已超出本书的讨论范畴。就是说，本书的讨论是以假设系统工作于线性模式为前提的。

2. 机器人控制系统

一台工业画线机器人如图 1-8 所示，其中的每个关节均需要控制，其控制系统的基本环节就是一台伺服电动机。通常的做法是，将机械臂上的每一个关节视为一个简单的伺服电动机构，此时忽略其他关节的运动，这是一种对系统进行分析和设计的简单方法，其结果往往达不到对其关节的理想控制[8]。

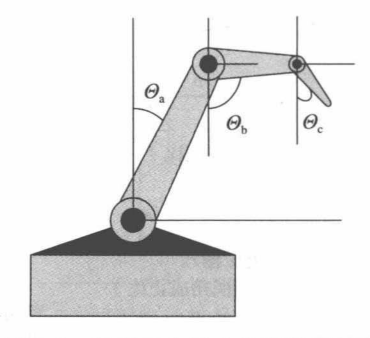


图 1-8 具有三个运动角度的机械臂

机械臂单一关节模型如图 1-9 所示，其中的伺服电动机使用的是二阶模型，如果电动机的电枢电感不能忽略，则应改用三阶模型[8]，另外假设机械臂通过多个齿轮与电动机相连，多个齿轮的总齿轮比为 n。图 1-9 所示模型中，$E_a(s)$为电枢电压，用于机械臂位控，设输入信号 $M(s)$由数字计算机提供，该信号较弱无法驱动电动机工作，因此使用功率放大器对其进行 K 倍放大，电动机轴的转角为$\Theta_m(s)$、机械臂转角为 $\Theta_a(s)$。上述描述同样适用于$\Theta_b(s)$和$\Theta_c(s)$。按照前面的做法，将齿轮和机械臂的惯性矩和摩擦力一并概括进伺服电动机模型，因此，图示模型为机器人机械臂的完整模型，本书多个章的习题中会用到这个模型。

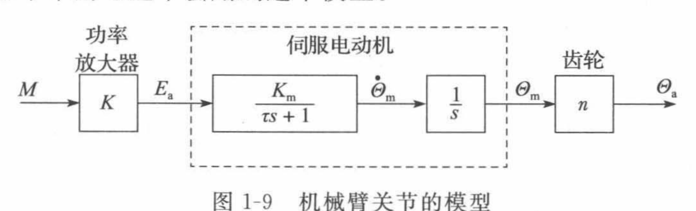


图 1-9 机械臂关节的模型

1.6 温度控制系统

作为建立系统模型的第三例，我们来讨论一个温控系统。这是一个期望控制箱体中液体温度的例子。箱体中的液体以某一速率流出，置换成温度为 $\tau_i(t)$的液体，如图 1-10 所示。搅拌器搅拌箱体中的液体，以使其温度处处一致且达到 $\tau(t)$值，电加热器用于加热液体。

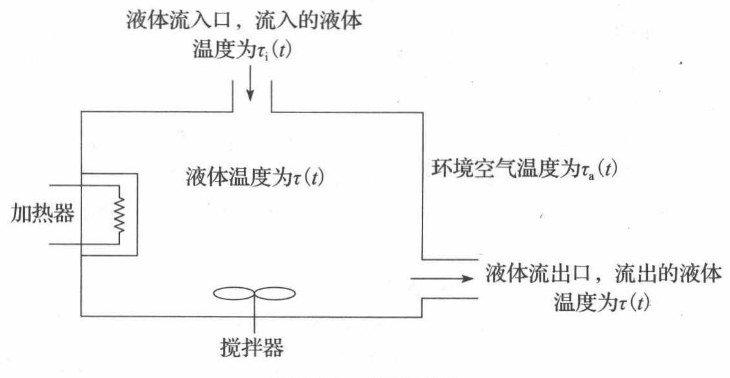


图 1-10 温控系统

首先给出如下定义：

$q_e(t)$为电加热器提供的热流；

$q_i(t)$为通过液体进入箱体的热流；

$q_l(t)$为进入液体的热流；

$q_o(t)$为通过液体离开箱体的热流；

$q_s(t)$为通过箱体表面的热流。

根据能量守恒定律，加入箱体的热量一定等于储存于箱体内的热量和从箱体流失的热量，于是有：

$$q_e(t)+q_i(t) = q_l(t)+q_o(t)+q_s(t) \tag{1-19}$$

由于[9]

$$q_l(t)=C\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-20}$$

式中：C为箱体内液体的热容量。

令$v(t)$为出入箱体的液体流速，H为液体比热，则可写出如下关系式：

$$q_i(t)=v(t)H\tau_i(t) \tag{1-21}$$

及

$$q_o(t)=v(t)H\tau(t) \tag{1-22}$$

令$\tau_a(t)$为箱体外部的环境温度，R为通过箱体表面的热流热阻，于是，有：

$$q_s(t)=\frac{\tau(t)-\tau_a(t)}{R} \tag{1-23}$$

用式(1-20)～式(1-23)替换式(1-19)中的相关项，得到：

$$q_e(t)+v(t)H\tau_i(t)=C\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}+v(t)H\tau(t)+\frac{\tau(t)-\tau_a(t)}{R}$$

上述微分方程是时变的。假设液体流速$v(t)$为常值V，于是，有：

$$q_e(t)+VH\tau_i(t)=C\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}+VH\tau(t)+\frac{\tau(t)-\tau_a(t)}{R} \tag{1-24}$$

这是一个一阶线性常系数微分方程的模型。就控制系统而言，$q_e(t)$是输入的控制信号，$\tau_i(t)$和$\tau_a(t)$是干扰输入，$\tau(t)$是输出信号。

对式(1-24)进行拉普拉斯变换且$T(s)=\mathscr{L}[\tau(t)]$，得：

$$T(s)=\frac{Q_e(s)}{Cs+VH+(1/R)}+\frac{VHT_i(s)}{Cs+VH+(1/R)}+\frac{(1/R)T_a(s)}{Cs+VH+(1/R)} \tag{1-25}$$

该式可表示成图1-11所示的框图结构。

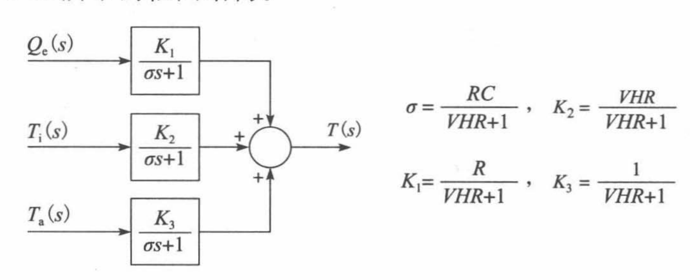


图1-11 温控系统框图

在忽略干扰侵入的前提下，温控系统模型较为简单，是一阶的。不过，在设计该控制系统的一些阶段，还是应该将干扰考虑在内，通常的做法是将系统对干扰输入的响应最小化。

本节所推导的模型同样也能直接用于炉内或试验室内的空气温度控制，对于这类系统，不存在外部空气的流入，因此干扰输入$q_i(t)=0$，当然，还要将式(1-25)中的液体参数置换成空气参数。

1.7 单机无穷大电力系统

单机无穷大(SMIB)电力系统如图1-12所示。该系统通常用作了解大电网动态及稳定

性的初始模型，由同步发电机 G 组成，许多情况下，这个 G 代表的是一个较大区域内所含的多台同步发电机的等效模型，它跨过无损传输线为连接到固定或平稳点上的负载提供电力，通常称为无穷大母线，这里，“无穷大”的意思是可以将其母线视为一台理论上具有无穷大惯性的发电机，以表示这条母线上的电压和相位角总是保持不变，从而为定量分析系统中其他发电机的相角振荡提供参考。因此，为方便起见，我们总是将无穷大系统母线电压的标幺值设为 1，相位角等于 0。为导出 SMIB 电力系统的模型，首先给出以下系列符号的界定：

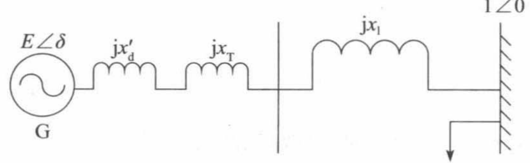


图 1-12 SMIS 电力系统

δ 为同相发电机的相位角(rad)；

ω 为角速度(rad/s)；

ω_s 为同步角速度，对于 60Hz 的系统，该角速度等于 120π(rad/s)；

E 为发电机的内部恒定电压(每单位)；

x'_d 为直轴突出电抗(每单位)；

x_T 为变压器电抗(每单位)；

x_l 为输电线路电抗(每单位)；

d 为阻尼常数；

M 为发电机的机电惯性；

P_m 为涡轮机向发电机的机械功率输入(每单位)；

P_e 为发电机向 SMIB 系统的电功率输出(每单位)。

关于上述符号的较详细物理性注释可参见文献[10]。应用牛顿第二运动定律，可写出 SMIB 系统的动态模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega - \omega_s \\ M\dot{\omega} &= P_m - P_e - d\omega\end{aligned} \tag{1-26}$$

上式意味着输入功率流和输出功率流未达平衡时，将引发同步发电机转子的加速，根据电路定律，从 G 流到 SMIS 系统的总复功率为：

$$P = (E\angle\delta)\,\tilde{I}^* \tag{1-27}$$

式中：$E\angle\delta = E(\cos\delta + \mathrm{j}\sin\delta)$；$\tilde{I}$ 为发电机供出的电流相量；上标 * 取复数共轭。

根据基尔霍夫定律，可将该电流写成：

$$\tilde{I} = \frac{E\angle\delta - 1\angle 0}{\mathrm{j}(x'_d + x_T + x_l)} \tag{1-28}$$

式中：$1\angle 0$ 为 SMIS 系统的电压相量。

式(1-28)中分母表示发电机和 SMIS 系统之间的总电抗，令 $x = x'_d + x_T + x_l$，可将电流相量表达式简写为：

$$\tilde{I} = \frac{E\cos\delta - 1 + \mathrm{j}E\sin\delta}{\mathrm{j}x} \tag{1-29}$$

经简单推算，可得：

$$P = \frac{E}{x}(\sin\delta + \mathrm{j}(E - \cos\delta)) \tag{1-30}$$

因为式(1-26)中的 P_e 仅是 P 的实部，因此还可将式(1-26)写成：

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega - \omega_s \\ M\dot{\omega} &= P_m - \frac{E}{x}\sin\delta - d\omega\end{aligned} \tag{1-31}$$

式(1-31)就是 SMIB 系统时间连续的状态变量模型。然而，因式中 $\sin\delta$ 项的存在，该模型是非线性的。于是，我们在 $\delta = \delta_0$，$\omega = \omega_s$ 处对模型进行线性化，获得其线性时变模型为：

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{\delta}\\ \Delta\dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{E\cos\delta_0}{Mx} & -\dfrac{d}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta\\ \Delta\omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{M}\end{bmatrix}\Delta P_{\mathrm{m}} \tag{1-32}$$

式中：Δ代表相应状态为小信号扰动的均衡值。

输出是电功率增量：

$$\Delta P_{\mathrm{e}}=\frac{E\cos\delta_0}{x}\Delta\delta=k\Delta\delta \tag{1-33}$$

对于输入为 ΔP_{m}、输出为 ΔP_{e} 的系统，传递函数可通过式(1-32)和式(1-33)导出，即

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{k}{Ms^2+ds+k} \tag{1-34}$$

$G_{\mathrm{p}}(t)$给出的是小信号级的机械功率输入与同步发电机电功率输出之间的开环传递函数，其稳态增益($s=0$)为1，这就意味着稳态时送入电机的机械功率必然与输出的电功率完全平衡。但是，面对输入的单位变化，其输出的瞬态响应却不能满足用户的需求，因此，需要设计一个输出反馈控制器 $C(s)$来控制电功率的瞬态响应，如图1-13所示。引入该控制器之后，应该使闭环传递函数的稳态增益依然为1。因为参数 M、d 和 k 的牵制，往往使开环系统的响应在阻尼、相对超调、到达稳态的时间等诸多方面不能满足人们的需求，控制器的设计任务就是要使这些瞬态响应指标达到预期要求。

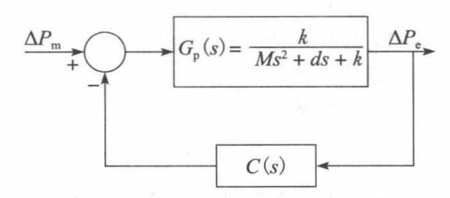


图1-13 闭环SMIB电力系统模型的框图

1.8 小结

通过本章，我们引入了控制系统的概念，讨论了四个物理系统模型，即推导出了卫星姿态控制模型、伺服系统模型、箱体内液体温控模型和单机无穷大电力系统模型，其中还对伺服系统列举了两个例子，分别是天线定向系统和机器人机械臂定向系统。上述系统均是时间连续的，因此通常采用拉普拉斯变换的方法对它们展开分析和设计。下一章，我们要将本章所及概念延展到数字计算机控制的系统，并对分析和设计这类系统所需的一些数学问题展开讨论。

参考文献

[1] M. L. Dertouzos, M. Athans, R. N. Spann, and S. J. Mason, *Systems, Networks, and Computation: Basic Concepts.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1979.

[2] R. F. Wigginton, "Evaluation of OPS-II Operational Program for the Automatic Carrier Landing System," Naval Electronic Systems Test and Evaluation Facility, Saint Inigoes, MD, 1971.

[3] C. L. Phillips, E. R. Graf, and H. T. Nagle, Jr., "MATCALS Error and Stability Analysis," Report AU-EE-75-2080-1, Auburn University, Auburn, AL, 1975.

[4] W. A. Gardner, *Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems,* 2nd ed. New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1990.

[5] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, and S. D. Umans, *Electric Machinery,* 6th ed. New York: McGraw-Hill Publishing Company, 2003.

[6] C. L. Phillips and J. Parr, *Feedback Control Systems,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[7] C. W. deSilva, *Control Sensors and Actuators.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1989.

[8] K. S. Fu, R. C. Gonzalez, and C. S. G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence.* New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1987.

[9] J. D. Trimmer, *Response of Physical Systems.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1950.

[10] P. M. Anderson and A. A. Fouad, *Power System Stability and Control,* 2nd ed. Wiley, 2008.

习题

1.1-1 (1) 将两个系统相并联，如图P1.1-1a所示。证明并联后的系统传递函数等于这两个系统传递函数的和。
(2) 将两个系统相级联，如图P1.1-1b所示。证明级联后的系统传递函数等于这两个系统传递函数的积。

a)　　　　　　　　b)

图 P1.1-1　习题 1.1-1 所用系统

1.1-2　通过列写代数方程和消元处理，求出如下系统的传递函数 $C(s)/R(s)$。

(1) 图 P1.1-2a 所示系统；

(2) 图 P1.1-2b 所示系统；

(3) 图 P1.1-2c 所示系统。

1.1-3　利用附录Ⅱ给出的梅森公式对习题 1.1-2 的结果进行证明。

(1) 图 P1.1-2a 所示系统；

(2) 图 P1.1-2b 所示系统；

(3) 图 P1.1-2c 所示系统。

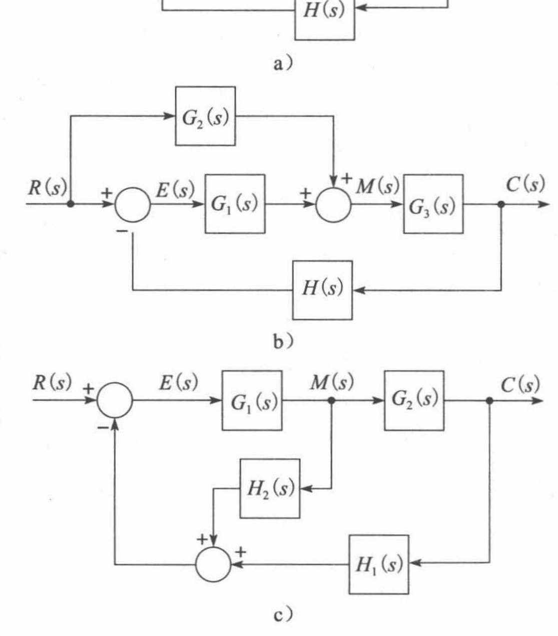


图 P1.1-2　习题 1.1-2 所用系统

1.1-4　反馈控制系统如图 P1.1-4 所示。其中控制对象的传递函数为：

$$G_p(s)=\frac{5}{0.2s+1}$$

(1) 写出关于控制对象输出 $c(t)$ 与输入 $m(t)$ 间的微分方程；

(2) 设系统中补偿器的传递函数 $G_c(s)=10$、传感器的传递函数 $H(s)=1$，写出图示系统关于 $c(t)$ 和 $r(t)$ 的微分方程；

(3) 根据(2)问的结果，导出该系统的传递函数；

(4) 习题 1.1-2 已证明：图 P1.1-4 所示系统的闭环传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}$$

利用这一关系证明(3)问的结果。

(5) 根据传递函数分母因式(极点项)$(s+a)$所对应的时间常数为 $\tau=1/a$(a 为实数)，求图示开环系统的时间响应和图示闭环系统的时间响应。

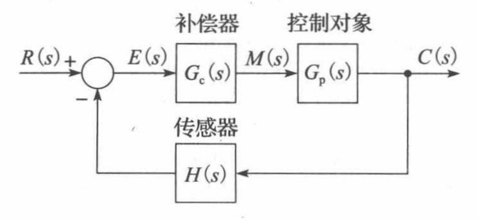


图 P1.1-4　反馈控制系统

1.1-5　设习题 1.1-4 的控制系统中，传递函数为：

$$G_c(s)=2,\quad G_p(s)=\frac{3s+8}{s^2+2s+2}$$

$$H(s)=1$$

逐项完成习题 1.1-4 的(1)～(5)问，对于(5)，传递函数极点项$[(s+a)^2+b^2]$所对应的时间常数为 $\tau=1/a$。

1.1-6　设习题 1.1-4 的控制系统中，传递函数为：

$$G_c(s)=2,\quad G_p(s)=\frac{5}{s^2+2s+2},\quad H(s)=3s+1$$

逐项完成习题 1.1-4 的(1)～(5)问。

1.4-1　1.4 节谈及的卫星姿态与闭环控制系统相关(见图 P1.4-1)，其转矩与误差信号成正比。

(1) 请推导传递函数 $\Theta(s)/\Theta_c(s)$，其中，$\theta(t)=\mathscr{L}^{-1}[\Theta(s)]$为卫星姿态。

(2) 1.4 节导出了卫星的状态方程，请修改之，以形成图 P1.4-1 所示闭环系统的模型。

1.4-2　(1) 设习题 1.4-2 系统中的 $J=0.4$、$K=14.4$。卫星的初始姿态角等于 0°，要求在 $t=0$ 时姿态角

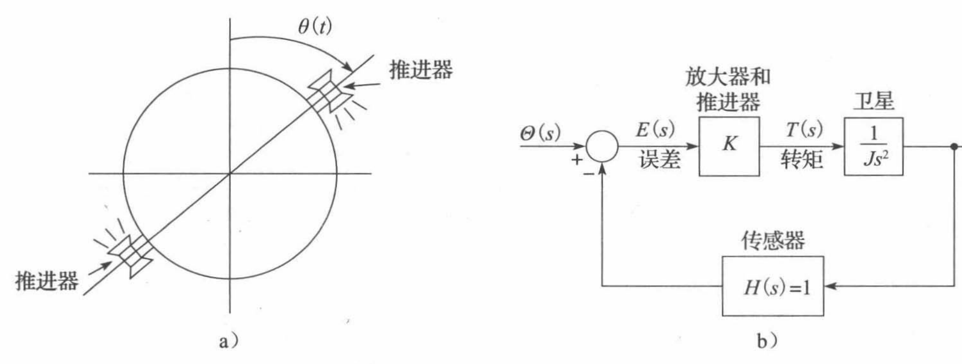


图 P1.4-1 卫星姿态控制系统

为 20°，试请求出响应 $\theta(t)$。

(2) 设卫星的初始条件为 $\theta(0)=10°$ 及 $\dot{\theta}(0)=30°/s$，试求出响应 $\theta(t)$。注意：该系统的时间单位取 s。

(3) 通过先求初始条件下的解，再将该解带入系统微分方程的办法，证明(2)问的求解结果。

1.4-3 设图 P1.4-1 所示系统的输入为阶跃函数 $\theta_c(t)=5u(t)$（单位为“°”）。为使卫星姿态角以每秒 10 周的频率按正弦规律变化，求系统中的放大增益 K 和转动惯量 J。设系统微分方程的时间单位为 s。

1.4-4 图 P1.4-1 所示卫星控制系统是不可用的，原因是其对于任何激励的响应均含有一个无阻尼的正弦项。有一种常用的补偿措施是测量其角速度 $d\theta(t)/dt$，然后将位信号 $\theta(t)$ 与速度信号 $d\theta(t)/dt$ 进行线性求和，形成反馈信号，如图 P1.4-4 所示。显然，该反馈信号中包含了输出量的变化率。

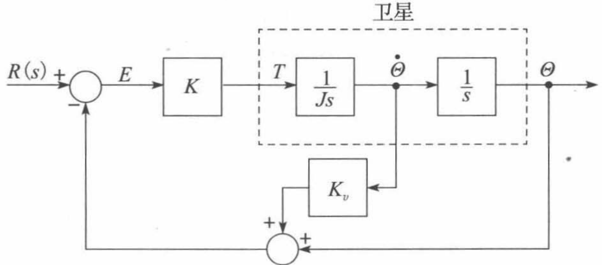


图 P1.4-4 带有速度反馈的卫星姿态控制系统

(1) 推导该系统的传递函数 $\Theta(s)/\Theta_c(s)$；

(2) 1.4 节导出了卫星的状态方程，请修改之，以形成图 P1.4-4 所示闭环系统的模型；

(3) 可以将由(2)问所得状态方程表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\theta_c(t)$$

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$$

证明：(2)问的 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 就是(1)问的传递函数的分母。

1.5-1 1.5 节给出的天线定向系统如图 P1.5-1 所示。本习题考虑其偏转角 $\theta(t)$ 的控制问题，假设系统中功率放大器的增益为 10V/V、齿轮比为 0.04、角度传感器(轴编码器和数据保持器)给出 $\theta(t)$，即

$$v_o(t)=0.04\theta(t)$$

式中：$v(t)$ 的单位取 V；$\theta(t)$ 的单位取°。令 $e(t)$ 为电动机的输入电压，电动机底座的传递函数为：

$$\frac{\Theta(s)}{E(s)}=\frac{20}{s(s+6)}$$

(1) 系统开环($v_o(t)$ 为 0)时，有一单位阶跃电压作用于电动机[$E(s)=1/s$]。求系统稳态时的输出 $\theta(t)$(单位取度)及天线座角 $\theta(t)$ 的速度(单位可以取每秒度和每分转 r/min)；

(2) 图 P1.5-1b 示出的系统框图中，角度信号单位取°、电压信号单位取 V。请将所需增益和传递函数填入图中；

(3) 将 $\theta(t)$ 的单位取为 rad，请对(2)问的增益做出必要的调整；

(4) 设 $t=0$ 时，$\theta_i(t)=10°$，求响应 $\theta(t)$；

(5) (4)问的响应大约在多少秒到达稳态？

1.5-2 伺服电动机的状态变量模型已在 1.5 节给出，请将该状态变量方程进行扩展，为图 P1.5-1b 所示的天线定向系统建立模型。

1.5-3 (1) 求图 P1.5-1b 所示的天线定向系统的传递函数，其角度以“°”为单位；

a)

b)

图 P1.5-1　习题 1.5-1 所用系统

(2) 修改(1)给出的传递函数，使其角度以“rad”为单位；

(3) 用图 P1.5-1b 所示的框图证明(2)问所得结果。

1.5-4　机器人臂一个关节的框图如图 P1.5-4 所示，该系统已在 1.5 节进行了讨论。其中，输入$M(s)$是系统的控制信号，$E_a(s)$为伺服电动机输入电压，$\Phi_m(s)$是电动机轴的角度，系统输出 $\Theta_a(s)$为机器人臂的角度。忽略伺服电动机的电枢电感，使其传递函数是二阶的，伺服电动机传递函数中包括了齿轮和机器人臂的惯性，请推导传递函数 $\Theta_a(s)/M(s)$和 $\Theta_a(s)/E_a(s)$。

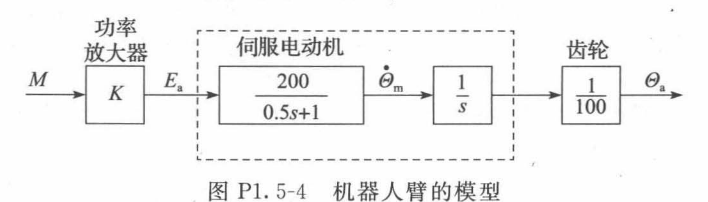


图 P1.5-4　机器人臂的模型

1.5-5　对于图 P1.5-4 所示的机器人臂：

(1) 设 $e_a(t)$的单位为 V、$\theta_m(t)$和 $\theta_a(t)$的单位为“°”、时间单位为 s。若伺服电动机的额定功率为 24V[电压 $e_a(t)$应小于或等于 24V]，求伺服电动机的额定转速(外加 24V 电压时，电动机的稳定转速)；

(2) 求阶跃电压激励[$e_a(t)=24u(t)$]下的机器人臂的最大移动速度(°/s)；

(3) 设 $e_a(t)$为一个 24V 的阶跃函数，求机器人臂的移动速度达到(2)问求得的最大移动速度的 99%时所需时间；

(4) 设因系统硬件的制约 $m(t)$的幅度小于或等于 10V，那么，应该选择什么样的增益，为什么？

1.6-1　热测试室如图 P1.6-1a 所示。该测试室是一件较大的房间，用于在各种热应力下对大型设备进行测量。测

试室通过蒸汽加热，加热程度靠电动阀控制，测试室的温度由称之为热敏电阻的传感器测量，该热敏电阻是一个半导体电阻，其阻值随温度变化而变化。开门入室会影响室内温度，因此视这种情况为干扰。测试室的简化模型如图 P1.6-1b 所示(时间单位取“min”)。其中，$e(t)$是控制输入，它控制蒸汽管道上的阀门(见图)，干扰信号 $d(t)$是一个单位阶跃函数，用来模拟房间门打开与否，门关闭时，$d(t)=0$。

(1) 求测试室的时间常数；

(2) 设控制电压 $e(t)=5u(t)$且门关闭，求解测试室温度 $c(t)$，绘制曲线 $c(t)$，同时给出稳态温度；

(3) (1)问中隐含着一个惯用的假设，即初始室温设为 0℃，设初始室温为 25℃ [$c(0)=25$℃]，重新求解(2)的问题；

(4) 在(3)的初始条件下，电压作用 2min 之后测试室的门被打开，并一直处于打开状态，请加入该项干扰对(3)问所得曲线的影响；

(5) 将(4)问中的测试室门始终打开改为打开 12min 后又关闭，请加入该项干扰对(4)问所得曲线的影响。

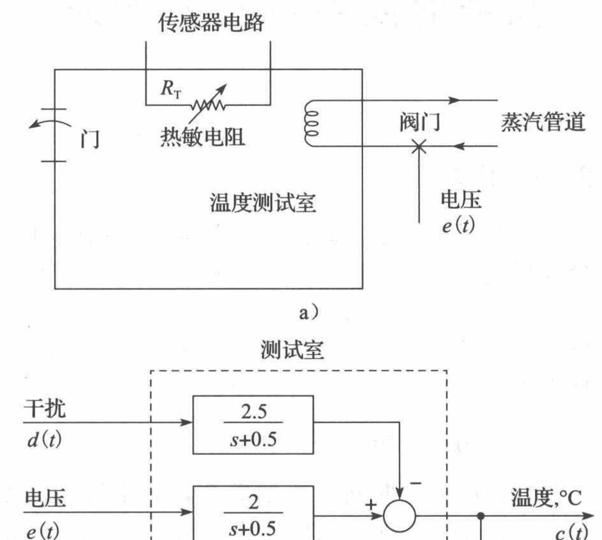


图 P1.6-1 温度测试室

1.6-2 图 P1.6-1 所示温度测试室的传递函数 $C(s)/E(s)=2/(s+0.5)$，时间单位取 min。

(1) 修改该传递函数，以能使所产生的测试室温度 $c(t)$以 s 为时间单位；

(2) 设测试室的门关闭，输入 $e(t)=5u(t)$V，解出 $c(t)$，以证明(1)问的结果。

① 使用(1)问提供的传递函数；

② 使用图 P1.6-1 提供的传递函数。证明①和②的结果在 $t=1$min 时产生的温度相同。

1.7-1 在图 1-13 所示的单机无穷大电力系统中，$M=0.5$，$d=0.1$，$k=10$。求出如下情况的闭环传递函数的稳态增益。

(1) $C(s)=1$　(2) $C(s)=\frac{1}{1+2s}$　(3) $C(s)=\frac{10s}{s^2+2s+8}$

1.7-2 在图 1-13 所示的单机无穷大电力系统中，$M=0.5$，$d=0.1$，$k=10$，$C(s)=1$。对该系统进行单位阶跃响应的仿真，计算输出 ΔP_e 的上升时间。将 M 改为 1 和 10，重新进行单位阶跃响应的仿真，计算输出 ΔP_e 的上升时间，同时观察惯性 M 的增大将如何影响上升时间。当 $k=100$ 时，求 ΔP_e 的稳态值。

1.7-3 图 P1.7-3 所示闭环的单机无穷大电力系统框图与图 1-13 略有不同，该图中，控制器与控制对象相级联，而不是位于反馈通路上。系统的反馈增益为 1。

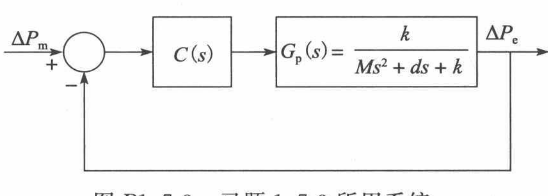


图 P1.7-3 习题 1.7-3 所用系统

(1) 当控制器取如下传递函数时，求单位阶跃输入 ΔP_m 和输出之间的稳态误差：

① $C(s)=a_0$(比例，或 P 控制器)

② $C(s)=a_0+a_1s$(比例+微分，或 PD 控制器)

③ $C(s)=a_0+\frac{a_2}{s}$(比例+积分，或 PI 控制器)

④ $C(s)=a_0+a_1s+\frac{a_2}{s}$(比例+积分+微分，或 PID 控制器)

(2) 设 $M=0.5$，$d=0.1$，$k=10$，PID 控制器 $C(s)=1+2s+10/s$，计算 ΔP_e 的上升时间。若将微分增益加倍，则 ΔP_e 的上升时间将如何变化？

第2章

离散时间系统及 z 变换

2.1 引言

本章讨论两个重要话题：离散时间系统和 z 变换。连续时间系统的行为可通过一组微分方程给予描述(建模)，与此不同，离散时间系统的行为描述靠的是一组差分方程。用于分析线性时不变连续时间系统的变换方法是拉普拉斯变换，类似地，用于分析线性时不变离散时间系统的变换方法是 z 变换，本章讨论如何通过差分方程、传递函数，以及状态方程来为离散时间系统建立模型。

2.2 离散时间系统

为说明离散时间系统的概念，先来看看图 2-1a 所示的数字控制系统，其中的数字计算机履行系统功能补偿的职责，误差信号属于连续的时间信号，因此需要用一个A/D(模/数)转换器作为计算机的输入接口，将连续的误差信号转换为计算机容易处理的信号，计算机输出的是二进制信号，因此需要在其输出端接入一个 D/A(数/模)转换器，将该信号转换成能驱动控制对象工作的信号。

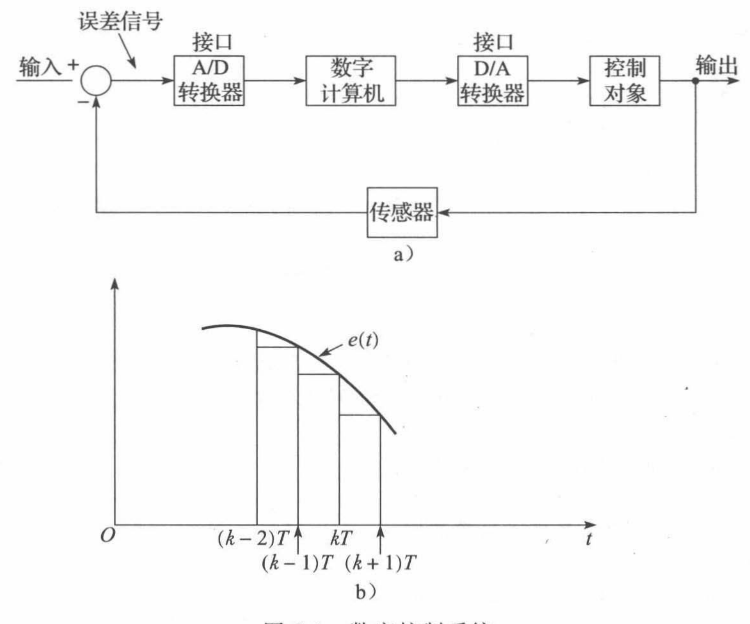


图 2-1 数字控制系统

先来看这样一个例子，假设用 A/D 转换器、数字计算机和 D/A 转换器取代模拟的(或时间连续的)比例积分(PI)控制器，要求数字控制系统的响应与模拟系统的响应基本相同(关于 PI 控制器的讨论见第 8 章)。模拟控制器的输出为：

$$m(t) = K_{\mathrm{P}}e(t) + K_{\mathrm{I}}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-1}$$

式中：$e(t)$是控制器的输入信号；$m(t)$是控制器的输出信号；K_{P}和 K_{I}是需要在设计过程

中确定的常数增益。

由于数字计算机可以对数值相乘、数值相加，以及数值积分进行编程，所以该控制方程可以用数字计算机实现。对该例而言，将采用数值积分的矩形规则[1]，如图 2-1b 所示，当然，也可采用其他数值积分算法。

对于矩形规则，图 2-1b 所示曲线下方面积近似等于图中各矩形面积的和。令 $x(t)$为 $e(t)$的数值积分，则有：

$$x(kT) = x[(k-1)T] + Te(kT) \tag{2-2}$$

式中：T 为数值算法的步长，单位为 s。

因此对于数字补偿器来讲，式(2-1)变为：

$$m(kT) = K_{\mathrm{P}}e(kT) + K_{\mathrm{I}}x(kT)$$

式(2-2)为一阶线性差分方程。一阶线性时不变差分方程的一般形式为(方便起见，T 被略去)：

$$x(k) = b_1 e(k) + b_0 e(k-1) - a_0 x(k-1) \tag{2-3}$$

仅根据式(2-3)中最后一项明确给出的采样时刻，即可确定该方程是一阶的，而 n 阶线性差分方程的一般形式为：

$$\begin{aligned} x(k) =& b_n e(k) + b_{n-1}e(k-1) + \cdots + b_0 e(k-n) \\ & - a_{n-1}x(k-1) - \cdots - a_0 x(k-n) \end{aligned} \tag{2-4}$$

如果图 2-1 所示的控制对象也是线性时不变的，则一般整个系统的阶次会高于控制器的阶次，这个系统就要以式(2-4)的形式建模，第 5 章讨论这部分内容。与式(2-4)相比，描述 n 阶连续时间系统的线性微分方程为：

$$y(t) = \beta_n \frac{\mathrm{d}^n e(t)}{\mathrm{d}t^n} + \cdots + \beta_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + \beta_0 e(t) - \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} - \cdots - \alpha_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-5}$$

设计数字补偿器时，有两种方法可用。其一，像上例那样，先设计模拟补偿器，然后通过某一近似方法将其变换成数字补偿器；其二，与将模拟补偿器近似变换成数字补偿器的方法不同，第 3、9、11 章介绍了一种设计数字补偿器的精确方法。

线性时不变模拟(如时间连续)滤波器同样具有式(2-5)的形式。实现这种滤波器的器件通常是含有运算放大器的 *RC* 网络，并称其为用来解决滤波问题的已编程的模拟计算机。类似地，式(2-4)也是线性时不变离散滤波器的描述式，通常称为数字滤波器，实现这种滤波器的装置是一台具有求解式(2-4)的数字计算机。于是，图 2-1 所示的数字计算机可以通过编程求解式(2-4)形式的差分方程，控制系统设计师面对的问题是确定采样周期 T、差分方程的阶次 n、滤波器系数 a_i和 b_i，以期使控制系统具有所需特性。

在实现数字滤波器的过程中，还有一些附加问题待考虑。例如，因数字位数的限制进行的取舍运算会导致系统误差，为使这种误差在一个可接受的水平，需要确定计算机的字长。比如，为使飞机自动登陆美国航母，需设计并实现一台数字滤波器(控制器)[2]，该系统中，采样率为 25Hz(T=0.04s)，控制器为 11 阶，为将因取舍运算导致的误差维持在可接受的水平，求得的计算机所需最小字长为 32 位。再如，该控制器是比例-积分-微分(PID)控制器，因其微分部分的求导运算，原则上需要其具有对宽泛噪声的滤除能力。关于数值积和数值微分的内容，安排在第 8 章讨论。除了在控制系统中的应用之外，数字滤波器还可以替代模拟滤波器，所涉及问题与上雷同。

2.3　变换法

在进行线性时不变连续系统的分析与设计时，要用到拉普拉斯变换。举另一个同样有效的例子，由式(2-5)描述的系统行为可以通过对该方程进行拉普拉斯变换再求得其传递函数：

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\beta_n s^n + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \cdots + \alpha_1 s + 1} \tag{2-6}$$

式(2-4)给出的是离散时间系统差分方程形式的模型，对其进行分析，可以利用变换法来实现。

现在来定义对数字序列的变换。定义 $E(z)$为 z^{-k}的幂级数，其各项系数等于数字序列$\{e(k)\}$的取值，这种变换称为 z 变换，z 正-反变换对表示如下：

$$E(z)=\mathscr{Z}[\{e(k)\}]=e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-1}+\cdots$$

$$e(k)=\mathscr{Z}^{-1}[E(z)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\Gamma}E(z)z^{k-1}\mathrm{d}z,\quad \mathrm{j}=\sqrt{-1} \tag{2-7}$$

式中：$\mathscr{Z}(\cdot)$表示进行 z 变换操作；$\mathscr{Z}^{-1}(\cdot)$表示进行 z 反变换操作。

将式(2-7)中的 $E(z)$写成更紧凑的形式：

$$E(z)=\mathscr{Z}[\{e(k)\}]=\sum_{k=0}^{+\infty}e(k)z^{-k} \tag{2-8}$$

方便起见，通常将式中的大括号略去，将$\mathscr{Z}[\{e(k)\}]$表示为$\mathscr{Z}[e(k)]$，不过应记住 z 变换是对序列进行的。

对数字序列$\{e(k)\}$定义的 z 变换方法，可以用于由线性时不变差分方程描述的任一类型系统的分析。例如，用 z 变换分析离散概率问题，这时，序列$\{e(k)\}$中的数字指的是离散的概率值。

式(2-7)给出的是单边 z 变换定义，双边 z 变换(有时称为生成函数)定义为：

$$G[\{f(k)\}]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k)z^{-k} \tag{2-9}$$

本书内容仅涉及由式(2-7)定义的单边 z 变换，称为普通 z 变换。如果序列 $e(k)$是对时间函数 $e(t)$每隔 T 秒采样一次所得的结果，应将 $e(k)$理解为 $e(kT)$(即简便起见，T 被略去不写)。

下面举 3 个例子，以对 z 变换做进一步的说明。

例 2.1 已知 $E(z)$，求$\{e(k)\}$。

$$E(z)=1+3z^{-1}-2z^{-2}+z^{-4}+\cdots$$

根据式(2-7)可知序列$\{e(k)\}$的各元素取值为

$$e(0)=1,\quad e(3)=0$$
$$e(1)=3,\quad e(4)=1$$
$$e(2)=-2\quad \cdots$$

在有些情况下，可使用闭式表示 $E(z)$，这时，如下的幂级数非常有用：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots,\quad |x|<1 \tag{2-10}$$

请见如下两例。 ◀

例 2.2 已知对于所有 k，$e(k)=1$，求 $E(z)$。根据定义，有：

$$E(z)=1-z^{-1}+z^{-2}+\cdots$$

根据式(2-10)，可得 $E(z)$的闭式形式为：

$$E(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1},\quad |z^{-1}|<1 \tag{2-11}$$

请注意$\{e(k)\}$可能采样于一个单位阶跃函数，但不排除采样于其他函数，这类函数每隔 T 秒取值为 1，因此它们具有相同的 z 变换。

上述 $E(z)$可用 MATLAB 语言予以实现，其中，包括了采样间隔 T，以说明其对变换结果无影响。

求 $E(z)$的 MATLAB 程序如下：

```
>>syms k
ek=1^k;
Ez=ztrans(ek)
```

```
Ez =
z/(z - 1)

>>syms k T
ek=1^(k*T);
Ez=ztrans(ek)

Ez =
z/(z - 1)
```
◀

例 2.3 已知 $e(k)=\mathrm{e}^{-akT}$，求 $E(z)$。可以将 $E(z)$写成如下幂级数的形式：

$$E(z)=1+\mathrm{e}^{-aT}z^{-1}+\mathrm{e}^{-2aT}z^{-2}+\cdots=1+(\mathrm{e}^{-aT}z^{-1})+(\mathrm{e}^{-aT}z^{-1})^{2}+\cdots$$

根据式(2-10)，可将 $E(z)$写成如下闭式形式：

$$E(z)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}},|\mathrm{e}^{-aT}z^{-1}|<1$$

请注意，该例中的$\{e(k)\}$可能采样于函数 $e(t)=\mathrm{e}^{-at}$。

这类 $E(z)$同样可用如下 MATLAB 程序予以实现：

```
>>syms k a T
ek=exp(-a*k*T);
Ez=ztrans(ek)

Ez =
z/(z - exp(-a*T))
```

如同拉普拉斯变换那样，每一个 z 变换都会在复平面上存在一个定义域。如果用积分式求其 z 反变换[5]，这个域就非常重要。不过，若用查表法进行变换和反变换，其定义域的重要性就不那么直接。因此，在进行变换时，一般不谈定义域。◀

2.4　z 变换的性质

下面来探讨 z 变换的一些性质。在分析离散时间系统时将证明这些性质非常有用。

1. 相加和相减

性质： 数字序列和的 z 变换等于数字序列 z 变换的和，即：

$$\mathscr{Z}[e_1(k)\pm e_2(k)]=E_1(z)\pm E_2(z)\tag{2-12}$$

证明： 根据 z 变换的定义，有

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[e_1(k)\pm e_2(k)]&=\sum_{k=0}^{+\infty}[e_1(k)\pm e_2(k)]z^{-k}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}e_1(k)z^{-k}\pm\sum_{k=0}^{+\infty}e_2(k)z^{-k}=E_1(z)\pm E_2(z)\end{aligned}$$

2. 与常数相乘

性质： 数字序列与一个常数乘积的 z 变换等于该常数乘以那个数字序列的 z 变换，即

$$\mathscr{Z}[ae(k)]=a\,\mathscr{Z}[e(k)]=aE(z)\tag{2-13}$$

证明： 根据 z 变换的定义，有：

$$\mathscr{Z}[ae(k)]=\sum_{k=0}^{+\infty}ae(k)z^{-k}=a\sum_{k=0}^{+\infty}e(k)z^{-k}=aE(z)$$

式(2-12)和式(2-13)所述性质构成了 z 变换的线性性质。

例 2.4 z 变换的线性性质也可以证明如下。令

$$e(k)=ae_1(k)+be_2(k)$$

则

$$\mathscr{Z}[e(k)]=\mathscr{Z}[ae_1(k)+be_2(k)]=\sum_{k=0}^{+\infty}[ae_1(k)+be_2(k)]z^{-k}$$

$$=a\sum_{k=0}^{+\infty}e_1(k)z^{-k}+b\sum_{k=0}^{+\infty}e_2(k)z^{-k}=a\mathscr{Z}[e_1(k)]+b\mathscr{Z}[e_2(k)]$$
$$=aE_1(z)+bE_2(z)$$ ◀

3. 实平移

性质： 设 n 为正整数，$E(z)$为$\{e(k)\}$的 z 变换，则

$$\mathscr{Z}[e(k-n)u(k-n)]=z^{-n}E(z) \tag{2-14}$$

及

$$\mathscr{Z}[e(k+n)u(k)]=z^{n}[E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(k)z^{-k}] \tag{2-15}$$

式(2-7)定义的反变换积分对于所有的 $k<0$，有 $e(k)=0$，因此 $e(k)$的 z 变换可表示为：

$$\mathscr{Z}[e(k)]=\mathscr{Z}[e(k)u(k)]$$

式中：$u(k)$是单位离散阶跃函数，

$$u(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ 1, & k\geqslant 0\end{cases}$$

式(2-14)的时间延时函数可以写成：

$$e(k-n)u(k-n)=e(k)u(k)\big|_{k\leftarrow k-n}$$

将式(2-15)的 $e(k)$在时间上向前推进 n 步，得：

$$\mathscr{Z}[e(k)u(k)\big|_{k\leftarrow k+n}]=\mathscr{Z}[e(k+n)u(k+n)]=\mathscr{Z}[e(k+n)u(k)]$$

接下来，我们来证明式(2-14)和式(2-15)。

证明： 根据 z 变换的定义，有

$$\mathscr{Z}[e(k-n)u(k-n)]=e(0)z^{-n}+e(1)z^{-(n+1)}+e(2)z^{-(n+2)}+\cdots$$
$$=z^{-n}[e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+\cdots]=z^{-n}E(z)$$

式(2-14)得证。又因为

$$\mathscr{Z}[e(k+n)u(k)]=e(n)+e(n+1)z^{-1}+e(n+2)z^{-2}+\cdots$$

在上式的等号右侧加减一些相同的项并提取因式 z^n，得：

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[e(k+n)u(k)]=&z^{n}[e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+\cdots+e(n-1)z^{-(n-1)}\\&+e(n)z^{-n}+e(n+1)z^{-(n+1)}+e(n+2)z^{-(n+2)}+\cdots\\&-e(0)-e(1)z^{-1}-e(2)z^{-2}-\cdots-e(n-1)z^{-(n-1)}]\end{aligned}$$

或

$$\mathscr{Z}[e(k+n)u(k)]=z^{n}\left[E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(k)z^{-k}\right]$$

式(2-14)得证。

我们用表 2-1 所示的 3 个数字序列来表明将数字序列位移两个采样周期后的效果，以进一步说明上述性质。由表 2-1 可知，序列 $e(k-2)u(k-2)$未损失掉序列 $e(k)$的任一数据，因此，$e(k-n)u(k-n)$的 z 变换是 $E(z)$的简单函数，而序列 $e(k-2)u(k)$丢掉了序列 $e(k)$的前两个数据，因此，无法将 $e(k+2)u(k)$的 z 变换表示成 $E(z)$的简单函数。

表 2-1 位移性质举例

k	$e(k)$	$e(k-2)$	$e(k+2)$
0	2	0	1.3
1	1.6	0	1.1
2	1.3	2	1.0
3	1.1	1.6	…
4	1.0	1.3	…
…	…	…	…

例 2.5 例 2.3 指出：

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{-akT}] = \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$$

于是

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{-a(k-3)T}u[(k-3)T]] = z^{-3}\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}\right] = \frac{1}{z^2(z-\mathrm{e}^{-aT})}$$

式中：$u(kT)$是离散单位阶跃函数。

再有：

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{-a(k+2)T}u(kT)] = z^2\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}} - 1 - \mathrm{e}^{-aT}z^{-1}\right]$$

下面给出单位离散冲击函数 $\delta(k-n)$的定义：

$$\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k=n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \tag{2-16}$$

也可将该函数称为单位采样函数。根据式(2-16)，单位采样函数的 z 变换为：

$$\mathscr{Z}[\delta(k-n)] = \sum_{k=0}^{+\infty}\delta(k-n)z^{-k} = \delta(k-n)z^{-n} = z^{-n}$$ ◀

4. **复平移**

性质： 若 $e(k)$的 z 变换为 $E(z)$，则：

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{akT}e(kT)] = E(z\mathrm{e}^{-aT}) \tag{2-17}$$

证明： 根据 z 变换的定义，有：

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{akT}e(kT)] &= e(0) + \mathrm{e}^{aT}e(T)z^{-1} + \mathrm{e}^{2aT}e(2)z^{-2} + \cdots \\ &= e(0) + e(T)\,(z\mathrm{e}^{-aT})^{-1} + e(2)\,(z\mathrm{e}^{-aT})^{-2} + \cdots\end{aligned}$$

或

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{akT}e(kT)] = E(z)_{z\leftarrow z\mathrm{e}^{-aT}} = E(z\mathrm{e}^{-aT})$$

例 2.6 已知 $e(kT)=kT$ 的 z 变换 $E(z)=Tz/(z-1)^2$，那么，$kT\mathrm{e}^{akT}$ 的 z 变换为：

$$E(z)\,\Big|_{z\leftarrow z\mathrm{e}^{-aT}} = \frac{Tz}{(z-1)^2}\Big|_{z\leftarrow z\mathrm{e}^{-aT}} = \frac{Tz\mathrm{e}^{-aT}}{(z\mathrm{e}^{-aT}-1)^2} = \frac{T\mathrm{e}^{aT}z}{(z-\mathrm{e}^{aT})^2}$$

这类 $E(z)$同样可用 MATLAB 程序予以实现，即：

```
>>syms a k T
ekT=(k*T)*exp(a*k*T);
Ez=ztrans(ekT)

Ez =
(T*z*exp(T*a))/(z - exp(T*a))^2
```

◀

5. **初值**

性质： 若 $e(k)$的 z 变换为 $E(z)$，则：

$$e(0) = \lim_{z\to+\infty}E(z) \tag{2-18}$$

证明： 因为

$$E(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + \cdots$$

故式(2-18)得证。

6. **终值**

性质： 若 $e(k)$的 z 变换为 $E(z)$，则左极限存在时有：

$$\lim_{n\to+\infty}e(n) = \lim_{z\to1}(z-1)E(z)$$

证明： 因为

$$\mathscr{Z}[e(k+1)-e(k)] = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}e(k+1)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n}e(k)z^{-k}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} [-e(0) + e(1)(1 - z^{-1}) + e(2)(z^{-1} - z^{-2}) + \cdots + e(n)(z^{-n+1} - z^{-n}) + e(n+1)z^{-n}]$$

于是

$$\lim_{z \to 1} [\mathscr{Z}[e(k+1) - e(k)]] = \lim_{n \to +\infty} [e(n+1) - e(0)]$$

再根据实平移性：

$$\mathscr{Z}[e(k+1) - e(k)] = z[E(z) - e(0)] - E(z) = (z-1)E(z) - ze(0)$$

对上式取 $z \to 1$ 的极限，使上两式相等，就可在左极限存在时获得：

$$\lim_{n \to +\infty} e(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)E(z)$$

在第 7 章可以看到，在 $E(z)$的所有极点均位于单位圆内(不包括 $z=1$ 的单位圆)的条件下，这个极限存在。

例 2.7 为了说明 z 变换的初值和终值的性质，现来讨论 $e(k)=1$，$k=0$，1，2，… 的 z 变换。通过例 2.2，已证得：

$$E(z) = \mathscr{Z}[1] = \frac{z}{z-1}$$

运用初值性质，可得：

$$e(0) = \lim_{z \to +\infty} \frac{z}{z-1} = \lim_{z \to +\infty} \frac{1}{1-1/z} = 1$$

因为 $e(k)$的终值存在，可利用终值性质得：

$$\lim_{k \to +\infty} e(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \to 1} (z-1)\left(\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z \to 1} z = 1$$ ◀

至此导出的 z 变换的性质列于表 2-2 中，表中还囊括了其他性质，对它们的推导或者在后文中出现，或者安排为章后习题。请注意，表中的 $e_1(k) * e_2(k)$指卷积运算，将在 2.7 节讨论。

表 2-2　z 变换的性质

时域序列	z 变换
$e(k)$	$E(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k) z^{-k}$
$a_1 e_1(k) + a_2 e_2(k)$	$a_1 E_1(z) + a_2 E_2(z)$
$e(k-n)u(k-n)$；　$n \geqslant 0$	$z^{-n} E(z)$
$e(k+n)u(k)$；　$n \geqslant 1$	$z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(k) z^{-k}\right]$
$e^{akT} e(k)$	$E(ze^{-aT})$
$ke(k)$	$-z \frac{dE(z)}{dz}$
$e_1(k) * e_2(k)$	$E_1(z) E_2(z)$
$e_1(k) = \sum_{n=0}^{k} e(n)$	$E_1(z) = \frac{z}{z-1} E(z)$

初值：$e(0) = \lim_{z \to +\infty} E(z)$

终值：如果 $e(+\infty)$存在，则 $e(+\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)E(z)$

2.5 求 z 变换

表 2-3 列出了一些时间序列的 z 变换。关于更齐全的时域函数和拉普拉斯变换域函数的 z 变换表请见附录Ⅵ，并请注意，表 2-3 所列各项均可利用 MATLAB 语言程序获得。

例 2.8 在这里，我们来证明表 2-3 最后一行给出的 z 变换。此间，同样将采样间隔 T 囊括进来，以说明它对变换结果的影响。

其 MATLAB 程序如下：

```
>> syms a b k
Ez = ztrans(a^k*cos(b*k));
pretty(Ez) % Make it easier to read

      /             z \
   z  | cos(b)  -  -  |
      \             a /
  - --------------------
     /  2                 \
     | z      2 z cos(b)   |
   a |---  -  ----------- + 1|
     |  2          a       |
     \ a                   /
```

表 2-3　z 变换

时域序列	z 变换
$\delta(k-n)$	z^{-n}
1	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\sin(ak)$	$\frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$
$\cos(ak)$	$\frac{z(z-\cos a)}{z^2-2z\cos a+1}$
$a^k\sin(bk)$	$\frac{az\sin b}{z^2-2az\cos b+a^2}$
$a^k\cos(bk)$	$\frac{z^2-az\cos b}{z^2-2az\cos b+a^2}$

表 2-3 中的变换结果是在采样间隔 $T=1$ 的假设下得到的，如果 $T\neq1$，则变换结果应做适当改变。就表中最后一行内容而言，设其 T 为任意值，那么，其 MATLAB 程序如下：

```
>> syms a b k T
Ez = ztrans(a^(k*T)*cos(b*k*T));
pretty(Ez)

            /                z \
         z  | cos(T b)  -  -- |
            |                T |
            \               a /
  - ---------------------------- -
      / 2                          \
   T  | z       2 z cos(T b)        |
  a   | ----  -  ------------ + 1  |
      |  2T            T           |
      \ a             a            /
```

于是，变换关系变为：

$$\mathscr{Z}[a^{kT}\cos(bkT)]=\frac{z^2-a^Tz\cos(bT)}{z^2-2a^Tz\cos(bT)+a^{2T}}$$ ◀

在多数数字控制系统设计应用中，人们习惯在拉普拉斯变换域表达其系统函数，而拉普拉斯变换域函数的 z 变换结果可利用附录Ⅵ获得。利用 z 变换的可加减性，可以首先将拉普拉斯变换域函数表示成部分分式的形式，然后求出每一个分式的 z 变换。

例 2.9 已知 $E(s)=\frac{s^2+4s+3}{s^3+6s^2+8s}$，求其 z 变换。

首先，将 $E(s)$ 展成部分分式：

$$E(s)=\frac{s^2+4s+3}{s^3+6s^2+8s}=\frac{s^2+4s+3}{s(s+2)(s+4)}$$
$$=\frac{0.375}{s}+\frac{0.25}{s+2}+\frac{0.375}{s+4}$$

然后，求上述展开式中各分式的 z 变换：

$$E(z)=0.375\frac{z}{z-1}+0.025\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-2T}}+0.375\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-4T}}$$

设 $T=0.1$，将 $E(z)$ 表示成两个多项式之比：

$$E(z)=0.375\frac{z}{z-1}+0.025\frac{z}{z-0.8187}+0.375\frac{z}{z-0.6703}$$
$$=\frac{z^3-1.658z^2+0.6804z}{z^3-2.489z^2+2.038z-0.5488}$$

还可以利用如下 MATLAB 程序求出 $E(s)$ 的 z 变换：

```
>>T=0.1;
num=[1 4 3];
denom=[1 6 8 0]; % no repeated poles allowed
n=length(denom);
Es=tf(num,denom)
 [r,p,k]=residue(num,denom);
for i=1:1:n-1
pz(i)=exp(p(i)*T);
end
 [numzz,denomz]=residue(r,pz,k);
numz=conv(numzz,[1 0]); % multiply by z
Ez=tf(numz,denomz,T)

Es =
   s^2 + 4 s + 3
 -----------------
 s^3 + 6 s^2 + 8 s

Ez =
     z^3 - 1.658 z^2 + 0.6804 z
 ---------------------------------
 z^3 - 2.489 z^2 + 2.038 z - 0.5488
```

请注意，对于本例，也可以先求得 $e(t)$，再利用 MATLAB 的 z 变换函数求出 $E(z)$：

```
>>T=0.1;
syms s t k z
Es=(s^2+4*s+3)/(s^3+6*s^2+8*s); % As given
et=ilaplace(Es); % Inverse Laplace to time domain
ekT=subs(et,t,k*T); % substitute t=kT
Ez=ztrans(ekT); % Take the z-Transform
pretty(Ez) % Make it easier to read

    3 z                z                  3 z
 --------- + ---------------- + ----------------
 8 (z - 1)   4 (z - exp(-1/5))   8 (z - exp(-2/5))
```

◀

2.6 求解差分方程

求解线性时不变差分方程的基本方法有三。方法一（通常称为经典法）类似于求解线性微分方程的经典法，包括求其特解和通解[6]，这种方法与本章稍后的状态变量讨论中所用方法相似，在此不述；第二种方法为序列法，数字计算机利用这种方法求解差分方程，下面将举例说明之；第三种方法稍后讨论。

例 2.10 已知

$$m(k)=e(k)-e(k-1)-m(k-1),k\geqslant 0$$

式中：

$$e(k)=\begin{cases}1, & k\text{ 为奇数}\\0, & k\text{ 为偶数}\end{cases}$$

且 $e(-1)$ 及 $m(-1)$ 均为 0，求 $m(k)$。

首先，通过求解 $k=0$ 的差分方程，得到 $m(k)$，再依次求 $k=1$，$k=2$，…时的 $m(k)$，即：

$$m(0)=e(0)-e(-1)-m(-1)=1-0-0=1$$
$$m(1)=e(1)-e(0)-m(0)=0-1-1=-2$$
$$m(2)=e(2)-e(1)-m(1)=1-0+2=3$$
$$m(3)=e(3)-e(2)-m(2)=0-1-3=-4$$
$$m(4)=e(4)-e(3)-m(3)=1-0+4=5$$

请注意本例求解过程中的顺序。由此，可解得任一 k 值下的 $m(k)$。不过，面对较大的 k 值，除非利用数字计算机求解，否则，此方法并不实用。就本例而言，$0\leqslant k\leqslant 20$ 时求得方程解的 MATLAB 程序段如下：

```
>>mkminus1 = 0;
ekminus1 = 0;
ek = 1;
for k=0:20
   mk = ek - ekminus1 - mkminus1;
   [k,mk]
   mkminus1 = mk;
   ekminus1 = ek;
   ek = 1 - ek;
end
```

其中，mkminusl 表示 $m(k-1)$，mk 表示 $m(k)$，ekminusl 表示 $e(k-1)$，ek 表示 $e(k)$。前三行对序列赋初值，求解过程开始于第四行，终止于最末行。从第 4 行到第 9 行组成一个循环。第 1 次循环使 $m(k)=m(0)$，第 2 次使 $m(k)=m(1)$，如此往复。

现在来讨论求解线性时不变差分方程的第 3 种方法，这种方法要用到 z 变换。设 $\{e(k)\}$ 已知，其 n 阶差分方程为：

$$\begin{aligned}&m(k)+a_{n-1}m(k-1)+\cdots+a_0m(k-n)\\&=b_ne(k)+b_{n-1}e(k-1)+\cdots+b_0e(k-n)\end{aligned}\tag{2-19}$$

利用 z 变换的实平移性质(见式(2-14))，得：

$$\begin{aligned}&M(z)+a_{n-1}z^{-1}M(z)+\cdots+a_0z^{-n}M(z)\\&=b_nE(z)+b_{n-1}z^{-1}E(z)+\cdots+b_0z^{-n}E(z)\end{aligned}\tag{2-20}$$

我们注意到，通过 z 变换，式(2-19)给出的差分方程已变成式(2-20)所示的代数方程，为求解式中的 $M(z)$，将此代数方程进一步整理成如下形式：

$$M(z)=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\cdots+b_0z^{-n}}{1+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}}E(z)\tag{2-21}$$

对上式进行 z 反变换，即可求得 $m(k)$，下个小节将讨论 z 反变换的通用方法。◀

例 2.11 对于例 2.10 的差分方程：

$$m(k)=e(k)-e(k-1)-m(k-1)$$

利用实平移性质，得其 z 变换为：

$$M(z)=E(z)-z^{-1}E(z)-z^{-1}M(z)$$

即

$$M(z)=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)E(z)$$

因为

$$e(k)=\begin{cases}1, & k\text{ 为奇数}\\0, & k\text{ 为偶数}\end{cases}$$

得：

$$E(z)=1+z^{-2}+z^{-4}+\cdots=\frac{1}{1-z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-1}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)}$$

于是

$$M(z)=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\frac{z^2}{(z-1)(z+1)}=\frac{z^2}{z^2+2z+1}$$

为将 $M(z)$ 展成幂级数的形式，用 $M(z)$ 的分母除其分子：

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+\cdots \\
z^2+2z+1 & z^2 \\
 & \underline{z^2+2z+1} \\
 & -2z-1 \\
 & \underline{-2z-4-2z^{-1}} \\
 & 3+2z^{-1} \\
 & \underline{3+6z^{-1}+3z^{-2}} \\
 & -4z^{-1}-3z^{-2} \\
 & \cdots
\end{array}$$

因此

$$M(z)=1-2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+\cdots$$

下小节讨论由此求得 z 反变换的方法，到时可以看出，此例的 $M(z)$ 经 z 反变换得到的结果与 2.10 例的序列法所得结果相同。◀

至此，我们只涉及了初始条件为 0 的差分方程的求解问题，因此，式(2-21)所展现的仅是对外加激励的响应，为了将式(2-19)的初始条件包括进来，我们用 $k+n$ 置换 k，得：

$$\begin{aligned}&m(k+n)+a_{n-1}m(k+n-1)+\cdots+a_0m(k)\\&=b_ne(k+n)+b_{n-1}e(k+n-1)+\cdots+b_0e(k)\end{aligned}\tag{2-22}$$

根据 z 变换的实平移性质(式(2-15))，有

$$\mathscr{Z}[m(k+i)]=z^i[M(z)-m(0)-m(1)z^{-1}-\cdots-m(i-1)z^{-(i-1)}]\tag{2-23}$$

于是，利用上式可求得式(2-22)的 z 变换，且其解将包含所有的初始条件。可以看出，若所有的初始条件均为 0，则对式(2-22)的 z 变换会和式(2-21)给出的结果相同。由式(2-23)还可看出，对于式(2-22)的 n 阶差分方程而言，其初始条件为 $m(0)$，$m(1)$，$\cdots$，$m(n-1)$。就是说，初始条件这一术语的含义，对差分方程和微分方程来讲是不同的。

2.7 z 反变换

为使通过 z 变换求解差分方程的方法可行，需要确定如何进行 z 反变换。下面，给出 4 种方法。

1. 幂级数法

用幂级数法求解函数 $E(z)$ 的 z 反变换时，应先将 $E(z)$ 表示成两个 z 的多项式之比，然后，将分母划分进分子以得到其幂级数的形式：

$$E(z)=e_0+e_1z^{-1}+e_2z^{-2}+\cdots\tag{2-24}$$

根据 z 变换的定义不难获知，$\{e(k)\}$ 序列中的那些数就是这个幂级数的系数，例 2.11 已说明了这一点，下面再举一例。

例 2.12 已知 $E(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$，求 $e(k)$。

用长除法进行如下运算：

$$
\begin{array}{r}
z^{-1}+3z^{-2}+7z^{-3}+15z^{-4}+\cdots \\
z^2-3z+2\,\big)\overline{\;z\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{z-3+2z^{-1}} \\
3-2z^{-1} \\
\underline{3-9z^{-1}+6z^{-2}} \\
7z^{-1}-6z^{-2} \\
\underline{7z^{-1}-21z^{-2}+14z^{-3}} \\
15z^{-2}-14z^{-3}+\ldots \\
\ldots
\end{array}
$$

因此得

$$
\begin{aligned}
&e(0)=0, \quad e(4)=15 \\
&e(1)=1 \quad \cdots \\
&e(2)=3, \quad e(k)=2^k-1 \\
&e(3)=7 \quad \cdots
\end{aligned}
$$

这是一种特殊情况，即经归纳，可将 $e(k)$ 表示成 k 的函数(例如，$e(k)=2^k-1$)。一般来讲，幂级数法做不到这一点。◀

2. 部分分式展开法

有一种方法与处理拉普拉斯变换后所得式子的方法类似，即将 $E(z)$ 以部分分式的形式展开，然后，利用 z 变换表中的变换对确定其反变换。表 2-3 及附录Ⅵ所提供的 z 变换对可以帮助我们实现这种反变换。在给出部分分式展开法的例子之前，先来探讨这样一个函数：

$$E(z)=\frac{z}{z-a}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\cdots \tag{2-25}$$

站在幂级数的角度来审视这个式子，可知：

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right]=a^k \tag{2-26}$$

式中：$\mathscr{Z}^{-1}[\cdot]$表示 z 反变换。

因为序列 $\{a^k\}$ 是自然指数(见习题 2.3-2)，所以该函数或许是能遇到的最常见的 z 变换。

观察附录Ⅵ的变换表不难发现，它们的分子中均存在一个 z 因子，因此，不妨对 $E(z)/z$ 展成部分分式，以使 $E(z)$ 的分式能与变换表的项相符。

例 2.13 对于例 2-12 的 $E(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$，有：

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

于是

$$\mathscr{Z}^{-1}[E(z)]=\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{-z}{z-1}\right]+\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

根据式(2-26)或表 2-3，可得：

$$e(k)=-1+2^k$$

这一结果与例 2.12 相同。

MATLAB 的实现程序段如下：

```
>>syms k z;
Ez=z/((z-1)*(z-2));
iztrans(Ez,k)

ans =
        2^k - 1
```

再来看函数：

$$E_1(z)=z^{-1}E(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

根据实平移性质式(2-14)，可得 $e_1(k)$：

$$e_1(k)=\mathscr{Z}^{-1}[z^{-1}E(z)]=e(k-1)u(k-1)=[-1+2^{(k-1)}]u(k-1)$$
$$=\begin{cases}0, & k=0\\ -1+2^{(k-1)}, & k\geqslant 1\end{cases}$$

还可以先进行部分分式展开：

$$\frac{E_1(z)}{z}=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{-1}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-2}$$

或

$$E_1(z)=\frac{1}{2}+\frac{-z}{z-1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)z}{z-2}$$

然后进行反变换：

$$e_1(k)=a-1+\left(\frac{1}{2}\right)(2)^k=a-1+(2)^{k-1}$$

式中：

$$a=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=0\\ 0, & k\geqslant 1\end{cases}$$

据表 2-3 知，

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\delta(k)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=0\\ 0, & k\geqslant 1\end{cases}$$

可见，这两种方法获得相同的 $e_1(k)$。

也可以运用如下 MATLAB 程序实现之：

```
>>syms k z;
E1z=1/((z-1)*(z-2));
iztrans(E1z,k)

ans =
   2^k/2 + kroneckerDelta(k, 0)/2 - 1
```

至此讨论的经部分分式进行的 z 反变换是针对存在实极点的函数进行的，当函数含复数极点时，部分分式法所得反变换则包含复数函数，当然，复数函数的和是实函数。有多种方法可帮助我们将反变换表示成实函数。

首先考虑如下实函数：

$$y(k)=Ae^{akT}\cos(bkT+\theta)=\frac{Ae^{akT}}{2}[e^{jbkT}e^{j\theta}+e^{-jbkT}e^{-j\theta}]$$
$$=\frac{A}{2}[e^{(aT+jbT)k}e^{j\theta}+e^{(aT-jbT)k}e^{-j\theta}] \tag{2-27}$$

式中：a 和 b 均为实数。将如下欧拉公式代入式(2-27)：

$$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

根据附录Ⅵ可得该函数的 z 变换为：

$$Y(z)=\frac{A}{2}\left[\frac{e^{j\theta}z}{z-e^{aT+jbT}}+\frac{e^{-j\theta}z}{z-e^{aT-jbT}}\right]$$

$$=\frac{(A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}/2)z}{z-\mathrm{e}^{aT+\mathrm{j}bT}}+\frac{(A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}/2)z}{z-\mathrm{e}^{aT-\mathrm{j}bT}}=\frac{k_1 z}{z-p_1}+\frac{k_1^* z}{z-p_1^*} \tag{2-28}$$

式中：星号上标表示复数共轭。

通常，部分分式展开项的形式如式(2-28)，因此，如果已知式(2-28)中分式的系数 k_1 和极点 p_1，就能通过式(2-28)给出的如下关系求得式(2-27)的离散时间函数：

$$p_1=\mathrm{e}^{aT}\mathrm{e}^{\mathrm{j}bT}=\mathrm{e}^{aT}\angle(bT)\Rightarrow aT=\ln|p_1|;\quad bT=\arg p_1 \tag{2-29}$$

$$k_1=\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{2}=\frac{A}{2}\angle\theta\Rightarrow A=2|k_1|;\quad \theta=\arg k_1 \tag{2-30}$$

可见，实际上只需计算关于极点的 aT 和 bT，以及关于部分分式的 A 和 θ，即可将反变换表示成式(2-27)所示的正弦关系。

例 2.14 求如下函数的 z 反变换：

$$Y(z)=\frac{-3.894z}{z^2+0.6065}=\frac{-3.894z}{(z-\mathrm{j}0.7788)(z+\mathrm{j}0.7788)}$$

$$=\frac{k_1 z}{z-\mathrm{j}0.7788}+\frac{k_1^* z}{z+\mathrm{j}0.7788}$$

在上式两侧共除以 z，算得系数 k_1：

$$k_1=(z-\mathrm{j}0.7788)\left[\frac{-3.894}{(z-\mathrm{j}0.7788)(z+\mathrm{j}0.7788)}\right]_{z=\mathrm{j}0.7788}$$

$$=\left.\frac{-3.894}{z+\mathrm{j}0.7788}\right|_{z=\mathrm{j}0.7788}=\frac{-3.894}{2\times(\mathrm{j}0.7788)}=2.5\angle 90^\circ$$

计算该系数的 MATLAB 程序如下：

```
>>num=[0,0,-3.894]; den=[1,0,.6065]; [r,p,k]=residue(num,den)

r =
    0 + 2.5001i
    0 - 2.5001i
p =
    0 + 0.7788i
    0 - 0.7788i
k =
     [ ]
```

其中，r 为对应于 $Y(z)$ 的极点 p 的留数，且若 $Y(z)$ 的分子阶数高于分母阶数，则 k 不为空。对于 $p_1=\mathrm{j}0.7788$，根据式(2-29)和式(2-30)，可得：

$$aT=\ln|p_1|=\ln(0.7788)=-0.250;\quad bT=\arg p_1=\pi/2$$

$$A=2|k_1|=2\times 2.5;\quad \theta=\arg k_1=\pi/2$$

于是，根据式(2-27)，可得：

$$y(k)=A\mathrm{e}^{akT}\cos(bkT+\theta)$$

$$=5\mathrm{e}^{-0.25k}\cos\left(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{2}\right)=-5\mathrm{e}^{-0.25k}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

上述结果还可通过使用附录Ⅵ求得其 z 变换得以证明。 ◀

3. 反演-公式法

或许求取 z 反变换最常规的方法是反演积分。根据式(2-27)，经复数理论推导，此反演积分为：

$$e(k)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{\Gamma}E(z)z^{k-1}\mathrm{d}z,\quad \mathrm{j}=\sqrt{-1} \tag{2-31}$$

上述表达式为 z 平面上环绕 Γ 的线积分，Γ 是圈住 $E(z)z^{k-1}$ 所有有限极点的任意路径[5,7]。

利用留数理论[7]，借助如下表达式可对式(2-31)所示的积分进行求解：

$$e(k) = \sum_{\text{在}[E(z)z^{k-1}]\text{的极点处}} \mathrm{Res}(E(z)z^{k-1}) \tag{2-32}$$

如果 $E(z)z^{k-1}$ 在 $z=a$ 处有一个简单极点，那么，其留数：

$$(\mathrm{Res}[E(z)z^{k-1}])_{z=a} = (z-a)E(z)z^{k-1}\big|_{z=a} \tag{2-33}$$

如果 $E(z)z^{k-1}$ 在 $z=a$ 处有一个 n-阶极点，那么，其留数：

$$(\mathrm{Res}[E(z)z^{k-1}])_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m E(z)z^{k-1}]\big|_{z=a} \tag{2-34}$$

例 2.15 例 2.12 和例 2.13 用到的函数为：

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

现将这个函数代入式(2-32)和式(2-33)，得：

$$e(k) = \frac{z^k}{z-2}\bigg|_{z=1} + \frac{z^k}{z-1}\bigg|_{z=2} = -1+2^k$$

可以看出，我们得到了与前述方法相同的结果。按照例 2.13 的做法，令

$$E_1(z) = z^{-1}E(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

根据实平移性质，有：

$$e_1(k) = e(k-1)u(k-1) = [-1+2^{(k-1)}]u(k-1)$$

也可以利用反演公式求出 $e_1(k)$，即先列出下式：

$$E_1(z)z^{k-1} = \frac{z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

该式仅在 $k=0$ 时存在 $z=0$ 的极点，于是：

$$e_1(0) = \sum_{z=0,1,2}\left[\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\right)\right] = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$k\geqslant 1$ 时 $e_1(0)$ 的取值可直接利用式(2-32)获得，这部分工作请读者通过习题完成。 ◀

为说明多阶极点的反演公式法，我们再举一例。

例 2.16 如下函数 $E(z)$ 在 $z=1$ 处有一个二阶极点：

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

利用式(2-32)对其进行反变换，得：

$$e(k) = \frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}z^{2-1}}\left[(z-1)^2\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)z^{k-1}\right]\bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^k)\bigg|_{z=1} = k(z^{k-1})\bigg|_{z=1} = k$$

用 MATLAB 执行这一 z 变换的程序如下：

```
>>syms k z;
Ez=z/(z-1)^2;
iztrans(Ez,k)

ans =
     k
```

◀

4. 离散卷积

用于确定 z 反变换的离散卷积法与使用拉普拉斯变换时用到的卷积积分相类似，离散卷积法假设函数 $E(z)$ 可以表示成两函数的乘积，一般来讲，这两个函数较 $E(z)$ 简单些。即

$$E(z) = E_1(z)E_2(z) \tag{2-35}$$

设可以将 $E_1(z)$ 和 $E_2(z)$ 写成幂级数的形式：

$$E(z) = [e_1(0) + e_1(1)z^{-1} + e_1(2)z^{-2} + \cdots]$$

$$[e_2(0)+e_2(1)z^{-1}+e_2(2)z^{-2}+\cdots] \tag{2-36}$$

将它们直接相乘，得：

$$E(z)=e_1(0)e_2(0)+[e_1(0)e_2(1)+e_1(1)e_2(0)]z^{-1}+[e_1(0)e_2(2)+e_1(1)e_2(1)+e_1(2)e_2(0)]z^{-2}+\cdots \tag{2-37}$$

于是得 $e(k)$ 的通用关系为：

$$\begin{aligned} e(k)&=e_1(0)e_2(k)+e_1(1)e_2(k-1)+\cdots+e_1(k)e_2(0) \\ &=\sum_{n=0}^{k}e_1(n)e_2(k-n)=\sum_{n=0}^{k}e_1(k-n)e_2(n) \end{aligned} \tag{2-38}$$

这就是离散卷积和，可用来确定函数 $E(z)=E_1(z)E_2(z)$ 的 z 反变换，其中的 $E_1(z)$ 和 $E_2(z)$ 一开始就具有幂级数的形式。人们通常将卷积记为：

$$e(k)=\mathcal{Z}^{-1}[E_1(z)E_2(z)]=e_1(k)*e_2(k) \tag{2-39}$$

例 2.17 依旧使用例 2.12 的函数 $E(z)$：

$$E(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=E_1(z)E_2(z)$$

并规定：

$$E_1(z)=\frac{z}{z-1}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots$$

$$E_2(z)=\frac{1}{z-2}=z^{-1}+2z^{-2}+2^2z^{-3}+\cdots$$

上述展开式可以通过幂级数法获得，此后，可根据式(2-38)直接形成 $e(k)$。例如：

$$\begin{aligned} e(3)&=\sum_{n=0}^{3}e_1(n)e_2(3-n)=e_1(0)e_2(3)+e_1(1)e_2(2)+e_1(2)e_2(1)+e_1(3)e_2(0) \\ &=(1\times 2^2)+(1\times 2)+(1\times 1)+(1\times 0)=7 \end{aligned}$$

用相同的方法可得 $e(k)$ 的全部数值，通过对这些数值的快速核准可以发现，它们与通过其他反变换法所得结果相一致。对此例执行离散卷积的 MATLAB 程序如下：

```
>> e1 = [1 1 1 1 1 1];
e2 = [0 1 2 4 8 16];
e = conv(e1,e2)

e =
    0 1 3 7 15 31
```

该程序仅直接给出 $e(k)$ 的前 6 个数。◀

2.8 仿真图和信号流图

一个线性时变离散时间系统既可以用差分方程表示，也可以用传递函数表示，一般来讲还有第三种表示方式，就是仿真图(有时称为框图)，下面就来介绍这种离散时间系统的表示方式。

对于由线性差分方程描述的系统来说，首先需要构建仿真图使用的基本元件。设图 2-2a 所示框图表示的是一个位移寄存器。一个数移入该寄存器并当即存储于其中，经 T 秒移出该寄存器。也就是说，如果 $e(k)$ 是 $t=kT$ 时移入寄存器的数，那么，从该寄存器移出的数就是 $e(k-1)$，我们用图 2-2b 给出的元件符号来表示这一记忆装置，实际上，该符号可以表示执行上述操作的任一装置。将这些元件互联，再协同乘系数的元件以及求和元件，就可描述出一个线性时不变差分方程。例如，对于例 2.10用到的差分方程：

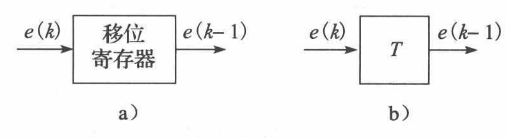


图 2-2　理想时延元件

$$m(k) = e(k) - e(k-1) - m(k-1) \tag{2-40}$$

其仿真图如图 2-3 所示，我们对图中求和元件的输出端列写方程，即可得到式(2-40)。

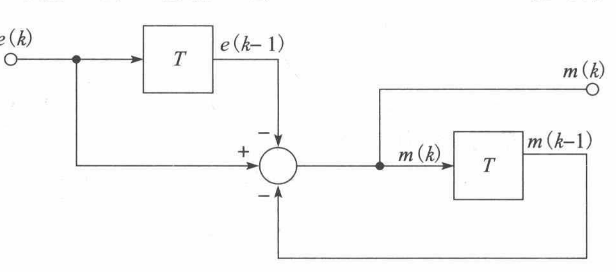


图 2-3 例 2.10 使用的差分方程仿真图

可以构建电子装置来执行图 2-3 中的各项操作。假设这些装置以及由它们搭建的(求解机器)结构是存在的，用它来求解例 2.10。先设其中的两个移位寄存器输出为 0，此后输入 $e(k)$，当 $Tk=0$，$2T$，$4T$，…时，$e(k)=1$，而当 $kT=T$，$3T$，$5T$，…时，$e(k)=0$，则在输出端可得 $t=kT$ 时的解 $m(k)$(读者可以计算 $m(k)$前面的几个数来说明仿真图的有效性)。这个求解机器可以是一台专用计算机，专用于求解差分方程式(2-40)。再回看一下例 2.10 给出的计算机程序，该程序同样可以求解这个差分方程，但所使用的是通用计算机，即用通用计算机软件编写数字寄存器、存储器等，来执行由图 2-3 描绘的那些操作。

为使上面给出的专用计算机包括非 0 初始条件，我们用 $k+1$ 置换式(2-40)和图 2-3 中的 k：

$$m(k+1) = e(k+1) - e(k) - m(k)$$

然后，将 $e(0)$和 $m(0)$分别置于图 2-3 的寄存器之中，此时，两寄存器的输出分别为 $e(k)$和 $m(k)$，在图 2-3 所示的输入端，输入 $e(1)$，$e(2)$，…，在输出端就会出现 $m(1)$，$m(2)$，…。

回忆一下连续系统的模拟仿真，那里的基本元素是积分器，而离散系统仿真用到的基本元素则是 T 秒时延(记忆)器。

与框图稍有不同但等价的差分方程的图形表示是信号流图。诸如图 2-3 给出的框图是一个方程或一组方程的图形表示，信号流图也可以用来图形表示这些方程。信号流图的基本元素是链支和节点。根据定义，链支的输出是链支的增益(传递函数)乘以链支的输入，如图 2-4 所示，该图给出了用框图和链支表示的流图。再者就是流图中节点信号等于链到该节点的所有链支信号的和，同样如图 2-4 所示。信号流图与框图所涵盖的信息完全相同。

再次审视图 2-2b 所示的时延单元，其输入 $e(k)$的 z 变换为 $E(z)$，输出 $e(k-1)$的 z 变换为 $z^{-1}E(z)$，于是，时延单元的传递函数为 z^{-1}(积分器的传递函数是 s^{-1})。再审视图 2-3 所示系统，其流图如图 2-5 所示。该系统的传递函数既可以由图 2-3 经框图简约获得，也可以由图 2-5 用梅森增益公式获得。不熟悉梅森增益公式的读者可查阅附录Ⅱ。总的来讲，这个增益公式以流图的几何结构及信号流向为基础。由于信号流图的结构与框图的结构完全相同，梅森增益公式也可以直接用到框图上。

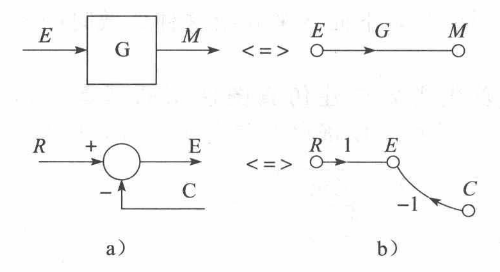


图 2-4 相互等效的框图和信号流图符号

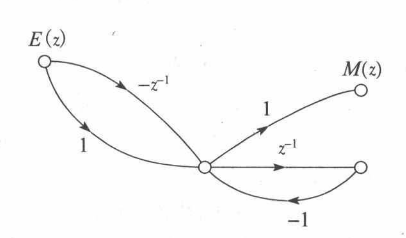


图 2-5 图 2-3 所示系统的信号流图

将梅森增益公式用于图 2-5 所示流图，可得传递函数为：

$$\frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{z-1}{z+1}$$

这与例 2.11 所得结果相同。

接下来，考虑 n 阶差分方程：

$$m(k)+a_{n-1}m(k-1)+\cdots+a_0m(k-n)$$
$$=b_ne(k)+b_{n-1}e(k-1)+\cdots+b_0e(k-n) \tag{2-41}$$

对其进行 z 变换，得：

$$M(z)+a_{n-1}z^{-1}M(z)+\cdots+a_0z^{-n}M(z)$$
$$=b_nE(z)+b_{n-1}z^{-1}E(z)+\cdots+b_0z^{-n}E(z) \tag{2-42}$$

其传递函数为：

$$\frac{M(z)}{E(z)}=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\cdots+b_0z^{-n}}{1+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}} \tag{2-43}$$

式(2-41)描述的系统可以表示为图 2-6a 所示仿真图，图中求和单元的信号输出满足式(2-41)。该图的信号流图如图 2-6b 所示，将梅森增益公式应用于该流图即可得式(2-43)。

图 2-6 所示仿真图只是为表示传递函数式(2-43)所构建的多种图形表示中的一种，它是一种非最小的表示，图 2-3 所示的也是非最小的表示，因为图中使用了 $2n$ 个时延单元。仅用 n 个时延单元就可表示 n 阶系统。图 2-3 所示系统的最小表示如图 2-7 所示，用梅森增益公式计算传递函数可以证明这个最小表示。这就带出了离散系统状态变量的议题，这个议题与仿真图紧密相关，接下来，我们就致力于这个议题的讨论。

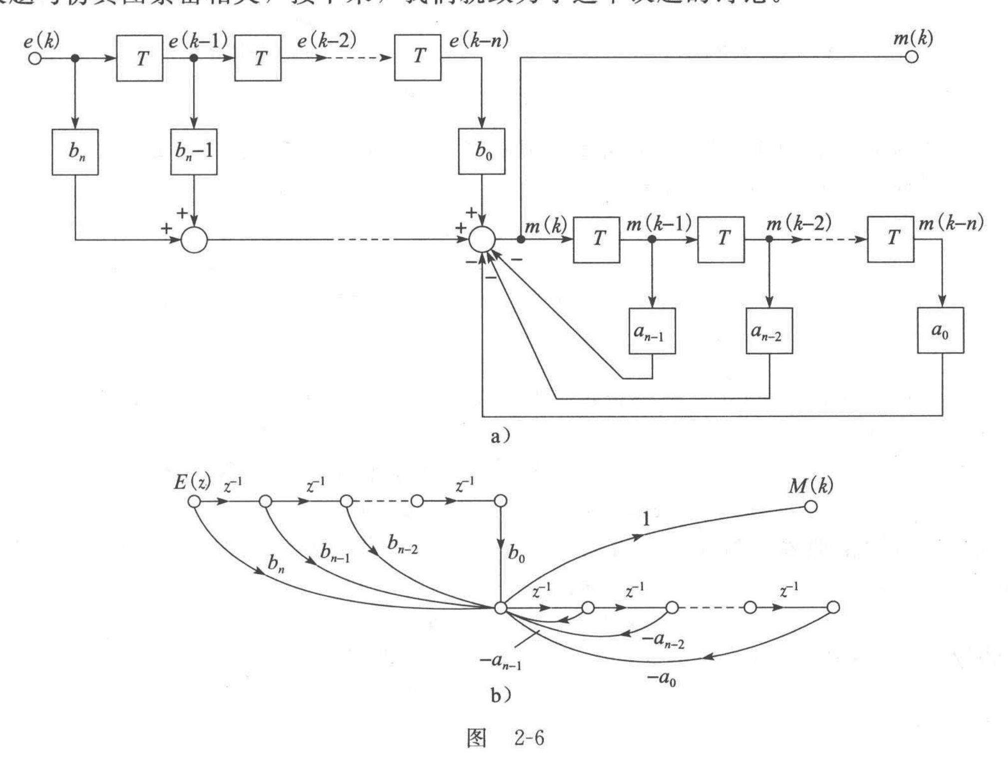


图　2-6

2.9　状态变量

在前几个小节中，我们限定离散时间系统可以用差分方程来描述。如果离散系统是线性时不变的，这个系统也可以用传递函数来表示。对于线性时不变离散系统而言，若输入为 $E(z)$、输出为 $M(z)$、传递函数为 $G(z)$，便可以像 2.8 节那样写出关系式：

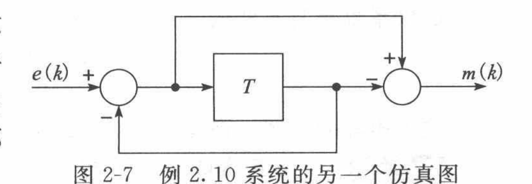


图 2-7　例 2.10 系统的另一个仿真图

$$M(z) = G(z)E(z) \tag{2-44}$$

于是，离散时间系统可以用图 2-8a 所示的框图来表示。

状态变量法通常被认为是设计及综合离散时间系统的更现代方法。该方法所建立的系统模型如图 2-8b 所示。出于通用性的考虑，必须允许系统具有多个输入且具有多个输出，于是，图 2-8b 所示模型中，$u_i(k)$，$k=1$，…，r 为驱动系统工作的外部输入，变量 $y_i(k)$，$i=1$，…，p 是系统输出或系统响应，变量 $x_i(k)$，$k=1$，…，n 是系统内部的变量（状态变量）。状态变量代表最小量的信息，对于给定的输入函数，有必要用这些信息来确定未来状态和系统输出，即如果给定系统状态、动力学的系统描述函数以及系统的输入，随后的系统状态与系统输出就能确定下来。

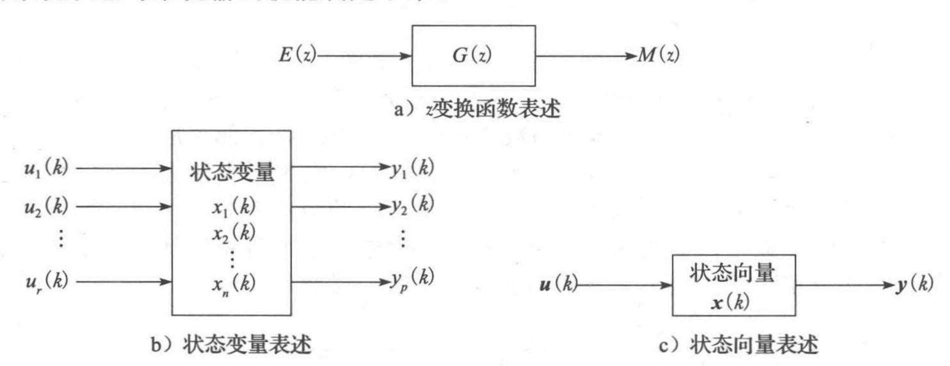


图 2-8　系统动力学表述

为方便起见，我们用 2-8c 所示向量来表示图 2-8b 所示系统，图中，$\boldsymbol{u}(k)$是输入向量、$\boldsymbol{y}(k)$是输出向量、$\boldsymbol{x}(k)$是状态向量：

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

可以将输入向量 $\boldsymbol{u}(k)$的一组设定数值称为系统的输入空间，同理可以给出输出空间和状态空间的定义。

一般来讲，在任意$(k+1)$时间，描述系统状态的方程为单值函数关系

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)] \tag{2-45}$$

该方程可简单地表述为$(k+1)$时的状态 $\boldsymbol{x}$ 是 k 时的状态及输入的函数，系统输出响应用类似的方法定义为：

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)] \tag{2-46}$$

遵照前面的约定，所谈论的时间 k 实际上是指时间 kT。

如果系统是线性的，便可将式(2-45)和式(2-46)简写为如下形式：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2-47}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2-48}$$

式中：$\boldsymbol{x}(k)$是 n 维向量；$\boldsymbol{u}(k)$是 r 维向量；$\boldsymbol{y}(k)$是 p 维向量；$\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{B}(k)$、$\boldsymbol{C}(k)$和 $\boldsymbol{D}(k)$分别是 $n\times n$、$n\times r$、$p\times n$、$p\times r$ 阶矩阵。

如果系统是时不变的，式(2-47)和式(2-48)可进一步简写为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-49}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-50}$$

关于矩阵的讲述，请参见附录Ⅳ。下面，我们通过例题来讨论基于状态变量的建模问题。

例 2.18 已知系统的差分方程：

$$y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$$

求该系统的状态变量模型。

设

$$x_1(k) = y(k)$$
$$x_2(k) = x_1(k+1) = y(k+1)$$

则

$$x_2(k+1) = y(k+2) = u(k) + 1.7x_2(k) - 0.72x_1(k)$$

或写成：

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -0.72x_1(k) + 1.7x_2(k) + u(k)$$
$$y(k) = x_1(k)$$

将上述整理成式(2-49)和式(2-50)那样的向量-矩阵形式：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.72 & 1.7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = (1 \quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$ ◀

式(2-49)和式(2-50)是线性时不变系统的状态方程，通常作为用现代方法分析设计离散系统的基点。让我们先来分析该方法与 z 变换法之间的联系，为此，从 z 域传递函数入手，推导离散状态变量方程组。

给定传递函数：

$$G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \tag{2-51}$$

该传递函数分子的阶数小于分母的阶数，可以将此式写成：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \frac{E(z)}{E(z)} \tag{2-52}$$

请注意，式中引入了辅助变量 $E(z)$。再令：

$$Y(z) = (b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0)E(z) \tag{2-53}$$

$$U(z) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)E(z) \tag{2-54}$$

请回忆一下 z 变换的实平移性，可有如下的变换关系：

$$E(z) \rightarrow e(k)$$
$$zE(z) \rightarrow e(k+1)$$
$$z^2 E(z) \rightarrow e(k+2)$$
$$\vdots$$

再定义状态变量：

$$x_1(k) = e(k)$$
$$x_2(k) = x_1(k+1) = e(k+1)$$
$$x_3(k) = x_2(k+1) = e(k+2)$$
$$\vdots$$
$$x_n(k) = x_{n-1}(k+1) = e(k+n-1) \tag{2-55}$$

由式(2-54)和式(2-55)，即可得到状态方程：

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = x_3(k)$$
$$x_3(k+1) = x_4(k)$$
$$\vdots$$
$$x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - a_2 x_3(k) - \cdots - a_{n-1}x_n(k) + u(k) \tag{2-56}$$

将以上状态方程写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \tag{2-57}$$

或简写为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-58}$$

由式(2-53)得其输出方程为：

$$\boldsymbol{y}(k) = (b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \tag{2-59}$$

将其简记为：

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \tag{2-60}$$

至此，由式(2-58)和式(2-60)给出的就是式(2-51)所述离散时间系统的状态方程组。

离散系统的另一个方便且有用的表述方式是信号流图或等效仿真图，这两种方式可由式(2-52)推出：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{-1} + b_{n-2}z^{-2} + \cdots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}} \frac{E(z)}{E(z)} \tag{2-61}$$

由式(2-61)可得如下两式：

$$Y(z) = (b_{n-1}z^{-1} + b_{n-2}z^{-2} + \cdots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n})E(z) \tag{2-62}$$

$$U(z) = (1 + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n})E(z) \tag{2-63}$$

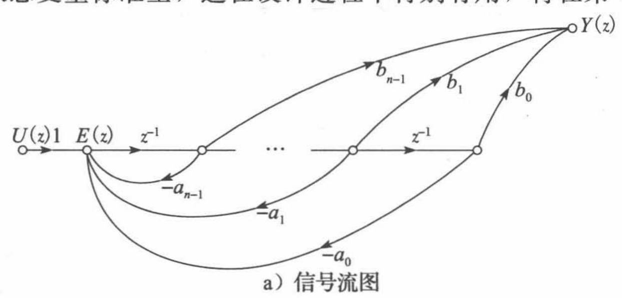
将式(2-63)写成：

$$E(z) = U(z) - a_{n-1}z^{-1}E(z) - \cdots - a_1 z^{1-n}E(z) - a_0 z^{-n}E(z) \tag{2-64}$$

借助式(2-62)和式(2-64)容易导出式(2-51)所示系统的信号流图，如图 2-9a 所示。

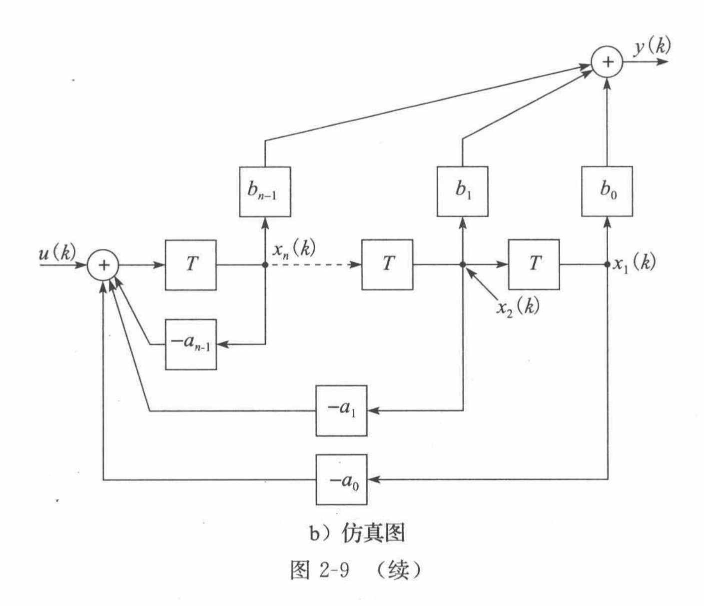
回想一下时延(T 秒)单元的传递函数是什么？是 z^{-1}。其中，T 是离散的时间间隔，即采样时刻 k，$k+1$，$k+2$，…之间的间隔。利用这一关系，可即刻将图 2-9a 所示的信号流图转换成与其等效的仿真图，如图 2-9b 所示。由式(2-57)、式(2-59)看到，状态是寄存器的输出，如同图 2-9b 所标注的。

请注意到在式(2-57)、式(2-59)与图 2-9b 之间所存在的关系。一旦了解了方程与图之间的对应关系，便可以从传递函数推导出信号流图或仿真图。根据信号流图，人们可以利用梅森增益公式恢复出原本的传递函数。图 2-9 所示的流图连同式(2-57)和式(2-59)即可称为可控标准型，也可称为状态变量标准型，这在设计过程中特别有用，将在第 9 章、第 11 章讨论。



a）信号流图

图 2-9　对式(2-51)用等效的可控标准型(或状态变量标准型)表示



b）仿真图

图 2-9　（续）

在设计过程中(第 9 章)，还有一种标准型非常有用，称为可观标准型，如图 2-10 所示。请注意，利用梅森增益公式可得式(2-61)，它是图 2-10 所示的传递函数。

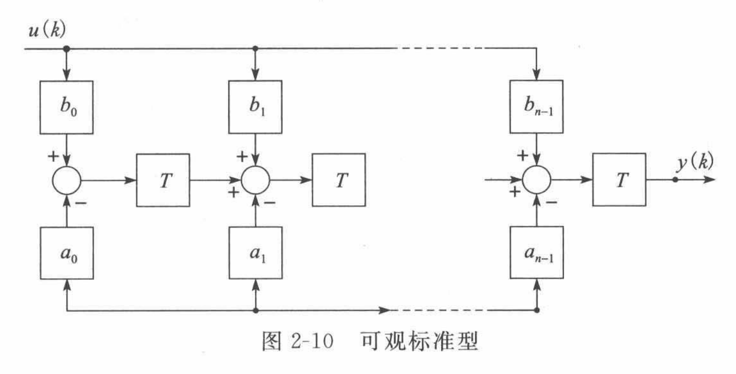


图 2-10　可观标准型

例 2.19　已知系统传递函数：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2+2z+1}{z^3+2z^2+z+\dfrac{1}{2}}$$

请推导其信号流图及对应的状态方程。

将该传递函数与式(2-51)及图 2-9a 所示流图进行观察对比，便可得其信号流图如图 2-11 所示。请注意，时延单元的输出选作系统状态，根据图 2-11 所示流图，或通过与式(2-51)、式(2-57)和式(2-59)给出的传递函数进行对比，均可导出其状态方程，即：

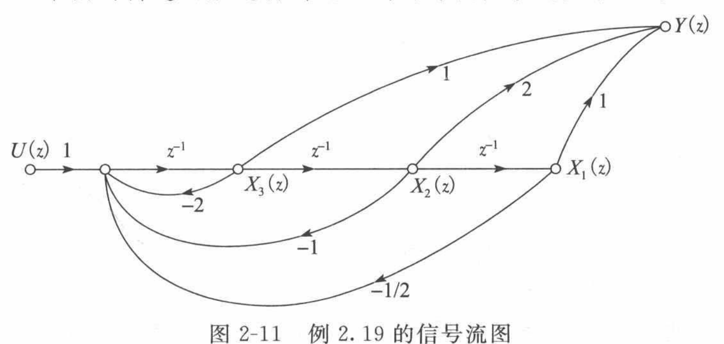


图 2-11　例 2.19 的信号流图

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = (1 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

◀

从传递函数到状态方程有一个显著特征，来看下例。

例 2.20 已知系统传递函数为：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

试推导其状态方程。

本例传递函数分子、分母的阶数相同。我们先将其改写为：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \frac{E(z)}{E(z)}$$

根据梅森增益公式，得该传递函数的信号流图如图 2-12 所示，图中的状态方程为：

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(k)$$

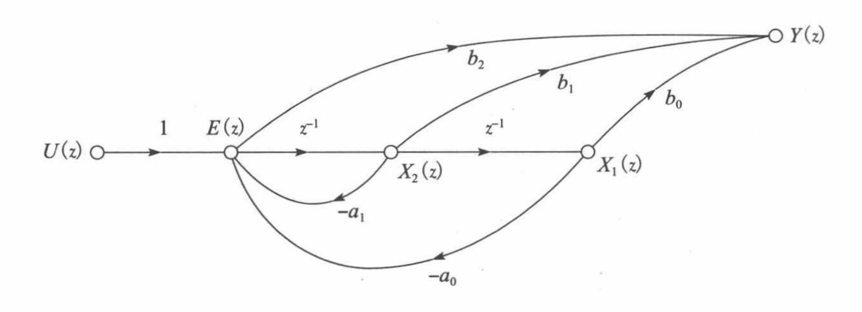


图 2-12　例 2-20 的信号流图

我们注意到，图 2-12 所示的信号流图与前面见到的信号流图的形式略有不同，这一点很重要，该图中，有一条路径从 $E(z)$ 直通到 $Y(z)$，根据此流图，输出方程为：

$$Y(z) = b_0 X_1(z) + b_1 X_2(z) + b_2 E(z)$$

而

$$E(z) = U(z) - a_0 X_1(z) - a_1 X_2(z)$$

由此可得

$$Y(z) = b_2 U(z) + (b_0 - b_2 a_0) X_1(z) + (b_1 - b_2 a_1) X_2(z)$$

输出方程为：

$$\boldsymbol{y}(k) = ((b_0 - b_2 a_0) \quad (b_1 - b_2 a_1)) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + b_2 u(k)$$

请注意上式与式(2-59)的区别。 ◀

只要传递函数分子、分母的阶数相同，就应该将其改写成上例的形式，之后，观察图 2-12所示的流图，即可写出输出方程。

例 2.21 多变量离散时间系统如图 2-13 所示，试推导其状态方程。

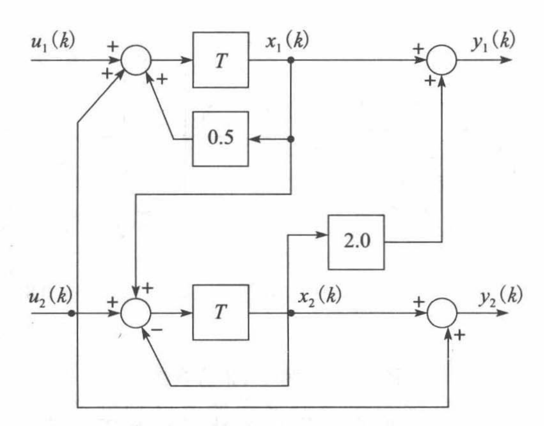


图 2-13 多变量系统仿真图

观察如图 2-13 所示仿真图，可直接写出其状态方程为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

综上，可经由式(2-52)到式(2-59)各步，从传递函数导出状态模型。再一种方法则是：

1) 使用任一种便利的方法，画出系统的仿真图；

2) 为图中每一个时延单元的输出指定一个状态变量；

3) 写出每一个时延单元输入关于时延单元输出的方程，以及系统输出关于系统输入的方程。

系统传递函数描述的是系统输入输出关系，而状态模型在给出系统输入输出关系描述之外，还给出了系统的内部关系描述。系统的传递函数是唯一的，而状态模型则不然。

2.10 其他状态变量公式

上一节，我们讨论了在系统差分方程或传递函数已知的前提下如何得到单输入单输出离散时间系统状态变量方程的方法。对于一个给定的系统，其状态变量方程不是唯一的，对于一个给定的传递函数，其随便一个仿真图便可产生一个有效的系统状态变量模型。然而，针对某一分析和设计过程，诸如后面章节内容要讨论的，某些方程形式将在计算效率上显现优势，这里，先通过一个例子说明这一点。

例 2.22 来考虑例 2.18 的差分方程：

$$y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$$

那时，我们导出了它的一个状态变量模型。此处，我们来推导它的另外两个状态变量模型。对差分方程作 z 变换，得其传递函数为：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.7z + 0.72}$$

将此传递函数改写成如下形式：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \left[\frac{1}{z-0.9}\right]\left[\frac{1}{z-0.8}\right]$$

从这个传递函数得到仿真图如图 2-14a 所示。借助此图，可写出状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = (1 \quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

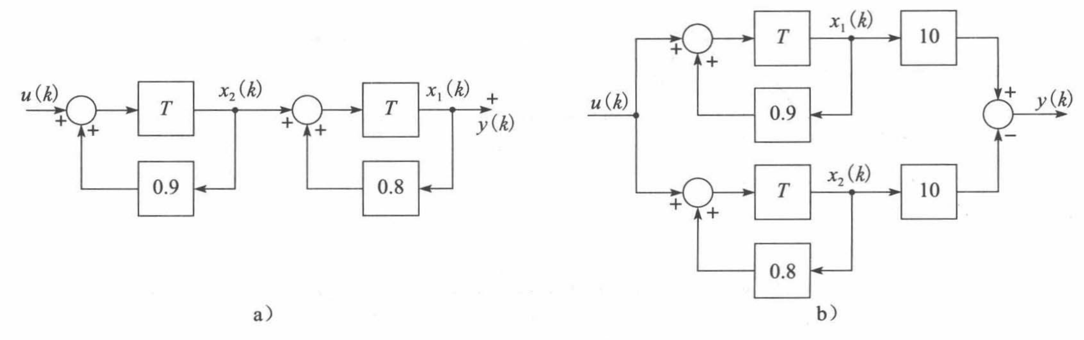


图 2-14　例 2.22 仿真图

另外，利用部分分式法，还可将系统传递函数写成如下形式：

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{10}{z-0.9}+\frac{-10}{z-0.8}$$

从这个传递函数得到的仿真图如图 2-14b 所示。借助此图，可写出状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.8\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(10\quad -10)\boldsymbol{x}(k)$$ ◀

在例 2.22 中，我们先将高阶传递函数写成多个简单传递函数的乘积。一般地，可以将传递函数 $G(z)$写成

$$G(z)=G_{1_c}(z)G_{2_c}(z)\cdots G_{n_c}(z) \tag{2-65}$$

每一个简单传递函数 G_{i_c} 可用前述方法实现，然后将这些简单传递函数的实现级联起来即可实现 $G(z)$。如果 $G(z)$同时含有复数极点和复数零点，我们就把式(2-65)中的一些 $G_{i_c}(z)$选为二阶的，以避开因状态变量矩阵含有复数而造成的计算困难。

接下来，又通过部分分式展开，把高阶传递函数写成简单传递函数的和。一般地，可以将传递函数 $G(z)$写成

$$G(z)=G_{1_p}(z)+G_{2_p}(z)+\cdots+G_{n_p}(z) \tag{2-66}$$

每一个简单传递函数 $G_{i_p}(z)$可用 2.9 节方法实现，然后将这些简单传递函数的实现并联起来即可实现 $G(z)$。

我们看到，对于一个离散时间系统，三种方法可得到各自不同的状态模型，这些模型均从该系统的传递函数导出。事实上，给定一个状态模型，通过相似变换，我们就能导出任意数量的各不相同的状态模型。下面来介绍其方法。我们来看如下形式的状态方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{Cx}(k)+\boldsymbol{Du}(k)\end{aligned} \tag{2-67}$$

可以应用线性变换：

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{Pw}(k) \tag{2-68}$$

即

$$x_1(k)=p_{11}w_1(k)+p_{12}w_2(k)+\cdots+p_{1n}w_n(k)$$

式中：$\boldsymbol{P}$ 是 $n\times n$ 阶常数矩阵；$\boldsymbol{w}(k)$则是一个新的状态向量。

请注意，此时，$\boldsymbol{P}$ 必须可逆，即 $\boldsymbol{P}^{-1}$存在，以能由 $\boldsymbol{x}(k)$求得 $\boldsymbol{w}(k)$。

将式(2-68)代入式(2-67)，得方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}(k+1)&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APw}(k)+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Bu}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{CPw}(k)+\boldsymbol{Du}(k)\end{aligned} \tag{2-69}$$

改写成：

$$\boldsymbol{w}(k+1)=\boldsymbol{A}_w\boldsymbol{w}(k)+\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_w\boldsymbol{w}(k)+\boldsymbol{D}_w\boldsymbol{u}(k) \tag{2-70}$$

式中：

$$\boldsymbol{A}_w=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP},\boldsymbol{B}_w=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{C}_w=\boldsymbol{CP},\quad \boldsymbol{D}_w=\boldsymbol{D} \tag{2-71}$$

于是，对于不同的 $\boldsymbol{P}$，只要其逆 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 存在，就可求得给定系统的不同状态模型。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程借助行列式定义如下：

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0 \tag{2-72}$$

矩阵的特征值是如上特征方程的根，即如果

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=0 \tag{2-73}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 z_i。式(2-73)可用来确定式(2-67)系统的稳定性，这个问题留在第 7 章讨论。需要注意的是，线性变换并不改变系统矩阵的特征方程：

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_w|=|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|=|z\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{IP}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|$$
$$=|\boldsymbol{P}^{-1}||z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| \tag{2-74}$$

线性变换：

$$\boldsymbol{A}_w=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} \tag{2-75}$$

又称为相似变换，具有如下性质。

1）如上所述，线性变换不改变矩阵的特征值。

2）$\boldsymbol{A}_w$ 的行列式等于 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，等于特征值的乘积：

$$|\boldsymbol{A}_w|=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|=z_1z_2\cdots z_n$$

3）$\boldsymbol{A}_w$ 的迹等于 $\boldsymbol{A}$ 的迹：

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_w=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=z_1+z_2+\cdots+z_n$$

这是因为矩阵的迹等于其对角元素之和，因此也就等于其特征值之和。下一个性质可由性质 1 得到。

4）像 2.11 节所表述的

$$\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}_w[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_w]^{-1}\boldsymbol{B}_w+\boldsymbol{D}_w$$

例 2.23 例 2.22 给出的状态变量模型之一是：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0.8 & 1\\ 0 & 0.9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$
$$y(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

任意选择一个线性变换矩阵：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{P}$ 的逆：

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{[\mathrm{cof}[\boldsymbol{P}]]^{\mathrm{T}}}{|\boldsymbol{P}|}$$

式中：$[\cdot]^{\mathrm{T}}$ 表示转置；$\mathrm{cof}[\boldsymbol{P}]$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 的伴随矩阵。

于是

$$\mathrm{cof}[\boldsymbol{P}]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$
$$|\boldsymbol{P}|=2$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

根据式(2-71)

$$A_w = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.35 & 0.55 \\ -0.45 & 0.35 \end{pmatrix}$$

$$B_w = P^{-1}B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$C_w = CP = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad -1)$$

于是得到新状态方程：

$$w(k+1) = \begin{pmatrix} 1.35 & 0.55 \\ -0.45 & 0.35 \end{pmatrix} w(k) + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1 \quad -1)\, w(k)$$

注意到：

$$|zI - A| = \begin{vmatrix} z-0.8 & -1 \\ 0 & z-0.9 \end{vmatrix} = z^2 - 1.7z + 0.72 = (z-0.8)\times(z-0.9)$$

$$|zI - A_w| = \begin{vmatrix} z-1.35 & -0.55 \\ 0.45 & z-0.35 \end{vmatrix} = z^2 - 1.7z + 0.72$$

因此解得特征值为 $z_1=0.8$，$z_2=0.9$，且：

$$|A| = |A_w| = 0.72 = z_1 z_2$$

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A_w = 1.7 = z_1 + z_2$$

上述结果可用 MATLAB 程序加以证明。 ◀

MATLAB 程序还可通过相似变换，求得其他的状态空间方程，下面来看一个三阶的例子。

例 2.24 对于给定的传递函数：

$$G(z) = \frac{5z^2 + 10.5z + 5.8}{z^3 + 1.1z^2 + 0.5z + 0.12}$$

通过观察，利用式(2-57)和式(2-59)，可以写出其可控标准型矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.12 & -0.5 & -1.1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (5.8 \quad 10.5 \quad 5)$$

任选矩阵 P：

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

通过 MATLAB 程序可证明 P 可逆，将其用于式(2-71)中，可求得一个新的状态方程。MATLAB 程序如下：

```
>>A=[0 1 0;0 0 1;-.12 -.5 -1.1];
B=[0 0 1]';
C=[5.8,10.5,5];
D=0;
P=[3 8 4;0 7 5;9 6 2];
invP=inv(P)
```

```
Aw=inv(P)*A*P
Bw=inv(P)*B
Cw=C*P
Dw=D

  invP =
   -0.2667  0.1333  0.2000
    0.7500 -0.5000 -0.2500
   -1.0500  0.9000  0.3500

  Aw =
   -0.8520 -3.2787 -2.1027
   -1.9350  5.0150  4.0450
    4.5090 -5.8210 -5.2630

  Bw =
    0.2000
   -0.2500
    0.3500

  Cw =
   62.4000 149.9000 85.7000

  Dw =
   0
```

如果系统的特征值互不相同，便可导出一个状态变量模型，这时系统矩阵是对角矩阵。设有向量 $\boldsymbol{m}_i$ 和标量 z_i 满足如下关系：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_i = z_i\boldsymbol{m}_i \tag{2-76}$$

式中：$\boldsymbol{m}=(m_{1i} \quad m_{2i} \quad \cdots \quad m_{ni})^{\mathrm{T}}$。可将式(2-76)写成：

$$(z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{m}_i = 0$$

若这个等式存在一个非平凡解，则要求：

$$|z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = 0$$

根据式(2-72)可知，z_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并称 $\boldsymbol{m}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。根据式(2-76)可构建出下述方程：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{m}_n) = (\boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{m}_n)\begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & z_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & z_n \end{pmatrix}$$

或写成

$$\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{M\Lambda}$$

式中：$\boldsymbol{M}$ 为模型矩阵，特征向量是其列向量；$\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵，特征值是其对角元素。

特征值互不相同时，特征向量便是线性无关的。因此有：

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{AM} \tag{2-77}$$

于是，经过常规的线性变换，$\boldsymbol{P}$ 等于模型矩阵 $\boldsymbol{M}$。下面给出一例来说明这种方法。

例 2.25 对于例 2.23 给定的系统：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = (1 \quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

已求出特征值为 $z_1=0.8$，$z_2=0.9$。根据式(2-76)有：

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix} = 0.8\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix}$$

于是

$$0.8m_{11}+m_{21}=0.8m_{11}$$
$$0.9m_{21}=0.8m_{21}$$

可见 $m_{21}=0$，m_{11}取任意值。取 $m_{11}=1$。再根据式(2-76)有：

$$\begin{pmatrix}0.8 & 1\\0 & 0.9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{12}\\m_{22}\end{pmatrix}=0.9\begin{pmatrix}m_{12}\\m_{22}\end{pmatrix}$$

可见 m_{22}取任意值。取 $m_{22}=1$，则 $m_{12}=10$。模型矩阵及其逆分别为：

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -10\\0 & 1\end{pmatrix}$$

根据式(2-71)和式(2-77)，有：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0.8 & 0\\0 & 0.9\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_w=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_w=\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}=(1\quad 10)$$

至此得一新状态模型如下：

$$\boldsymbol{w}(k+1)=\begin{pmatrix}0.8 & 0\\0 & 0.9\end{pmatrix}\boldsymbol{w}(k)+\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 10)\boldsymbol{w}(k)$$

算得特征向量和特征值的 MATLAB 程序如下：

```
>> A = [0.8 1; 0 0.9];
[M,LAMBDA] = eig(A)

M =
 1.0000     0.9950
 0          0.0995

LAMBDA =
 0.8000     0
 0          0.9000
```

其中，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的列给出的是特征向量，矩阵 LAMBDA 的对角线元素是特征值。◀

接下来，来证明用 MATLAB 程序可产生一个新的状态空间表示，其中，$\boldsymbol{A}_w=\boldsymbol{\Lambda}$。

例 2.26 对于传递函数：

$$G(z)=\frac{10z-5}{z^3-2.1z^2+1.4z-0.288}$$

可根据式(2-57)写出其状态矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0.288 & -1.4 & 2.1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=(-5\quad 10\quad 0),\quad \boldsymbol{D}=(0)$$

可用 MATLAB 程序计算式(2-71)，其中，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}$：

该 MATLAB 程序如下：

```
>>A=[0 1 0;0 0 1;0.288 -1.4 2.1];
B=[0 0 1]';
C=[-5 10 0];
D=0;
[M,LAMBDA]=eig(A);
P=M
Aw=inv(P)*A*P
Bw=inv(P)*B
Cw=C*P
Dw=D

P =
  -0.9184 -0.6985 -0.6368
  -0.3674 -0.5588 -0.5731
  -0.1469 -0.4470 -0.5158

Aw =
    0.4000  0.0000 0.0000
    0.0000  0.8000 0.0000
  -0.0000 -0.0000 0.9000

Bw =
   -5.4443
   35.7911
  -31.4076

Cw =
 0.9184 -2.0955 -2.5472

Dw =
 0
```

◀

2.11　传递函数

前面讲述了从系统的传递函数获得系统状态模型的方法，现在来谈如何从系统的状态模型获得其传递函数。

方法 1：对给定的离散时间系统的状态方程，构建其仿真图，再根据梅森增益公式，从仿真图获得系统的传递函数。

例 2.27　使用例 2.23 导出的状态模型：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1.35 & 0.55\\ -0.45 & 0.35\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.5\\ 0.5\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad -1)\boldsymbol{x}(k)$$

由上述状态方程构建的仿真图如图 2-15 所示。

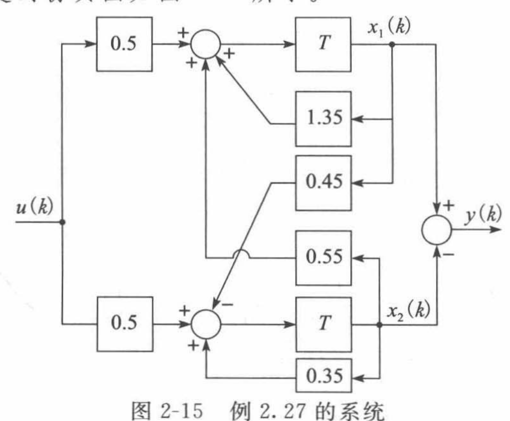


图 2-15　例 2.27 的系统

对该图应用梅森增益公式，得到该系统的传递函数为：

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{0.5z^{-1}(1-0.35z^{-1})-0.5z^{-1}(1-1.35z^{-1})+(0.5\times 0.45)z^{-2}+(0.5\times 0.55)z^{-2}}{1-1.35z^{-1}-0.35z^{-1}+(0.45\times 0.55)z^{-2}+(1.35z^{-1})\times(0.35z^{-1})}$$

$$=\frac{z^{-2}}{1-1.7z^{-1}+0.72z^{-2}}=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}$$

由状态模型导出传递函数的方法得证。 ◀

方法 2：对状态方程进行 z 变换，然后消除 $\boldsymbol{X}(z)$。因为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-78}$$

两边取 z 变换，得

$$z\boldsymbol{X}(z)-z\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z) \tag{2-79}$$

在推导传递函数时，忽略初始条件，式(2-79)变为

$$[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{X}(z)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z) \tag{2-80}$$

求解 $\boldsymbol{X}(z)$，得到

$$\boldsymbol{X}(z)=[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z) \tag{2-81}$$

又因为

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-82}$$

则

$$\boldsymbol{Y}(z)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z) \tag{2-83}$$

将式(2-81)代入式(2-83)，得到：

$$\boldsymbol{Y}(z)=[\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(z)$$

系统传递函数为：

$$\boldsymbol{G}(z)=\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{2-84}$$

下面举例说明此方法的使用。

例 2.28 再次考虑例 2.24 使用的状态方程：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1.35 & 0.55\\ -0.45 & 0.35\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.5\\ 0.5\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad -1)\boldsymbol{x}(k)$$

有

$$[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{pmatrix}z-1.35 & -0.55\\ 0.45 & z-0.35\end{pmatrix}$$

于是

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=z^2-1.7z+0.72$$

又

$$\operatorname{cof}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{pmatrix}z-0.35 & -0.45\\ 0.55 & z-0.35\end{pmatrix}$$

然后求

$$[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\frac{[\operatorname{cof}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]]^{\mathrm{T}}}{|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}\begin{pmatrix}z-0.35 & -0.55\\ -0.45 & z-1.35\end{pmatrix}$$

因为 $D=0$，根据式(2-84)，有：

$$G(z)=\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}(1\quad -1)\begin{pmatrix}z-0.35 & 0.55\\ -0.45 & z-1.35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5\\ 0.5\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}(1\quad -1)\begin{pmatrix}0.5z+0.1\\ 0.5z-0.9\end{pmatrix}=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}$$

这就是所要的传递函数。对式(2-84)的计算也可通过如下 MATLAB 程序来实现：

```
>> syms z
A = [1.35 0.55; -0.45 0.35];
B = [0.5; 0.5];
C = [1 -1];
D = 0;
Gz = C*inv(z*eye(2)-A)*B+D;
simplify(Gz)

 50/((5*z - 4)*(10*z - 9))

% save this m-file
function [nr2,dr2] = nice(old,z)
% NICE takes the original expression and makes it look nice
% Input: (a*z^2 + b*z + c)/(d*z^2 + e*z + f)
% Output: (a1*z^2 + b1*z +c1)/(z^2 + e1*z + f1)
% old contains symbol of z
% rearrange the expression to collect coefficients
new = collect(old,z);
% obtain the coefficients of numerator and denominator
dr = fliplr(coeffs(feval(symengine,'denom',new)));
nr = fliplr(coeffs(feval(symengine,'numer',new)));
% normalize the coefficients with the coeff of dr z^2 term
dr2 = double(dr/dr(1)); nr2 = double(nr/dr(1));
end

>> [num,den]=nice(Gz,z); T=1;
Gz=tf(num,den,T) % Requires a value for T

Gz =
         1
  ------------------
  z^2 - 1.7 z + 0.72
```

所得结果相同。也可使用 MATLAB 的函数 ss2tf(及 tf)以简约形式产生 $G(z)$：

```
>> A = [1.35 0.55; -0.45 0.35];
B = [0.5; 0.5];
C = [1 -1];
D = 0;
T = 1; %Sampling period should be specified
[num,denom]=ss2tf(A,B,C,D);
Gz = tf(num, denom, T)

Gz =
         1
  ------------------
  z^2 - 1.7 z + 0.72
```

◀

通过上例，可见相似变换的另一性质(像式(2-70)，应用于状态模型)：因为相似变换不改变系统的传递函数，所以，根据式(2-70)和式(2-84)，有：

$$\boldsymbol{C}\left[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}_w\left[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_w\right]^{-1}\boldsymbol{B}_w+\boldsymbol{D}_w \tag{2-85}$$

这一性质的证明工作作为练习留给读者，见章后习题 2.11-5。

为解决从状态方程推出传递函数的问题，我们介绍了两种方法。这两种更适于高阶系统。

2.12 求解状态方程

现在来讨论线性时不变状态方程的通用性求解方法。我们会看到，求解状态变量的关键是计算状态转移矩阵，在这里，介绍两种基于 z 变换的方法，然后，通过数字计算机求解其状态方程。

1. 递推解法

设系统是时不变的，且已知 $\boldsymbol{x}(0)$和 $\boldsymbol{u}(j)$，$j=0$，1，2，…，则系统状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-86}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-87}$$

以递归的方式，显然有：

$$\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0)$$

和

$$\boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1)$$

于是：

$$\boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0))+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1)=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1)$$

类似地，有：

$$\boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2)$$

可见，通用解为：

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{(k-1-j)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j) \tag{2-88}$$

如果定义

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=\boldsymbol{A}^k$$

则

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k-1-j)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j) \tag{2-89}$$

上式是式(2-86)的通解。根据式(2-87)和式(2-89)，有：

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(k-1-j)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-90}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}(k)$为状态转移矩阵或基础矩阵。

下面举例说明这一解的递归性。

例 2.29 已知传递函数为：

$$G(z)=\frac{(z+3)}{(z+1)(z+2)}$$

用 2.9 节方法，可以写出：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(3\quad 1)\boldsymbol{x}(k)$$

设系统的初始状态为 0，即 $\boldsymbol{x}(0)=0$，$\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(0)=0$，输入为单位阶跃函数，即

$$\boldsymbol{u}(k)=1,\quad k=0,1,2,\cdots$$

则递归解为：

$$\boldsymbol{x}(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(0)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(1)=(3\quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1$$

然后

$$\boldsymbol{x}(2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(1)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\times(1)=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$y(2)=(3\quad 1)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=3-2=1$$

依次可得：$\boldsymbol{x}(3)=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$，$y(3)=1$ 和 $\boldsymbol{x}(4)=\begin{bmatrix}5\\-10\end{bmatrix}$，$y(4)=5$，等等。

由此，相继瞬间的系统状态和系统输出可以通过递归的方式获得。该例的 MATLAB 程序如下：

```
>> A = [0 1; -2 -3];
B = [0; 1];
C = [3 1];
x = [0; 0];
u = 1;
for k = 0:5
  x1 = A*x + B*u;
  k
  y = C*x
  x = x1; %time delay
end

k = 0 1 2 3 4 5
y = 0 1 1 -1 5 -9
```

◀

2. z 变换法

前面讲述了状态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-91}$$

的通解。该解由式(2-89)给出：

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k-1-j)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j)$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}(k)$为状态转移矩阵，

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=\boldsymbol{A}^k \tag{2-92}$$

$\boldsymbol{\Phi}(k)$是 k 的函数，有一种求解方法是使用 z 变换。讨论如下。

令式(2-91)的 $\boldsymbol{u}(k)=0$，再对该式进行 z 变换：

$$z\boldsymbol{X}(z)-z\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) \tag{2-93}$$

求 $\boldsymbol{X}(z)$：

$$\boldsymbol{X}(z)=z[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0) \tag{2-94}$$

其 z 反变换为：

$$\boldsymbol{x}(k)=\mathscr{Z}^{-1}[\boldsymbol{X}(z)]=\mathscr{Z}^{-1}[z[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}]\boldsymbol{x}(0) \tag{2-95}$$

将式(2-95)与式(2-89)进行对比，可得：

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=\mathscr{Z}^{-1}[z[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}] \tag{2-96}$$

下面举例对上述方法进行说明。

例 2.30 例 2.29 的状态方程为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}$，于是：

$$[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}z & -1\\2 & z+3\end{bmatrix}$$

及

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=z^2+3z+2=(z+1)(z+2)$$

计算式(2-96)中的逆矩阵，然后再乘以 z，得：

$$z[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{z(z+3)}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}\\ \dfrac{-2z}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{z^2}{(z+1)(z+2)}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2z}{z+1}+\dfrac{-z}{z+2} & \dfrac{z}{z+1}+\dfrac{-z}{z+2} \\ \dfrac{-2z}{z+1}+\dfrac{2z}{z+2} & \dfrac{-z}{z+1}+\dfrac{2z}{z+2} \end{bmatrix} = \mathcal{Z}\,\boldsymbol{\Phi}[(k)]$$

于是，有：

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[z[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}] = \begin{bmatrix} 2(-1)^k-(-2)^k & (-1)^k-(-2)^k \\ -2(-1)^k+2(-2)^k & -(-1)^k+2(-2)^k \end{bmatrix}$$ ◀

3. 基于数字计算机的数值法

数字计算机是求解下述方程最为合适的工具：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{2-97}$$

这类方程用计算机递推地求解，不再实际求解状态转移矩阵。

求解状态转移矩阵的一种计算机方法是计算下式：

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{A}^k \tag{2-98}$$

这种方法的弊端是无法找到 $\boldsymbol{\Phi}(k)$ 关于 k 的通用函数。对于高阶系统而言，不论用何种方法，找到 $\boldsymbol{\Phi}(k)$ 关于 k 的通用函数都是困难的。

4. 状态转移矩阵的性质

状态转移矩阵有三种性质，下面逐一导出。因为

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0) \tag{2-99}$$

令上述表达式的 $k=0$，即得第一个性质：

$$\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{I} \tag{2-100}$$

式中：$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

又因为

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{A}^k$$

得第二个性质：

$$\boldsymbol{\Phi}(k_1+k_2) = \boldsymbol{A}^{k_1+k_2} = \boldsymbol{A}^{k_1}\boldsymbol{A}^{k2} = \boldsymbol{\Phi}(k_1)\boldsymbol{\Phi}(k_2) \tag{2-101}$$

经如下关系可得第三个性质：

$$\boldsymbol{\Phi}(-k) = \boldsymbol{A}^{-k} = [\boldsymbol{A}^k]^{-1} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(k) \tag{2-102}$$

或者，求上述表达式的逆，得到一个等效表达式：

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(-k) \tag{2-103}$$

例 2.31 用下式描述的系统说明状态转移矩阵的性质：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

由于

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.5^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^k \end{bmatrix}$$

及式(2-100)，有：

$$\boldsymbol{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$

由式(2-101)，有：

$$\boldsymbol{\Phi}(k_1+k_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^{k_1+k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^{k_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^{k_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(k_1)\boldsymbol{\Phi}(k_2)$$

由式(2-103)，有：

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(-k)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5^{-k}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5^{k}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Phi}(k)$$ ◀

2.13　线性时变系统

式(2-47)和式(2-48)给出了线性时变系统的状态方程，现重新列于此：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2-104}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2-105}$$

上述方程的解可通过递推法得到。如果用(k_0)表示初始时间，并设 $\boldsymbol{x}(k_0)$及 $\boldsymbol{u}(k)$，$k>k_0$已知，则

$$\boldsymbol{x}(1+k_0)=\boldsymbol{A}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\boldsymbol{B}(k_0)\boldsymbol{u}(k_0)$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(2+k_0)&=\boldsymbol{A}(1+k_0)\boldsymbol{x}(1+k_0)+\boldsymbol{B}(1+k_0)\boldsymbol{u}(1+k_0)\\&=\boldsymbol{A}(1+k_0)[\boldsymbol{A}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\boldsymbol{B}(k_0)\boldsymbol{u}(k_0)]+\boldsymbol{B}(1+k_0)\boldsymbol{u}(1+k_0)\\&=\boldsymbol{A}(1+k_0)\boldsymbol{A}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\boldsymbol{A}(1+k_0)\boldsymbol{B}(k_0)\boldsymbol{u}(k_0)+\boldsymbol{B}(1+k_0)\boldsymbol{u}(1+k_0)\end{aligned}$$

用类似的方法得到：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(3+k_0)&=\boldsymbol{A}(2+k_0)\boldsymbol{x}(2+k_0)+\boldsymbol{B}(2+k_0)\boldsymbol{u}(2+k_0)\\&=\boldsymbol{A}(2+k_0)\boldsymbol{A}(1+k_0)\boldsymbol{A}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\boldsymbol{A}(2+k_0)\boldsymbol{A}(1+k_0)\boldsymbol{B}(k_0)\boldsymbol{u}(k_0)\\&\quad+\boldsymbol{A}(2+k_0)\boldsymbol{B}(1+k_0)\boldsymbol{u}(1+k_0)+\boldsymbol{B}(2+k_0)\boldsymbol{u}(2+k_0)\end{aligned}$$

如果定义：

$$\boldsymbol{\Phi}(k,k_0)=\boldsymbol{A}(k-1)\boldsymbol{A}(k-2)\cdots\boldsymbol{A}(k_0)=\begin{cases}\prod\limits_{j=k_0}^{k-1}\boldsymbol{A}(j), & k>k_0\\ \boldsymbol{I}, & k=k_0\end{cases} \tag{2-106}$$

式中：$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

则上面那个关于 $\boldsymbol{x}(3+k_0)$的方程便可写为：

$$\boldsymbol{x}(3+k_0)=\boldsymbol{\Phi}(3+k_0,k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\sum_{j=k_0}^{2+k_0}\boldsymbol{\Phi}(3+k_0,j+1)\boldsymbol{B}(j)\boldsymbol{u}(j)$$

于是，一般有：

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k,k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k,j+1)\boldsymbol{B}(j)\boldsymbol{u}(j) \tag{2-107}$$

以及

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{\Phi}(k,k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k-1}\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{\Phi}(k,j+1)\boldsymbol{B}(j)\boldsymbol{u}(j)+\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2-108}$$

如同前面的做法，$\boldsymbol{\Phi}(k,\ k_0)$称为状态转移矩阵。请注意，由于该矩阵是时变的，必须在每一个有效瞬间重新计算。

利用式(2-106)和式(2-107)，可推导出状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(k,\ k_0)$具有如下重要性质：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(k_0,k_0)&=\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{\Phi}(k_2,k_1)\boldsymbol{\Phi}(k_1,k_0)&=\boldsymbol{\Phi}(k_2,k_0)\\ \boldsymbol{\Phi}(k_1,k_2)&=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(k_2,k_1)\end{aligned} \tag{2-109}$$

应注意到，如果系统是时不变的，那么 $\boldsymbol{A}$ 就不是 k 的函数，这时，式(2-106)所描述关于状态转移矩阵的方程就可以简化为适合于线性时不变系统的式(2-92)。因此，可以看出，线性时不变系统是线性时变系统的特例。

2.14　小结

本章介绍了离散时间系统的概念，讨论了如何借助差分方程为这类系统建模，定义了

z 变换以及如何通过 z 变换求解线性时不变差分方程，介绍了用于求解 z 反变换的四种方法。最后，讨论了如何用仿真图和信号流图来表示离散时间系统，由此，自然引出了状态变量模型，进而介绍了求解状态变量方程的方法。本章内容涉及对离散时间系统建模及分析离散时间系统的基础问题，也是后续章节内容的数学基础。

参考文献

[1] C. F. Gerald, *Applied Numerical Analysis,* 7th ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2007.

[2] "Software Implementation ALS Computer Program," Contract N00421-75-C-0058, Bell Aerospace Corporation, Buffalo, NY, Mar. 1975.

[3] A. W. Drake, *Fundamentals of Applied Probability Theory.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1967.

[4] A. N. Oppenheim, A. S. Willsky, and N.H. Nawab, *Signals and System,* 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.

[5] G. Doetsch, *Guide to the Applications of the Laplace and z-Transforms,* 2nd ed. New York: Van Nostrand-Reinhold, 1971.

[6] M. M. Guterman and Z. H. Nitecki, *Differential Equations: A First Course,* 3rd ed. Delhi: Indo American Book Co., 2006.

[7] C. R. Wylie and L.C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics,* 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1995.

[8] P. M. De Russo, R. J. Roy, C. M. Close, and A. A. Desrochers, *State Variables for Engineers,* 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[9] B. Friedland, *Control System Design.* Mineola, NY: Dover Publications, 2005.

[10] J. A. Cadzow and H. R. Martens, *Discrete-Time and Computer Control Systems.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1970.

[11] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems,* 3rd ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

[12] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1973.

[13] B. C. Kuo, *Digital Control Systems,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1995.

[14] M. S. Fadali and A. Visioli, *Digital Control Engineering.* Waltham, MA: Academic Press, 2009.

习题

2.2-1 适用于数值积分的矩形规则如图 P2.2-1 所示，其中，图 P2.2-1a 所示的为左边规则，如图 P2.2-1b 所示的为右边规则。对 $x(k)$ 的积分用符合规则的各矩形面积的和来近似，令 $y(kT)$ 是对 $x(k)$，$0\leqslant k\leqslant kT$ 的数值积分。

(1) 写出 $y(k+1)$、$y(k)$ 与 $x(k)$ 之间的差分方程(用左边规则)；

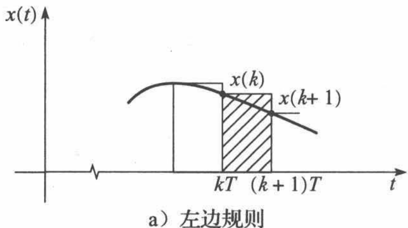
(2) 求(1)问的传递函数 $Y(z)/X(z)$；

(3) 写出 $y(k+1)$、$y(k)$ 与 $x(k+1)$ 之间的差分方程(用右边规则)；

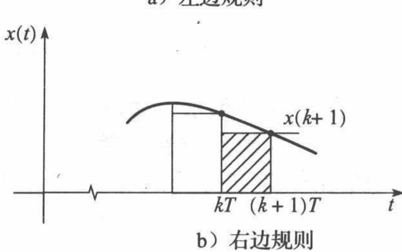
(4) 求(3)问的传递函数 $Y(z)/X(z)$；

(5) 将 $y(k)$ 表示为关于 $x(k)$ 的求和(用左边规则)；

(6) 将 $y(k)$ 表示为关于 $x(k)$ 的求和(用右边规则)。



a) 左边规则



b) 右边规则

图 P2.2-1 用于数值积分的矩形规则

2.2-2 数值积分的梯形规则用图 P2.2-2 所示的梯形面积的和近似对 $x(k)$ 的积分，令 $y(k)$ 是对 $x(k)$，$0\leqslant k\leqslant kT$ 的数值积分。

(1) 写出遵循梯形规则的 $y[(k+1)T]$、$y(kT)$、$x[(k+1)T]$ 与 $x(kT)$ 之间的差分方程；

(2) 证明该积分器的传递函数为

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(T/2)(z+1)}{z-1}$$

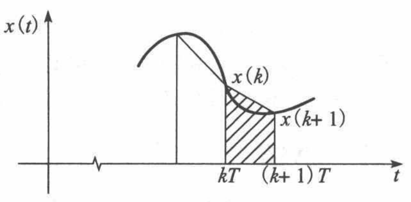


图 P2.2-2 用于数值积分的梯形规则

2.2-3 (1) 习题 2.2-1 已求得右边矩形规则下积分器的传递函数 $Y(z)/X(z)=Tz/(z-1)$，我们猜想，这个传递函数的倒数应该是微分器的一种近似，即如果

$w(kT)$是对 $x(t)$在 $t=kT$ 的数值微分：

$$\frac{W(z)}{X(z)}=\frac{z-1}{Tz}$$

写出描述这个微分器的差分方程。

(2) 类似于如图 P2.2-1 所示规则，画出能说明近似微分的图形。

(3) 将右边规则改为左边规则，重做(1)问，此时，$Y(z)/X(z)=T/(z-1)$。

(4) 对于(3)问的微分器，重做(2)问。

2.3-1　从 $t=0$ 开始，每隔 T 秒对时间函数 $e(t)=t$ 进行采样，得到数字序列。求该数字序列的 z 变换。你能将这个 z 变换结果写成闭式吗？

2.3-2　(1) 从 $t=0$ 开始，每隔 T 秒对时间函数 $e(t)=\mathrm{e}^{-t}$ 进行采样，得到数字序列。写出该数字序列的 z 变换序列。你能将这个 z 变换序列写成闭式吗？

(2) 设 $T=0.05\mathrm{s}$，计算(1)问序列中的各系数。

(3) 对指数函数 $e(t)=\mathrm{e}^{-bt}$ 进行采样，采样周期 $T=0.2\mathrm{s}$，得到数字序列，该数字序列的 z 变换为：

$$E(z)=1+\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2z^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3z^{-3}+\cdots$$

计算系数 b。

2.3-3　从 $t=0$ 开始，每隔 T 秒对如下函数进行采样，得到数字序列，写出该数字序列的 z 变换。

(1) $e(t)=\mathrm{e}^{-at}$　　(2) $e(t)=\mathrm{e}^{-(t-T)}u(t-T)$

(3) $e(t)=\mathrm{e}^{-(t-5T)}-u(t-5T)$

2.4-1　经对 $e(t)$采样，所得数字序列的 z 变换如下：

$$E(z)=\frac{z^3-2z}{z^4-0.9z^2+0.8}$$

利用 $E(z)$及 z 变换的性质，求如下函数的 z 变换：

(1) $e(t-2T)u(t-2T)$　　(2) $e(t+2)u(t)$

(3) $e(t-T)u(t-2T)$

2.4-2　经对 $e(t)$采样，所得数字序列的 z 变换如下：

$$E(z)=\frac{z-b}{z^2-cz^2+d}$$

利用 $E(z)$及 z 变换的性质，求 $\mathrm{e}^{akT}e(kT)$的 z 变换。

2.5-1　根据表 2-3，有：

$$\mathscr{Z}[\cos(akT)]=\frac{z(z-\cos(aT))}{z^2-2z\cos(aT)+1}$$

(1) 求参数 a 的条件，以使$\mathscr{Z}[\cos(akT)]$是一阶的(出现零极点对消)；

(2) 给出(1)问的一阶传递函数；

(3) 求参数 a，以使$\mathscr{Z}[\cos(akT)]=\mathscr{Z}[u(kT)]$，其中，$u(kT)$为单位阶跃函数。

2.5-2　从 $t=0$ 开始，每隔 T 秒对时间函数 $e(t)$进行采样，得到数字序列的闭式。写求其 z 变换。由如下拉普拉斯变换指定 $e(t)$。

$$E(s)=\frac{2(1-\mathrm{e}^{-5s})}{s(s+2)},\quad T=1\mathrm{s}$$

2.5-3　用留数法求如下函数的 z 变换。用计算机程序检测你的结果。

(1) $E(s)=\dfrac{20}{(s+2)(s+5)}$　　(2) $E(s)=\dfrac{5}{s(s+1)}$　　(3) $E(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$

(4) $E(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$　　(5) $E(s)=\dfrac{s^2+5s+6}{s(s+4)(s+5)}$　　(6) $E(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+5}$

2.6-1　用如下方法求 $x(k)$的差分方程：

(1) 序列法；

(2) z 变换法；

(3) 用终值定理能求出 $k\to+\infty$时的 $x(k)$的正确取值吗？

$$x(k)-3x(k-1)+2x(k-2)=e(k)$$

式中：

$$e(k)=\begin{cases}1, & k=0,1\\0, & k\geqslant 2\end{cases}$$

$$x(-2)=x(-1)=0$$

2.6-2 已知差分方程：

$$y(k+2)-\frac{3}{4}y(k+1)+\frac{1}{8}y(k)=e(k)$$

式中：$y(0)=y(1)=0$，$e(0)=0$，$e(k)=1$，$k=1,2,\cdots$。

(1) 求 $y(k)$关于 k 的函数关系，并给出 $0\leqslant k\leqslant 4$ 时 $y(k)$的数值；

(2) 直接求解 $y(k)$，$0\leqslant k\leqslant 4$ 的差分方程，以证实(1)问的结果；

(3) 若对于所有的 k，总是有 $e(k)=0$，且 $y(0)=1$，$y(1)=-2$，重做(1)问和(2)问。

2.6-3 已知差分方程：

$$x(k)-x(k+1)+x(k-2)=e(k)$$

式中：$e(k)=1$，$k\geqslant 0$。

(1) 通过 z 变换，求 $x(k)$关于 k 的函数关系，并给出 $x(0)$、$x(1)$、$x(2)$的数值；

(2) 用幂级数法证实 $x(0)$、$x(1)$、$x(2)$的数值；

(3) 直接求解差分方程，证实 $x(0)$、$x(1)$、$x(2)$的数值；

(4) 利用终值性是否可以直接获得 $x(+\infty)$。

2.6-4 已知差分方程：

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=e(k)$$

式中：

$$e(k)=\begin{cases}1, & k=0\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$x(0)=1$$

$$x(1)=-1$$

(1) 求 $x(k)$关于 k 的函数关系；

(2) 计算(1)问的 $x(0)$、$x(1)$、$x(2)$、$x(3)$的数值；

(3) 用幂级数法证实(2)问的结果；

(4) 通过直接求解差分方程，证实(2)问的结果。

2.6-5 已知差分方程：

$$x(k+3)-2.2x(k+2)+1.57x(k+1)-0.36x(k)=e(k)$$

式中：$e(k)=1$，$k\geqslant 0$，且 $x(0)=x(1)=x(2)=0$

(1) 写一段计算 $x(k)$的计算机程序，运行此程序，以解出 $x(3)$，$x(4)$，…，$x(25)$；

(2) 用序列法核实 $x(k)$，$0\leqslant k\leqslant 5$ 的数值；

(3) 用 z 变换法和幂级数法证实 $x(k)$，$0\leqslant k\leqslant 5$ 的数值。

2.6-6 已知求解数字控制器差分方程的 MATLAB 程序如下：

```
>>s1 = 0;
e = 0;
for k = 0:5
    s2 = e - s1;
    m = 0.5*s2 - s1;
    s1 = s2;
    [k,m]
    e = e + 1;
end
```

(1) 求该控制器的传递函数；

(2) 求该控制器输入的 z 变换；

(3) 利用(1)问和(2)问的结果，求控制器输出的 z 反变换；

(4) 运行程序，核实(3)问的结果。

2.7-1 已知传递函数：

$$E(z)=\frac{0.1}{z(z-0.9)}$$

(1) 使用反演公式求出 $e(0)$，$e(1)$，$e(10)$；

(2) 利用初值性质核实 $e(0)$；

(3) 利用部分分式法核实(1)问给出的计算值；

(4) 如果$\mathscr{Z}[e(k)]$由下式给定，求 $e(k)$，$k=0$，1，2，3，4；

$$E(z) = \frac{1.98z}{(z^2-0.9z+0.9)(z-0.8)(z^2-1.2z+0.27)}$$

(5) 对函数 $e(t)$以 10Hz 的频率($T=0.1$s)进行采样，之后进行 z 变换，z 变换结果为 $E(z)=2z/(z-0.8)$，则 $e(t)=$？

(6) 如果 $E(z)=2z/(z+0.8)$，其他同问题(5)，则 $e(t)=$？

(7) 根据(5)问和(6)问，改变 z 变换的实极点，会对其 z 反变换产生什么影响？

2.7-2　已知数字序列$\{e(k)\}$的 z 变换如下：

$$E(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$$

(1) 将终值定理应用于 $E(z)$；

(2) 求 $E(z)$的 z 反变换，核实(1)问的结果；

(3) 若 $E(z)=z/(z-1)^2$，重做(1)问和(2)问；

(4) 若 $E(z)=z/(z-0.9)^2$，重做(1)问和(2)问；

(5) 若 $E(z)=z\,(z-1.1)^2$，重做(1)问和(2)问；

2.7-3　用文中介绍的 4 种方法对下列 $E(z)$进行 z 反变换，并对经这 4 种方法获得的 $E(k)$，$k=0$，1，2，3 进行对比。用 MATLAB 程序验证部分分式展开式。

(1) $E(z)=\dfrac{0.5z}{(z-1)(z-0.6)}$　　(2) $E(z)=\dfrac{0.5}{(z-1)(z-0.6)}$

(3) $E(z)=\dfrac{0.5(z+1)}{(z-1)(z-0.6)}$　　(4) $E(z)=\dfrac{z(z-0.7)}{(z-1)(z-0.6)}$

2.7-4　用任一方法对下列 $E(z)$进行 z 反变换。

(1) $E(z)=\dfrac{0.5z^2}{(z-1)^2(z-0.6)}$　　(2) $E(z)=\dfrac{0.5}{(z-1)(z-0.6)^2}$

(3) $E(z)=\dfrac{0.5z(z-0.7)}{(z-1)(z-0.6)^2}$　　(4) $E(z)=\dfrac{0.5z(z-0.7)}{(z-1)(z-0.59)(z-0.61)}$

2.8-1　二阶数字滤波器结构如图 P2.8-1 所示。

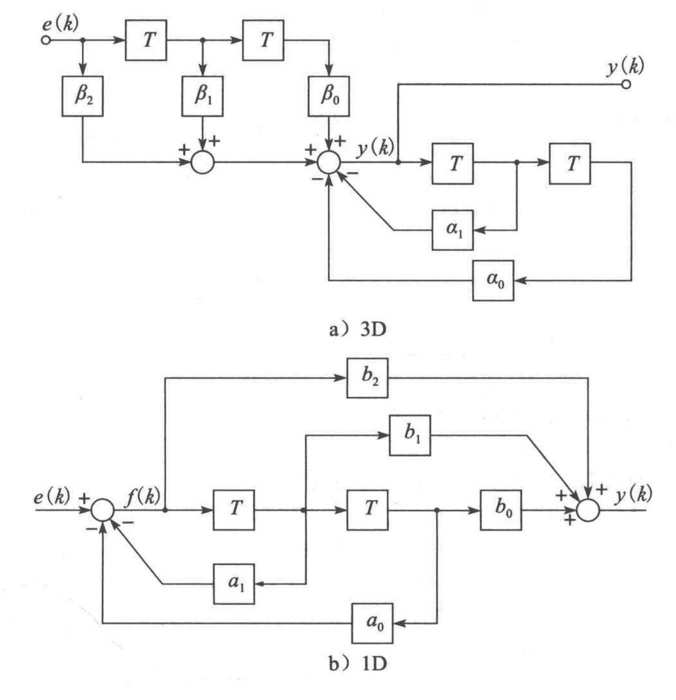


图 P2.8-1　数字滤波器结构

(1) 针对图 P2. 8-1a 所示的 3D 结构，写出其差分方程，将 $y(k)$表示为 $y(k-i)$和 $e(k-i)$的函数；

(2) 通过对(1)问的结果进行 z 变换，推导 3D 结构的传递函数 $Y(z)/E(z)$；

(3) 针对图 P2. 8-1b 所示的 1D 结构，写出其差分方程需要用到两个方程，即关于 $f(k)$的方程和关于 $y(k)$的方程；

(4) 通过对(3)问的结果进行 z 变换并消除 $F(z)$，推导 1D 结构的传递函数 $Y(z)/E(z)$；

(5) 根据(2)问和(4)问的结果，把系数 α_i、β_i 和系数 a_i、b_i 进行关联，以使两个滤波器实现的传递函数相同；

(6) 编写一段实现 3D 结构的计算机程序，该程序应该具有例 2. 10 给出的形式；

(7) 编写一段实现 1D 结构的计算机程序，该程序应该具有例 2. 10 给出的形式。

2. 8-2 二阶数字滤波器结构 1X 如图 P2. 8-2 所示，该结构所实现的滤波器传递函数为

$$D(z) = b_2 + \frac{A}{z-p} + \frac{A^*}{z-p^*}$$

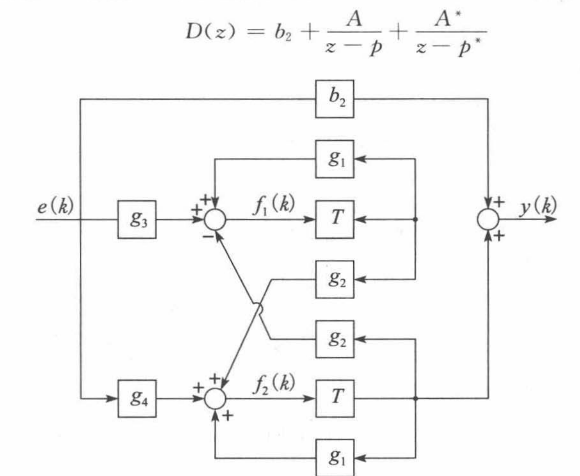


图 P2. 8-2 数字滤波器结构 1X

式中：p 和 $p*$(p 的共轭)是复数。

上式中的系数与图 P2. 8-2 中的参数具有如下关系：

$$g_1 = \mathrm{Re}(p), \quad g_3 = -2\mathrm{Im}(A)$$
$$g_2 = \mathrm{Im}(p), \quad g_4 = 2\mathrm{Re}(A)$$

(1) 为实现该滤波器，需要关于 $f_1(k)$、$f_2(k)$和 $y(k)$的差分方程，写出这些差分方程；

(2) 求(1)问所得方程的 z 变换，消去 $F_1(z)$和 $F_2(z)$，得出滤波器的传递函数 $Y(z)/E(z)$；

(3) 利用梅森增益公式，验证(2)问的结果；

(4) 编写一段实现 1X 结构的计算机程序，该程序应该具有例 2. 10 给出的形式。

2. 8-3 已知二阶数字滤波器传递函数：

$$D(z) = \frac{2z^2 - 2.4z + 0.72}{z^2 - 1.4z + 0.98}$$

(1) 求如图 P2. 8-1 所示的 3D 结构滤波器系数，以实现 $D(z)$；

(2) 求如图 P2. 8-1 所示的 1D 结构滤波器系数，以实现 $D(z)$；

(3) 求如图 P2. 8-2 所示的 1X 结构滤波器系数，以实现 $D(z)$；

(4) 利用梅森增益公式，验证(3)问的结果。

2. 9-1 针对如下系统差分方程，求出其两种状态变量方程。

(1) $y(k+2)+6y(k+1)+5y(k)=2e(k)$

(2) $y(k+2)+6y(k+1)+5y(k)=e(k+1)+2e(k)$

(3) $y(k+2)+6y(k+1)+5y(k)=3e(k+2)+e(k+1)+2e(k)$

2. 9-2 可观标准型系统如图 2-10 所示，它的传递函数由式(2-51)和式(2-61)给出：

$$G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

写出其状态变量方程。

2. 9-3 指出如图 2-9 所示系统可控标准型与如图 2-10 所示系统可观标准型之间的关系。将所有的信号求

和点改为信号分发点，信号分发点改为信号求和点，同时调转信号通路上的信号流向，增益系数不变，倒转时延单元中的信号，就可将如图 2-9b 所示仿真图转变为如图 2.10 所示仿真图，它们具有关联关系，传递函数相同。

(1) 针对如图 2-6 所示的仿真图，列写出传递函数；

(2) 画出如图 2-6 所示结构的关联图；

(3) 列写关联图的传递函数；

(4) 证明关联图的传递函数同式(2-43)。

2.10-1　用于描述系统的相互关联的二阶差分方程如下：

$$x(k+2)+v(k+1)=4e_1(k)+e_2(k)$$
$$v(k+2)-v(k)+x(k)=2e_1(k)$$
$$y(k)=v(k+2)-x(k+1)+e_1(k)$$

请据此列写该系统的状态转换方程。提示：先画出仿真图。

2.10-2　对于由下述方程描述的系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=(-2\quad 1)\boldsymbol{x}(k)$$

(1) 求出其传递函数 $Y(z)/U(z)$；

(2) 利用任意一个仿真图，求出该系统的另一个状态模型；

(3) 从新得到的状态方程，求出其传递函数；

(4) 证明给定的 $\boldsymbol{A}$ 和由(2)问导出的 $\boldsymbol{A}_w$ 满足相似变换的前三个性质，第四个性质在(3)问中得以证明。

2.10-3　对上题系统进行相似变换，得到：

$$\boldsymbol{w}(k+1)=\begin{pmatrix}d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{pmatrix}\boldsymbol{w}(k)+\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_w\boldsymbol{x}(k)$$

(1) 求 d_1 和 d_2；

(2) 做相似变换，以产生给定的矩阵 $\boldsymbol{A}_w$，注意这个矩阵是对角矩阵；

(3) 求 $\boldsymbol{B}_w$ 和 $\boldsymbol{C}_w$；

(4) 求两组状态方程的传递函数，以证明此题结论。

2.10-4　对如下方程描述的系统，完成习题 2.10-2 的问题。

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 2)\boldsymbol{x}(k)$$

2.11-1　对于具有如下传递函数的系统：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{2}{z(z-1)}$$

(1) 求出三个不同的状态变量方程；

(2) 用式(2-84)验证(1)问的每一个状态模型下的传递函数。

2.11-2　对于如下一对差分方程描述的系统

$$y(k+2)-v(k)=0$$
$$v(k+1)+y(k+1)=u(k)$$

式中：$u(t)$是系统输入。

(1) $y(k+1)$和 $v(k)$是系统输出，求出该系统的传递函数；提示：先画出仿真图；

(2) 将 $y(k)$和 $v(k)$作为系统输出，重做(1)问；

(3)设系统具有单输出 $v(k)$，重做(1)问；

(4) 设系统具有单输出 $v(k)$，利用式(2-84)求出系统的传递函数，即 $V(z)/U(z)$；

(5) 对给定系统的差分方程求 z 变换，消除 $Y(z)$，验证由(4)问给出的传递函数；

(6) 对(1)问给定的仿真图，利用梅森增益公式，验证由(4)问给出的传递函数。

2.11-3 对于如下状态方程描述的系统：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(0\quad 0\quad 1)\boldsymbol{x}(k)$$

(1) 利用式(2-84)，求出该系统的传递函数 $Y(z)/U(z)$；

(2) 根据给定的状态方程，画出该系统的仿真图；

(3) 利用梅森增益公式和仿真图，验证由(1)问求出的传递函数。

2.11-4 2.9 节给出了状态方程的一些标准形式(可控标准型和可观标准型的仿真图)，MATLAB 语句：

```
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
```

将对传递函数产生一组标准状态方程，其中，给定的传递函数的分子系数放在向量 num 中，分母系数放在向量 den 中。

(1) 用上述 MATLAB 语句，对如下传递函数产生一组标准状态方程：

$$G(z)=\frac{3z+4}{z^2+5z+6}$$

(2) 对由(1)给出的状态方程，画出系统的仿真图；

(3) 判断由(2)问得出的仿真图是否属于 2.9 节给出的标准形式。

2.11-5 对式(2-71)的仿真图，证明：

$$\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}_w[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_w]^{-1}\boldsymbol{B}_w+\boldsymbol{D}_w$$

2.12-1 对于习题 2.10-2 的系统，

(1) 求出它的传递函数；

(2) 令 $u(k)=1$，$k\geqslant 0$(单位阶跃函数)及 $x(0)=0$，用(1)问所得传递函数求系统输出；

(3) 求系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(k)$；

(4) 利用式(2-90)验证(2)问算出的阶跃响应，该结果将响应表示为和式，核实 $y(0)$、$y(1)$和$y(2)$；

(5) 用状态方程的递归解验证(4)问的结果。

2.12-2 如下方程描述的系统被初始条件 $x(0)=(-1\quad 2)^{\mathrm{T}}$ 所激励，且对于所有 k，$u(0)=0$。

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0.5\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 2)\boldsymbol{x}(k)$$

(1) 用式(2-89)求 $x(k)$，$k\geqslant 0$；

(2) 求输出 $y(k)$；

(3) 证明(1)问给出的 $\boldsymbol{\Phi}(k)$满足性质 $\boldsymbol{\Phi}(0)=I$；

(4) 证明(1)问的解满足给定的初始条件；

(5) 用状态方程的迭代解证明(2)问给出的 $y(k)$，$k=0，1，2，3$ 是正确的；

(6) 用 MATLAB 程序验证(5)问的结果。

2.12-3 如下方程描述的系统被初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=(-1\quad 2)^{\mathrm{T}}$ 所激励，且对于所有 k，$u(k)=0$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1.1&1\\-0.3&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad -1)\boldsymbol{x}(k)$$

(1) 用式(2-89)求 $x(k)$，$k\geqslant 0$；

(2) 求输出 $y(k)$；

(3) 证明(1)问给出的 $\boldsymbol{\Phi}(k)$满足性质 $\boldsymbol{\Phi}(0)=I$；

(4) 证明(1)问的解满足给定的初始条件；

(5) 用状态方程的迭代解证明(2)问给出的 $y(k)$，$k=0，1，2，3$ 是正确的。

2.12-4 令 $\boldsymbol{\Phi}(k)$是如下方程的状态转移矩阵：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$$

证明 $\boldsymbol{\Phi}(k)$满足差分方程：

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(k)$$

第3章 采样与重构

3.1 引言

第 2 章介绍了离散系统的概念。离散系统可用一个差分方程来描述(建模)，而系统中的信号则用数字序列(如$\{e(k)\}$)描述。一些数字序列是通过对连续信号采样获得的(如数字控制系统中出现的数字序列)。为了深入了解数字控制系统运行的基本原理，有必要对连续信号的采样效果进行研究。这正是本章研究的主要内容。

3.2 采样控制系统

本节介绍存在于采样控制系统和数字控制系统中的采样类型，探究采样的数学模型。通过此模型，可确定信号经采样后，对信号中信息含量的影响。

首先，我们参照图 3-1 所示的雷达跟踪系统来介绍含采样数据的系统，在 1.5 节已提及过该雷达跟踪系统。这里只考虑对底座顶视图所显示的偏航角 $\theta_{\mathrm{R}}(t)$的控制。闭环系统用于自动跟踪飞机。在图 3-1a 所示视图中，$\theta_{\mathrm{R}}(t)$是指雷达天线的偏航轴指向角，$\theta_{\mathrm{A}}(t)$是指飞机的角度。因此，跟踪误差 $e(t)$可表示为：

$$e(t)=\theta_{\mathrm{A}}(t)-\theta_{\mathrm{R}}(t)$$

假设雷达传输信号的时间间隔为 T 秒，则误差 $e(t)$每隔 T 秒计算一次，该系统框图如图 3-1b 所示。雷达接收器必须在相应瞬间将电压送入功率放大器，因为仅能求出误差 $e(kT)$，因此，必须确定 $t\neq kT$ 时功率放大器的输入 $\bar{e}(t)$。

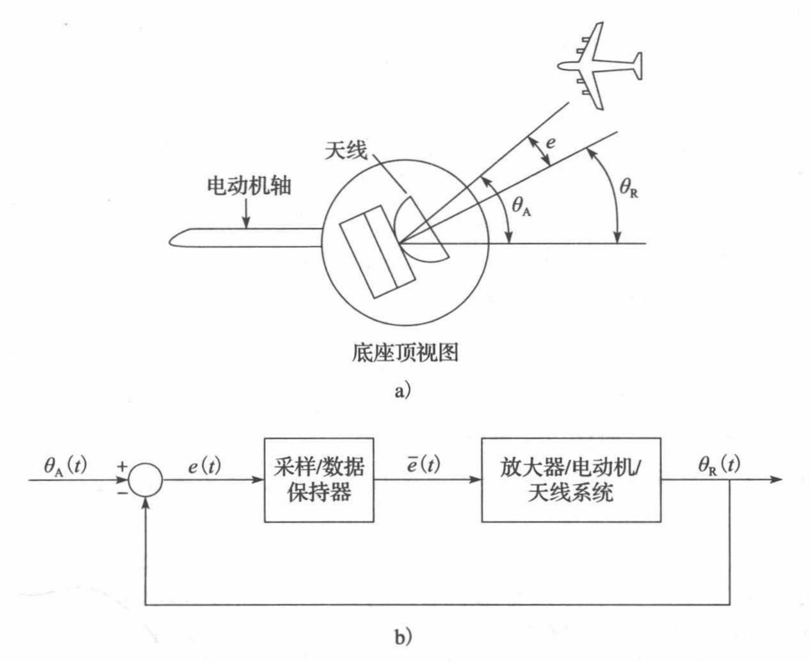


图 3-1 数据采样控制系统

采样信号如图 3-2 所示，它是一连串狭窄的矩形脉冲信号，含有高频分量。一般来

讲，不希望将含有高频成分的采样信号向后续设备输入，因此，我们把一种称为数据保持器的数据重构装置直接插到采样器之后，目的是将采样信号重构，使之接近采样之前的信号。零阶保持器是最简单也是最常用的一种数据重构装置。由采样器和零阶保持器联合工作所形成的信号如图 3-3 所示。零阶保持器能够保持住采样瞬间得到的输入信号，并将其值持续输出。

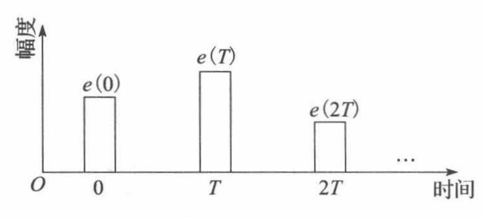


图 3-2 脉冲形式的采样信号

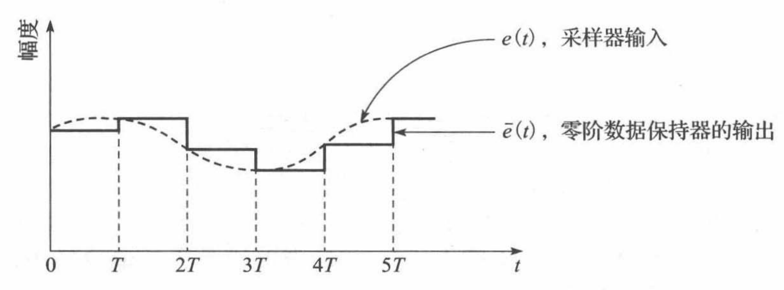


图 3-3 采样/数据保持器的输入信号和输出信号

采样器和零阶保持器如图 3-4 的框图所示。信号 $\bar{e}(t)$可表示为

$$\begin{aligned}\bar{e}(t) =& e(0)[u(t)-u(t-T)]+e(T)[u(t-T)-u(t-2T)]\\&+e(2T)[u(t-2T)-u(t-3T)]+\cdots\end{aligned} \tag{3-1}$$

式中：$u(t)$为单位阶跃函数。

$\bar{e}(t)$的拉普拉斯变换 $\bar{E}(s)$可表示为：

$$\begin{aligned}\bar{E}(s) &= e(0)\left[\frac{1}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\right]+e(T)\left[\frac{\mathrm{e}^{-Ts}}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-2Ts}}{s}\right]+e(2T)\left[\frac{\mathrm{e}^{-2Ts}}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-3Ts}}{s}\right]+\cdots\\&=\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\right][e(0)+e(T)\mathrm{e}^{-Ts}+e(2T)\mathrm{e}^{-2Ts}+\cdots]\\&=\left[\sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs}\right]\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\right]\end{aligned} \tag{3-2}$$

附录Ⅴ给出了拉普拉斯变换的概述，附录Ⅵ为拉普拉斯变换表。

可以看出，式(3-2)最后一行的第一部分是输入信号 $e(t)$和采样周期 T 的函数，第二部分则与信号 $e(t)$无关，因此可将其视为传递函数。采样器/零阶保持器的行为如图 3-4 所示，我们将第一部分用“$*$”号标记，称为星形传递函数 $E^*(s)$，定义为：

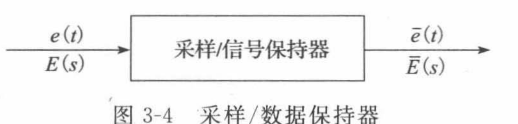


图 3-4 采样/数据保持器

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs} \tag{3-3}$$

图 3-5 给出的是对式(3-2)关系的一种表示，图中，用开关表示式(3-3)所定义的关系，并称其为理想采样器；用传递函数表示数据保持器所实现的关系。需要重点强调的是，$E^*(s)$并不存在于物理系统中，而是因式分解式(3-2)呈现出来的结果，因此，如图 3-5 所示的作为采样器的开关，并不是实际的采样器，后面那个功能块也不是实际的数据保持器。但它们仍然能够确切地描述前文谈及的数据采样/保持装置的输入输出特性。

在如图 3-5 所示采样/保持器中，用符号表示的采样器并不能用传递函数来描述。由式(3-3)可知，仅当 $t=kT$，$k=0$，1，2，… 时，采样器的输出方等于函数 $e(t)$，就是说，它在不同的输入信号下会送出相同的输出信号 $E^*(s)$。而要将采样器表示成传递函数，则需要它能够在不同的 $E(s)$ 下得到不同的 $E^*(s)$。因此，采样器不存在传递函数。这一性质将增加如图 3-1b 所示系统分析的复杂性。

图 3-5 采样/数据保持器的表示

值得一提的是，我们所讨论的大多数系统，其反馈通路的增益为 1，如图 3-1b 所示。在实际系统中，传感器传递函数应出现在反馈通路上，但由于传感器的带宽通常远高于系统中其他装置的带宽，因此在系统设计和分析时，传感器增益被看成常数。关于将实际控制系统转换到单位反馈系统问题的讨论请见参考文献[1]。

3.3 理想采样器

根据式(3-3)，可得 $E^*(s)$ 的拉普拉斯反变换为：

$$e^*(t)=\mathscr{L}^{-1}[E^*(s)]=e(0)\delta(t)+e(T)\delta(t-T)+e(2T)\delta(t-2T)+\cdots \tag{3-4}$$

式中：$\delta(t)$ 是位于 $t=0$ 的单位冲击函数。

若 $e^*(t)$ 是一串冲击函数，其值等于采样瞬间的信号值，便可用如图 3-6 所示的来表示之，因为冲击函数其发生瞬间幅度是无限的。再次强调 $e^*(t)$ 是非物理信号。

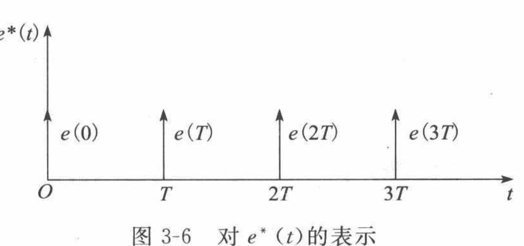


图 3-6 对 $e^*(t)$ 的表示

采样/保持器模型中的采样器，在其输出端送出的是非物理信号(冲击函数)，为此，该采样器称为理想采样器，又称为脉冲调制器。为了说明调制的概念，定义：

$$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(t-nT)=\delta(t)+\delta(t-T)+\cdots \tag{3-5}$$

于是可将 $e^*(t)$ 表示为：

$$\begin{aligned}e^*(t)&=e(t)\delta_T(t)=e(t)\delta(t)+e(t)\delta(t-T)+\cdots\\&=e(0)\delta(t)+e(T)\delta(t-T)+\cdots\end{aligned} \tag{3-6}$$

容易看出，在调制过程中，式中的 $\delta_T(t)$ 是载波，$e(t)$ 是调制信号[2]。拉普拉斯变换要求 $e(t)$ 在 $t<0$ 时为 0[3]。基于此，可以令式(3-5)从 $n=-\infty$ 到 $n=+\infty$ 求和，而式(3-6)不变。图 3-7 给出了这种理想采样器的两种等效形式。

图 3-7 理想采样器的表示

如果 $e(t)$ 在 $t=kT$ 处不连续，式(3-4)给出的理想采样器的输出定义就会出问题。例如，如果 $e(t)$ 是阶跃函数，式(3-4)中的 $e(0)$ 应该是多少呢？为了在面对非连续信号时的一致性，理想采样器的输出信号定义如下。

定义 理想采样器的输出信号定义为其拉普拉斯变换：

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs} \tag{3-7}$$

式中：$e(t)$ 是采样器的输入信号。

当 $e(t)$ 在 $t=kT$，k 为整数，不连续时，令 $e(kT)$ 等于 $e(kT^+)$。符号 $e(kT^+)$ 是指 t 从

右侧接近kT时$e(t)$的值(例如，$t=kT+\Delta$，Δ任意小)。

需要重点强调的是，式(3-7)所界定的采样行为定义连同由下式定义的零阶保持器的传递函数共同产生对采样/保持器(见3-2)的正确的数学描述：

$$G_{ho}(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s} \tag{3-8}$$

同时需要注意的是，如果被采样的信号在采样瞬间含有冲击函数，则采样信号不存在拉普拉斯变换；但是由于在实际中对连续信号的采样过程不会含有冲击函数，因此该限制条件没有实际意义。

例 3.1 设单位阶跃函数$e(t)=u(t)$，因此，$e(nT)=1$，$n=0, 1, 2, \cdots$。求$E^*(s)$。

根据式(3-7)，得：

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)e^{-nTs}=e(0)+e(nT)e^{-Ts}+e(nT)e^{-2Ts}+\cdots$$

或

$$E^*(s)=1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots$$

为了将$E^*(s)$表示成闭式，引入如下关系：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

条件$|x|<1$确保序列收敛，因此，得到$E^*(s)$的闭式表达形式：

$$E^*(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}},\quad |e^{-Ts}|<1$$

◀

例 3.2 设$e(t)=e^{-t}$，求$E^*(s)$。根据式(3-7)，有：

$$\begin{aligned}E^*(s)&=\sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)e^{-nTs}=1+e^{-T}e^{-Ts}+e^{-2T}e^{-2Ts}+\cdots\\&=1+e^{-(1+s)T}+(e^{-(1+s)T})^2+\cdots\\&=\frac{1}{1-e^{-(1+s)T}},\quad |e^{-(1+s)T}|<1\end{aligned}$$

◀

3.4 对$E^*(s)$的估计

由于式(3-7)定义的$E^*(s)$被表示为无穷级数，因此在分析中使用受限。不过，对于大多数时间函数而言，其$E^*(s)$是可以表示成闭式的。此外，$E^*(s)$还存在一种三次型的可用形式。接下来将介绍$E^*(s)$的这两种附加形式。

正如3.3节所言，$E^*(s)$的拉普拉斯反变换可表示为(见式(3-6))：

$$e^*(t)=e(t)\delta_T(t) \tag{3-9}$$

如果再使用复卷积积分得到$e^*(t)$的拉普拉斯变换[3]，便可推导出$E^*(s)$的两个附加表达式。推导过程请参考附录Ⅲ。推导结果为：

$$E^*(s)=\sum_{\text{在}E(\lambda)\text{的极点处}}\left[\mathrm{Res}\left(E(\lambda)\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}\right)\right] \tag{3-10}$$

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(s+jn\omega_s)+\frac{e(0)}{2} \tag{3-11}$$

式中：ω_s是采样角频率，即$\omega_s=2\pi/T$。

函数的留数定义参见2.7节。式(3-10)可用于建立星形变换$E^*(s)$的列表，而式(3-11)将在下一节中证明其在分析中的有用性。下面将举例说明式(3-10)的使用。

例 3.3 已知$E(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$，求$E^*(s)$。

根据式(3-10)可知，

$$E(\lambda)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)}}=\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)(1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)})}$$

因此

$$\begin{aligned}E^*(s)&=\sum_{\text{在}E(\lambda)\text{的极点处}}\left[\operatorname{Res}\left(E(\lambda)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)}}\right)\right]\\&=\frac{1}{(\lambda+2)(1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)})}\bigg|_{\lambda=-1}+\frac{1}{(\lambda+1)(1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)})}\bigg|_{\lambda=-2}\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s+1)}}-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s+2)}}\end{aligned}$$

◀

例 3.4 已知 $e(t)=\sin(\beta t)$，求其星形变换。

$E(s)$为：

$$E(s)=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}=\frac{\beta}{(s-\mathrm{j}\beta)(s+\mathrm{j}\beta)}$$

则 $E^*(s)$可通过下式进行估计：

$$\begin{aligned}E^*(s)&=\sum_{E(\lambda)\text{的极点}}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{\beta}{(\lambda-\mathrm{j}\beta)(\lambda+\mathrm{j}\beta)(1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)})}\right)\right]\\&=\frac{\beta}{(\lambda+\mathrm{j}\beta)(1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)})}\bigg|_{\lambda=\mathrm{j}\beta}+\frac{\beta}{(\lambda-\mathrm{j}\beta)(1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)})}\bigg|_{\lambda=-\mathrm{j}\beta}\\&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta T}}-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta T}}\right]\\&=\frac{\mathrm{e}^{-Ts}\sin(\beta T)}{1-2\mathrm{e}^{-Ts}\cos(\beta T)+\mathrm{e}^{-2Ts}}\end{aligned}$$

其中，用到了欧拉公式：

$$\cos(\beta T)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta T}}{2};\quad \sin(\beta T)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta T}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta T}}{2\mathrm{j}}$$

◀

例 3.5 已知 $e(t)=1-\mathrm{e}^{-t}$，先后利用式(3-3)和式(3-10)求 $E^*(s)$。

首先

$$E(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

根据式(3-3)，得：

$$\begin{aligned}E^*(s)&=\sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-nT})\mathrm{e}^{-nTs}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nTs}-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+s)nT}\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(1+s)T}}\end{aligned}$$

再根据式(3-10)，得：

$$\begin{aligned}E^*(s)&=\sum_{\lambda=-1}^{\lambda=0}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)}}\right)\right]\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(1+s)T}}\end{aligned}$$

◀

接下来，我们把兴趣点放到函数发生了时间延迟的问题上。例如，时间延迟信号：

$$e(t)=e_1(t-t_0)u(t-t_0)$$

根据拉普拉斯变换的位移性(参考附录V)，有

$$E(s) = e^{-t_0 s}\mathscr{L}[e_1(t)] = e^{-t_0 s}E_1(s) \tag{3-12}$$

在这种情况下，式(3-10)不再适用；而需要特殊技术获取以闭式形式表示的延迟信号的星形变换。这些技术会在第4章表述，那时会涉及改进的 z 变换。不过，在时间信号被延迟采样周期整数倍的特殊情况下，可将式(3-10)稍作改变后使用：

$$[e^{-kTs}E_1(s)]^* = e^{-kTs}\sum_{E(\lambda)\text{的极点}}\left[\text{Res}\left(E(\lambda)\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}\right)\right] \tag{3-13}$$

式中：k 为正整数(见习题3.4-4)。

例 3.6 设 $e(t)=[1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$，$T=0.5\text{s}$，求其星形变换。

首先求出 $E(s)$：

$$E(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s+1} = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

可见，式(3-13)中的 k 等于2，且

$$E_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

则根据式(3-13)得：

$$\begin{aligned}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right]^* &= e^{-s}\sum_{\lambda=0,-1}\left[\text{Res}\left(\frac{1}{\lambda(\lambda+1)(1-e^{-0.5(s-\lambda)})}\right)\right]\\ &= e^{-s}\left[\frac{1}{(\lambda+1)(1-e^{-0.5(s-\lambda)})}\bigg|_{\lambda=0} + \frac{1}{\lambda(1-e^{-0.5(s-\lambda)})}\bigg|_{\lambda=-1}\right]\\ &= e^{-s}\left[\frac{1}{(1-e^{-0.5s})} + \frac{-1}{(1-e^{-0.5(s+1)})}\right] = \frac{(1-e^{-0.5})e^{-1.5s}}{(1-e^{-0.5s})(1-e^{-0.5(s+1)})}\end{aligned}$$

◀

3.5 傅里叶变换结果

本节将提出若干关于傅里叶变换的结果。这些结果会对理解采样信号的影响有所帮助。

文献[4]给出了如下傅里叶变换的定义：

$$\mathscr{F}[e(t)] = E(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)e^{-j\omega t}dt \tag{3-14}$$

在许多教科书中用符号 $E(\omega)$ 代替 $E(j\omega)$；我们将进一步讨论这个问题。

回顾附录V中的单边拉普拉斯变换：

$$\mathscr{L}[e(t)] = E(s) = \int_{0}^{+\infty} e(t)e^{-st}dt \tag{3-15}$$

如果 $e(t)$ 在 $t<0$ 时为0，则其傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[e(t)] &= E(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e(t)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} e(t)e^{-j\omega t}dt\\ &= \int_{0}^{+\infty} e(t)e^{-j\omega t}dt = \mathscr{L}[e(t)]\big|_{s=j\omega}\end{aligned}$$

这证明了两个变换的存在。该结果的一般性表示如下：

$$\mathscr{F}[e(t)u(t)] = \mathscr{L}[e(t)u(t)]\big|_{s=j\omega} \tag{3-16}$$

因此，在负数域 $e(t)$ 为0的情况下，如果将 s 替换成 $j\omega$，则 $e(t)$ 的傅里叶变换与拉普拉斯变换相同。这是把傅里叶变换表示成 $E(j\omega)$ 的原因。式(3-16)有一个假设前提，即傅里叶变换和拉普拉斯变换均存在。需要注意的是，对于给定的时间函数，要么两种变换均不存在，要么拉普拉斯变换可能存在而傅里叶变换不存在。

傅里叶变换 $E(j\omega)$ 的曲线称为 $e(t)$ 的频谱。表示频谱的常见方法是将 $E(j\omega)$ 表示为

$$E(j\omega) = |E(j\omega)|e^{j\theta(j\omega)} = |E(j\omega)|\angle\theta(j\omega)$$

画出对应于 ω 的 $|E(\mathrm{j}\omega)|$（幅度谱）以及对应于 ω 的 $\theta(\mathrm{j}\omega)$（相位谱）的曲线。幅度频谱表示在不同频带中信号的相对含量。使用信号频谱的意义在于它能使我们深入理解信号是如何在系统中传输的；对此领域内容不甚熟悉的读者可参阅信号与系统类教科书中的相关内容，如文献[4]。

设一个模拟系统，其输入信号为 $e(t)$，输出信号为 $y(t)$，传递函数为 $G(s)$，即

$$Y(s) = G(s)E(s) \tag{3-17}$$

如果 $e(t)$ 是单位冲击函数 $\delta(t)$，则 $E(s)=1$、$Y(s)=G(s)$。因此，$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ 是系统的单位冲击响应，该系统的传递函数为 $G(s)$。物理系统无法对尚未应用于系统上的输入信号做出响应。这是 $t<0$ 时 $g(t)=0$ 的情形。满足这种条件的系统称为因果系统。在因果系统中，傅里叶变换存在的条件下，当用 $\mathrm{j}\omega$ 替代 s 之后，单位冲击响应的傅里叶变换就等于拉普拉斯变换。从而，对于式(3-17)的系统来讲，傅里叶变换

$$Y(\mathrm{j}\omega) = G(\mathrm{j}\omega)E(\mathrm{j}\omega)$$

由此可知，$G(\mathrm{j}\omega)$ 决定了如何修改输入信号 $e(t)$ 的频谱而形成输出信号 $y(t)$ 的频谱的方式。函数 $G(\mathrm{j}\omega)$ 称为频率响应。

3.6　$E^*(s)$的性质

下面给出 $E^*(s)$ 在 s 平面的两个非常重要的性质。这些性质将经常地用于后续的推导过程中。

性质 1：在 s 域中，$E^*(s)$ 是周期的，周期为 $\mathrm{j}\omega_s$。

该性质可通过式(3-3)和式(3-10)得以证明，也可以通过式(3-11)得以证明。根据式(3-3)，有：

$$E^*(s+\mathrm{j}m\omega_s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(nT)\mathrm{e}^{-nT(s+\mathrm{j}m\omega_s)} \tag{3-18}$$

由于 $\omega_s T=(2\pi/T)\cdot T=2\pi$，以及欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$

得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nm\omega_s T} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nm2\pi} = 1,\quad m\text{ 为整数} \tag{3-19}$$

于是，式(3-18)成为：

$$E^*(s+\mathrm{j}m\omega_s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(nT)\mathrm{e}^{-nTs} = E^*(s) \tag{3-20}$$

性质 2：如果 $E(s)$ 在 $s=s_1$ 存在一个极点，那么 $E^*(s)$ 必在 $s=s_1+\mathrm{j}m\omega_s$，$m=0$，$\pm1$，$\pm2$，…存在极点。

该性质可根据式(3-11)得以证明。设 $e(t)$ 在所有采样点均是连续的，于是，有：

$$E^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E(s+\mathrm{j}n\omega_s) = \frac{1}{T}[E(s)+E(s+\mathrm{j}\omega_s)+E(s+2\mathrm{j}\omega_s) + \cdots + E(s-\mathrm{j}\omega_s)+E(s-2\mathrm{j}\omega_s)+\cdots] \tag{3-21}$$

如果 $E(s)$ 在 $s=s_1$ 存在一个极点，那么，式(3-21)中的每一项在 $s=s_1+\mathrm{j}m\omega_s$，$m$ 为整数处均存在极点。

重要的是应该注意到，无法等价地叙述 $E^*(s)$ 的零点；也就是说，$E(s)$ 的零点分布不能唯一确定 $E^*(s)$ 的零点分布。但是，与 $E^*(s)$ 的性质 1 类似，零点分布也是周期的，且周期亦为 $\mathrm{j}\omega_s$。

图 3-8 给出了 $E^*(s)$ 零极点分布的一个示例。在如图 3-8 所示分布中，位于 $\frac{-\omega_s}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{\omega_s}{2}$ 之间的范围称为 s 平面中的主带。注意如果已知 $E^*(s)$ 在主带上的零极点分布，则可得知其在整个 s 平面的零极点分布。

参见如图 3-8 所示分布，如果 $E(s)$ 在 $-\sigma_1+\mathrm{j}\omega_1$ 存在一个极点，那么，采样后 $E^*(s)$

将在$-\sigma_1+\mathrm{j}(\omega_1+\omega_s)$处获得极点。相反，如果$E(s)$在$-\sigma_1+\mathrm{j}(\omega_1+\omega_s)$存在一个极点，则采样将使$E^*(s)$在$-\sigma_1+\mathrm{j}\omega_1$处获得极点。实际上，$E(s)$分布在$-\sigma_1+\mathrm{j}(\omega_1+k\omega_s)$，$k$为整数的极点，终将导致与其分布一致的$E^*(s)$的极点，而无论$k$取怎样的整数值。

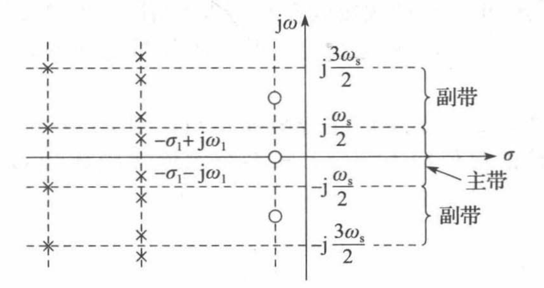


图 3-8 $E^*(s)$的零极点分布

以上结论也可从图 3-9 的示例中看出来。注意，由于图中的两个信号在每个采样时刻取值相同，因此它们具有相同的星形变换结果。还要注意的是$\omega_1=\omega_s/4$或$\omega_s=4\omega_1$。由于

$$
\begin{aligned}
E_1(s) &= \mathscr{L}[\cos(\omega_1 t)] \\
&= \frac{s}{s^2+\omega_1^2} \\
&= \frac{s}{(s+\mathrm{j}\omega_1)(s-\mathrm{j}\omega_1)}
\end{aligned}
$$

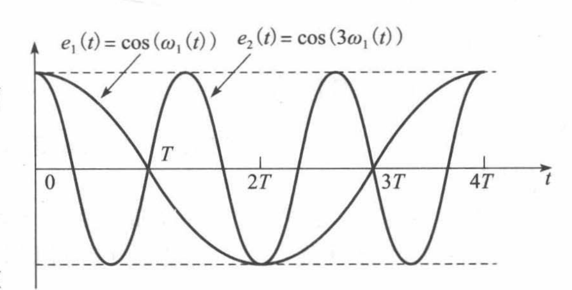


图 3-9 具有相同星形变换结果的两个信号

因此，$E_1(s)$在$s=\mathrm{j}\omega_1$处存在极点。而由于

$$
\begin{aligned}
E_2(s) &= \mathscr{L}[\cos(3\omega_1 t)] \\
&= \frac{s}{(s+\mathrm{j}3\omega_1)(s-\mathrm{j}3\omega_1)}
\end{aligned}
$$

因此，$E_2(s)$在$s=-3\mathrm{j}\omega_1=\mathrm{j}(\omega_1-\omega_s)$处存在极点。$E_1(s)$的另一个极点出现在$s=-\mathrm{j}\omega_1$处，而$E_2(s)$的另一个极点则出现在$s=\mathrm{j}3\omega_1=\mathrm{j}(-\omega_1+\omega_s)$处。

接下来的讨论基于前文介绍的傅里叶变换结果展开。设信号$e(t)$的傅里叶变换为$E(\mathrm{j}\omega)$，其幅度频谱$|E(\mathrm{j}\omega)|$如图 3-10a 所示，则$E^*(\mathrm{j}\omega)$便有如图 3-10b 所示的幅度频谱。这一点可以通过令式(3-21)的$s=\mathrm{j}\omega$得到印证。

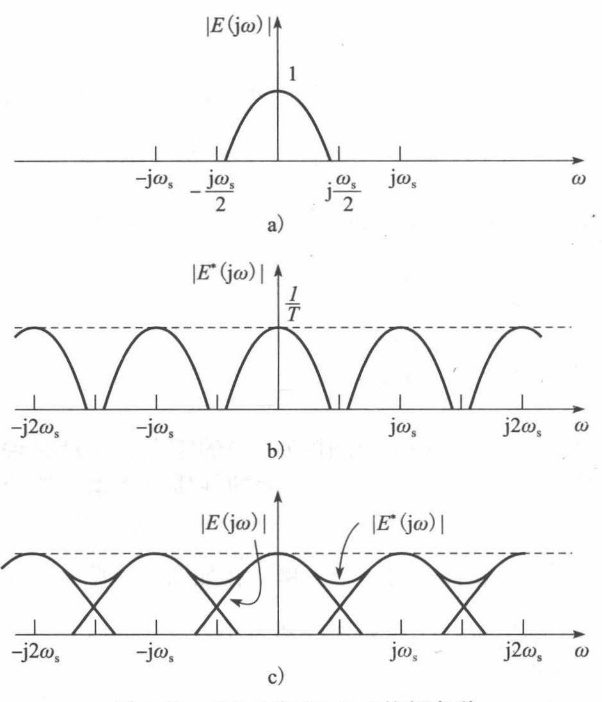


图 3-10 $E(\mathrm{j}\omega)$和$E^*(\mathrm{j}\omega)$的频率谱

$$E^*(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{T}[E(\mathrm{j}\omega)+E(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_s)+E(\mathrm{j}\omega+2\mathrm{j}\omega_s)+\cdots$$
$$+E(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_s)+E(\mathrm{j}\omega-2\mathrm{j}\omega_s)+\cdots]+e(0)/2 \tag{3-22}$$

因此，理想的采样效果是将位于中心的原始频谱重复地复制在 ω_s、$2\omega_s$、$-\omega_s$、$-2\omega_s$ 等点上。

理想滤波器的特点是，其通带内增益为 1、通带以外增益为 0。当然，这样的滤波器在物理上是不可实现的[5]。由图 3-10b 可以看出，如果理想低通滤波器的带宽为 $\omega_s/2$，且 $E(\mathrm{j}\omega)$中最高频率小于 $\omega_s/2$，$E(\mathrm{j}\omega)$便可得以复原，$e(t)$也因此能够完全复原，这显然正是香农采样定理的基本内容[6]。

香农采样定理。 对于时变信号 $e(t)$ 而言，如果其傅里叶变换的结果中不存在大于 f_0 Hz 的频率分量，则该信号便可由一组采样点唯一地确定下来，这组采样点的采样间隔为 $1/(2f_0)$秒。

假设将如图 3-10b 所示频谱中的 ω_s 降低到 $E(\mathrm{j}\omega)$的最高频率分量之内，所得 $E^*(\mathrm{j}\omega)$的幅度频谱如图 3-10c 所示；显然，而这种情况下，不管是理想滤波器，还是实际滤波器，没有哪种滤波方案能够将 $e(t)$恢复出来。因此，在选择控制系统中采样器的采样速率时，其采样频率务必大于被采样信号中具有显著幅度的最高频率分量的 2 倍。

但应强调的是理想采样器不是物理可实现的，因此，如图 3-10 所示频谱也不是物理系统中实际存在的信号频谱。经对保持器的研究，上述思路可以扩展到物理系统中流动的信号上。

3.7　数据重构

在多数的含采样数据的反馈控制系统中，需要从采样信号中重构连续时间信号。我们将简单的含采样数据的控制系统框图重画于图 3-11 中。为使信号 $e(t)$的最高频率分量小于 $\omega_s/2$，假设采样信号在频率上是限宽的，则 $E^*(\mathrm{j}\omega)$将具有如图 3-10b 所示的频谱，理论上，该信号能够用理想低通滤波器重构出来。然而，由于在物理可实现的系统中不存在理想滤波器，因此，必须使用近似方法。从某种意义上说，实际数据保持器是理想低通滤波器的近似装置。

读者可能会问：为什么要讨论如图 3-11 所示的数据采样系统呢？该系统包含一个采样器，该采样器仅在离散时间瞬间检测连续时间信号，而使用数据保持器的目的则在于试图将原始的信号重构出来！我们的答复是多数控制系统因其硬件实现技术实际上就是按照上述方式运行的。更重要的是，我们需要在采样器和数据保持器之间增加数字补偿器以改善系统性能，此时需要采样器。无论如何，本章讨论的数据保持器是分析和设计闭环系统的前提。

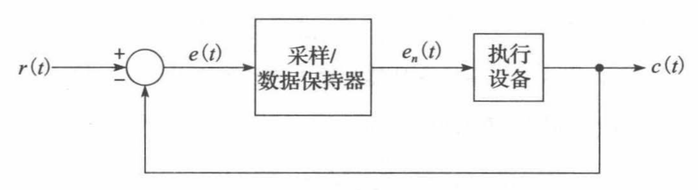


图 3-11　含采样数据的控制系统

数据重构的常用方法是多项式外推。使用关于 $t=nT$ 点的泰勒级数展开，可将 $e(t)$表示为：

$$e(t)=e(nT)+e'(nT)(t-nT)+\frac{e''(nT)}{2!}(t-nT)^2+\cdots \tag{3-23}$$

式中：“′” 和 “″” 符号表示导数。

$e_n(t)$定义为在第 n 个采样周期对 $e(t)$的重构，即

$$e_n(t)\cong e(t),\quad nT\leqslant t<(n+1)T \tag{3-24}$$

因此，$e_n(t)$是数据保持器的输出。由于$e(t)$只能以采样形式进入数据保持器，因此其导数值未知，不过，该导数可用后向差分近似。后向差分如下：

$$e'(nT) = \frac{1}{T}[e(nT) - e[(n-1)T]] \tag{3-25}$$

$$e''(nT) = \frac{1}{T}[e'(nT) - e'[(n-1)T]] \tag{3-26}$$

将式(3-25)代入式(3-26)，得到：

$$e''(nT) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{T}[e(nT) - e[(n-1)T]] - \frac{1}{T}[e[(n-1)T] - e[(n-2)T]]\right]$$

或者

$$e''(nT) = \frac{1}{T^2}[e(nT) - 2e[(n-1)T] + e[(n-2)T]] \tag{3-27}$$

下面讨论基于前述关系的三种类型的数据保持器(零阶、一阶及分数阶保持器)。

1. 零阶保持器

如果保持器只使用式(3-23)中的第一项，则称其数据保持器为零阶保持器。在此假设函数$e(t)$在两次采样之间几乎不变，即近似等于前次采样瞬间的函数取值。因此，对于零阶保持器，有：

$$e_n(T) = e(nT), \quad nT \leqslant t < (n+1)T \tag{3-28}$$

回想一下我们曾对零阶保持器的定义，即利用式(3-1)，我们将$e_n(t)$定义为$\bar{e}(t)$。需要注意的是，由于不需要存储器，这种数据保持器持有最简单的结构。利用式(3-2)，我们还推导出了零阶保持的传递函数。不过，该传递函数还可以通过更简单的方法导出，这种简单方法可以使推导其他类型采样器传递函数的工作更为容易。由图 3-5 给出的采样/数据保持装置的模型可知，数据保持器的输入仅仅是冲击函数，如果这个输入$e_i(t)$是单位冲激函数，则数据保持器的输出信号$e_o(t)$则如图 3-12 所示。因此，

$$e_o(t) = u(t) - u(t-T)$$

及

$$E_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}$$

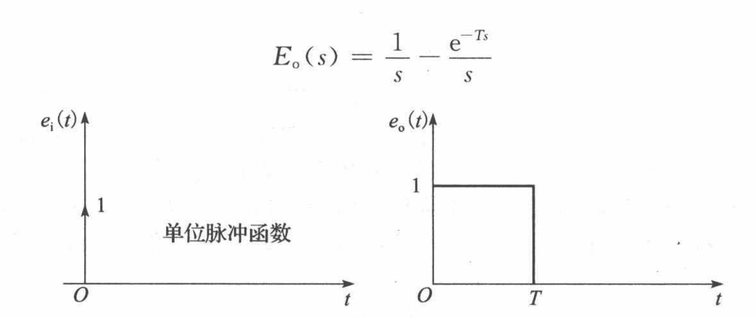


图 3-12 零阶保持器的输入信号和输出信号

由于$E_i(s)=1$，所以零阶保持器的传递函数为：

$$G_{h0}(s) = \frac{E_0(s)}{E_t(s)} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \tag{3-29}$$

这正是式(3-2)示出的结果，此外，需要提醒的是，由于式(3-29)是在假设零阶保持器的输入为冲击函数的前提下推导出来的，因此该式不是实际物理装置的传递函数。如前文所述，如果用式(3-7)从数学角度来描述采样行为、用式(3-29)联合式(3-7)从数学角度来描述数据保持，那么，我们将获得正确描述全采样/保持行为的数学模型。

为了获得零阶保持器的频率响应，我们来考察如下表达式：

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}e^{j(\omega T/2)}e^{-j(\omega T/2)} = \frac{2e^{-j(\omega T/2)}}{\omega}\left[\frac{e^{j(\omega T/2)} - e^{-j(\omega T/2)}}{2j}\right]$$

$$= T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}e^{-j(\omega T/2)} \tag{3-30}$$

因为

$$\frac{\omega T}{2}=\frac{\omega}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_s}\right)=\frac{\pi\omega}{\omega_s}$$

可将表达式(3-30)改写为：

$$G_{h0}(j\omega)=T\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s}e^{-j(\pi\omega/\omega_s)} \tag{3-31}$$

于是

$$|G_{h0}(j\omega)|=T\left|\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s}\right| \tag{3-32}$$

及

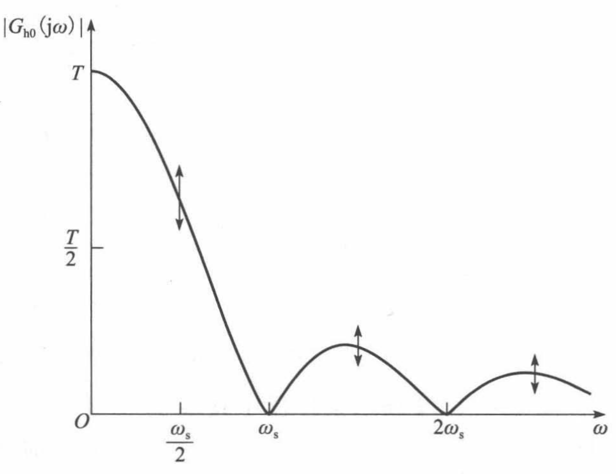
$$\angle G_{h0}(j\omega)=-\frac{\pi\omega}{\omega_s}+\theta,\quad \theta=\begin{cases}0, & \sin(\pi\omega/\omega_s)>0\\ \pi, & \sin(\pi\omega/\omega_s)<0\end{cases} \tag{3-33}$$

$G_{h0}(j\omega)$的幅度和相位曲线图如图 3-13 所示。

简单地说，为了解释零阶保持器的频率响应，必须首先记住，该数据保持器的前侧级联着一个理想采样器。现在，我们假设将频率 ω_1 的正弦曲线施加于理想采样器，其中，$\omega_1<\omega_s/2$，并对 $e(t)=2\cos(\omega_1 t)$进行傅里叶变换，得到

$$E(j\omega)=\mathscr{F}[2\cos(\omega_1 t)]$$
$$=\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)$$

可以看出，此正弦曲线的频谱为 2 个单位脉冲函数，如图 3-14a 所示。图中，箭头表示冲击函数，箭头的长度表示权值。再由式(3-22)可知，采样器的输出包含着由频域冲击函数所表示的时域频率，如图 3-14b 所示。因此，零阶保持器的频率响应可用于确定该数据保持器输出信号的幅度谱，输出信号分量如图 3-14c 所示。于是，如图 3-15 所示的信号类型具有如图 3-14所示的频谱。



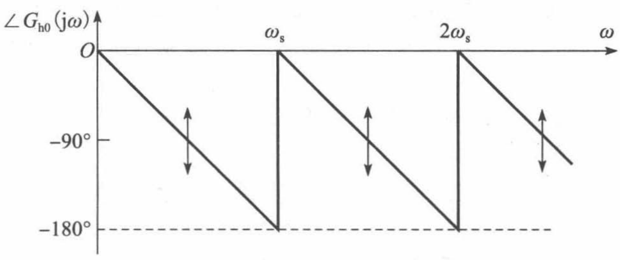


图 3-13　零阶保持器的频率响应

需要强调的是，如果输入信号的频率为：

$$\omega=k\omega_s\pm\omega_1,\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

输出信号幅度谱便与如图 3-14c 所示的幅度谱相同。因此，$\omega_1>\omega_s/2$ 的任意频率将映射成$0<\omega_1<\omega_s/2$ 的频率范围。这种效应称为频率重叠或频率混叠。这些映射频率将被系统当作$e(t)$的低频信息，这通常是不能容忍的。可以通过增加 ω_s 或在采样器前放置一个抗混叠模拟滤波器来防止这种频率混叠。抗混叠滤波器是一个低通滤波器，它可滤除 $e(t)$中任何大于$\omega_s/2$ 的频率。由于低通滤波器会引入相位滞后，抗混叠滤波器的截止频率不能太低，以至于造成控制系统失稳。最后一点请注意，如图 3-14 所示采样器中当 $\omega_1\ll\omega_s/2$ 时 $E^*(j\omega)$的高频分量将在 $G_{h0}(j\omega)$零点附近出现；因此，采样器和零阶保持器对信号的影响不大。

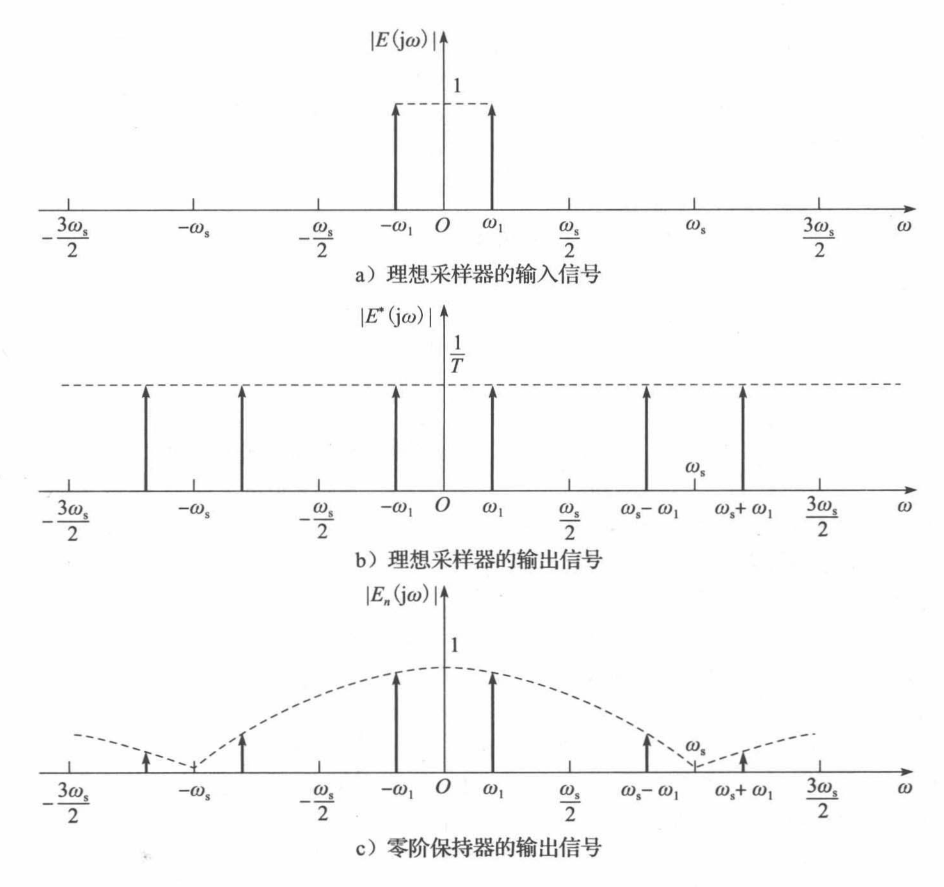


图 3-14　采样器和零阶保持器的正弦曲线响应

设如图 3-14 所示采样器中频率 ω_1 等于 $\omega_s/2$，这时频率分量 ω_1 和 $\omega_s-\omega_1$ 重叠，同时数据保持器的输出是输入正弦波相位的函数。注意，数据保持器输出的幅度范围可从 0 到大于输入信号幅度的一个数值，我们用标示在如图 3-13 所示响应中 $k\omega_s+\omega_s/2$，$k=0, 1, 2, \cdots$ 处的箭头来强调这一影响。

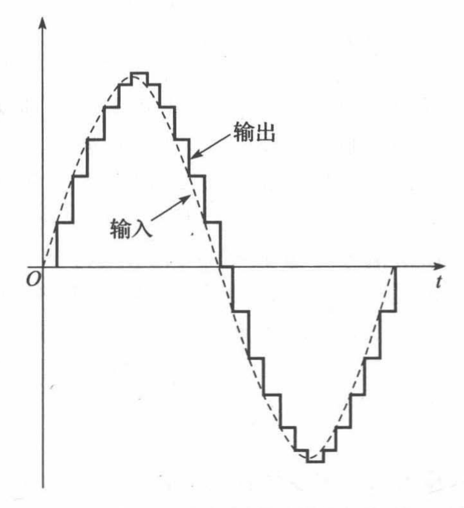


图 3-15　对应的采样/零阶保持器的正弦波输入及其输出

2. 一阶保持器

用式(3-23)的前两项可实现一阶保持器，即

$$e_n(t)=e(nT)+e'(nT)(t-nT),\quad nT\leqslant t<(n+1)T \tag{3-34}$$

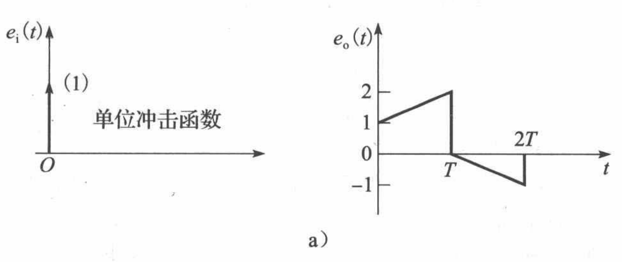
式中：$e'(nT)$可根据式(3-25)得到：

$$e'(nT)=\frac{e(nT)-e[(n-1)T]}{T} \tag{3-35}$$

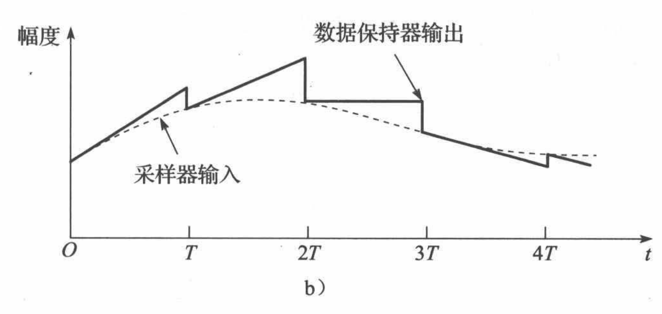
这一表达式说明，一个给定时间段内的预测函数是一条直线，其直线斜率由该函数在前一时间段内采样瞬间的值确定。由于在 $t=nT$ 时要用到 $e[(n-1)T]$，因此在实现该数据保持器时需要注意提供内存。

为确定一阶保持器的传递函数，假设输入函数为单位冲击函数，然后根据式(3-34)和式(3-35)得到图 3-16a 给出的输出：

$$e_o(t)=u(t)+\frac{1}{T}tu(t)-2u(t-T)-\frac{2}{T}(t-T)u(t-T)+u(t-2T)$$
$$+\frac{1}{T}(t-2T)u(t-2T)$$



a）



b）

图 3-16　一阶保持器的输出举例

因为 $E_i(s)=1$，所以

$$G_{h1}(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{s}-\frac{2e^{-Ts}}{s}+\frac{2e^{-2Ts}}{s}+\frac{1}{Ts^2}(1-2e^{-Ts}+e^{-2Ts})$$

或者

$$G_{h1}(s)=\frac{1+Ts}{T}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right]^2 \tag{3-36}$$

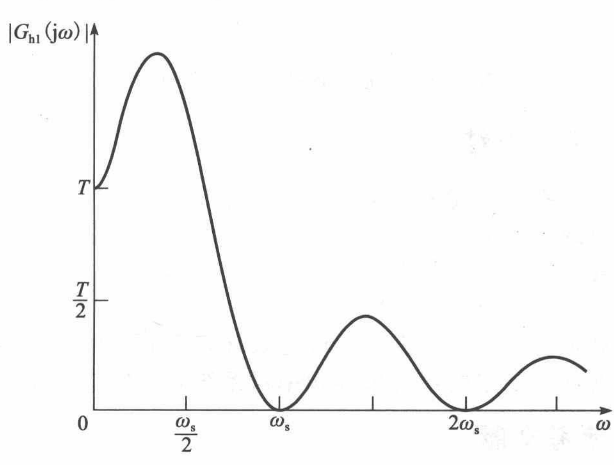
图 3-16b 给出了一个采样器和一阶保持器的输入输出波形的示例。

根据式(3-36)，可得一阶保持器的频率响应为：

$$G_{h1}(j\omega)=\frac{1+j\omega T}{T}\left[\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\right]^2$$

$$|G_{h1}(j\omega)|=T\sqrt{1+\frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_s^2}}\left[\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s}\right]^2 \tag{3-37}$$

$$\angle G_{h1}(j\omega)=\arctan\left(\frac{2\pi\omega}{\omega_s}\right)-\frac{2\pi\omega}{\omega_s} \tag{3-38}$$



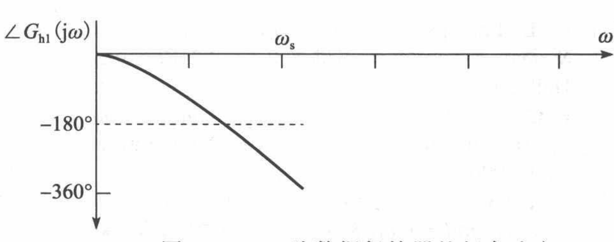


图 3-17　一阶数据保持器的频率响应

一阶保持器的幅度特性和相位特性如图 3-17 所示。需要注意的是，与零阶保持器相比，在零频率上，一阶保持器与理想低通滤波器更近似。但是当 ω 较大时，零阶保持器对理想低通滤波器的近似程度又会高于一阶保持器。再次考察采样过程中产生的频带（见

图 3-14b)。如果 $\omega_1 \ll \omega_s/2$，一阶保持器对采样信号的重构效果会优于零阶保持器。但是若 ω_1 与 $\omega_s/2$ 具有相同的阶数，则零阶保持器对采样信号的重构效果会优于一阶保持器。因此，在某些应用中，零阶保持器优于一阶保持器。而在任何情况下，出于成本的考虑，零阶保持器都是迄今为止最常用的装置。

3. 分数阶保持器

一阶保持器，本质上在执行从一个采样间隔到下一个采样间隔的线性外推。就是说，用从 $(n-1)T$ 到 nT 信号的近似斜率可获得信号在 $(n+1)T$ 时刻的估值，这种方法所产生的误差可通过改用前一个时间间隔的斜率的分数获得降低，如图 3-18 所示。图中，假设输入是单位冲击信号、k 的取值范围为 0 到 1。如此数据保持器的频率响应如图 3-19 所示。可以看到，$k=0$ 所对应的保持器就是零阶保持器，而 $k=1$ 时，便可获得一阶保持器。尽管除了某些特定情况，很难确定 k 的最优值，分数阶保持器还是能够在进行数据保持器频率响应与采样信号频谱的匹配中，产生具有最小误差的数据外推。使用前面的方法，可得分数阶保持器的传递函数为：

$$G_{\mathrm{hk}}(s) = (1 - k\mathrm{e}^{-Ts})\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s} + \frac{k}{Ts^2}(1-\mathrm{e}^{-Ts})^2 \tag{3-39}$$

该传递函数的推导留作习题 3.7-11。

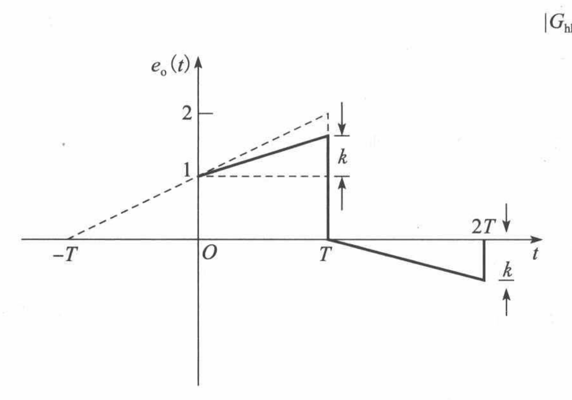


图 3-18　分数阶保持器的冲击响应

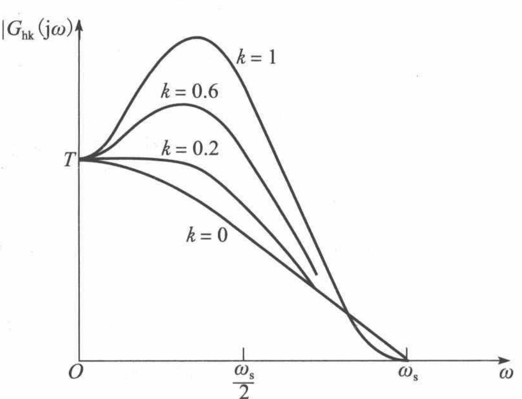


图 3-19　分数阶保持器的幅频响应

3.8 小结

本章所述内容是学习含采样数据的控制系统的重要基础。采样和重构是这类系统不可或缺的组成部分，在应对分析或设计更复杂的问题之前，能够深刻理解采样和重构非常重要。图 3-5 给出的采样/保持器的数学模型是分析及设计数字控制系统各种问题的基础。

本章所涉及主题的一个重要结论，是对于给定的信号，给出了选择采样周期 T 的近似规则。虽然本章强调了确定采样频率时了解信号频率成分的重要性，下一章的内容会继续展现所确定的系统采样频率对系统频率响应的重要性。

参考文献

[1] C. L. Phillips and J. Parr, *Feedback Control Systems,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[2] F. G. Stremler, *Introduction to Communication Systems,* 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1990.

[3] G. Doetsch, *Guide to the Applications of the Laplace and z-Transforms,* 2nd ed. New York: Van Nostrand-Reinhold, 1971.

[4] C. L. Phillips, J. Parr, and E. Riskin, *Signals, Systems, and Transforms,* 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2007.

[5] M. E. Van Valkenburg, *Network Analysis.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1974.

[6] R. M. Oliver, J. R. Pierce, and C. E. Shannon, "The Philosophy of Pulse Code Modulation," *Proc. IRE* 36(11), pp. 1324–1331, 1948.

[7] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications,* 8th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 2009.

[8] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems,* 3rd ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

[9] B. C. Kuo, *Digital Control Systems,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1995.

[10] C. L. Phillips, D. L. Chenoweth, and R. K. Cavin III, "z-Transform Analysis of Sampled Data Control Systems without Reference to Impulse Functions," *IEEE Trans. Educ.* E-11, pp. 141–144, 1968.

[11] C. R. Wylie and L.C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics,* 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1995.

习题

3.2-1 (1) 陈述星形变换的定义。

(2) 陈述 z 变换的定义。

(3) 导出函数 $e(t)$的星形变换 $E^*(s)$和 z 变换 $E(z)$之间的关系。

3.3-1 用式(3-3)界定的理想采样器对信号 $e(t)$采样。

(1) 列出 $e(t)$可从 $e^*(t)$完全恢复的条件，即采样过程不造成信息损失的条件。

(2) 陈述(1)问所列举的哪个条件可呈现于物理系统中。切记理想采样器本身是不可物理实现的。

(3) 思考(2)问的答案，陈述为何可以成功地采用该系统进行采样。

3.4-1 用式(3-10)给出的留数法，求下列函数的星形变换。

(1) $E(s)=\dfrac{20}{(s+2)(s+5)}$ (2) $E(s)=\dfrac{5}{s(s+1)}$

(3) $E(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$ (4) $E(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$

(5) $E(s)=\dfrac{s^2+5s+6}{s(s+4)(s+5)}$ (6) $E(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+5}$

3.4-2 写出下列函数的星形变换 $E^*(s)$，并将 $E^*(s)$表示成闭式。

(1) $e(t)=\mathrm{e}^{at}$ (2) $E(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2Ts}}{s-a}$

(3) $e(t)=\mathrm{e}^{a(t-2T)}u(t-2T)$ (4) $e(t)=\mathrm{e}^{a(t-2T)}u(t-T/2)$

3.4-3 设 $e(t)=\mathrm{e}^{-3t}$。

(1) 求 $E^*(s)$，并将其表示成级数形式。

(2) 求 $E^*(s)$，并将其表示成闭式。

(3) 求 $E^*(s)$，并将其表示成不同于(1)问的另一种级数形式。

3.4-4 给出 $e(t-kT)u(t-kT)$的星形变换，k 为整数，其中 $e(t)$的星形变换为 $E^*(s)$。请将导出式以式(3-3)为基础。

3.4-5 针对下式，求 $E^*(s)$：

$$E(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}$$

3.4-6 针对下式，设 $T=0.5\mathrm{s}$，求 $E^*(s)$：

$$E(s)=\frac{(1-\mathrm{e}^{-0.5s})^2}{0.5s^2(s+1)}$$

3.4-7 设 $E^*(s)=[e(t)]^*=1$。

(1) 求 $e(kT)$，其中，k 取所有值。

(2) $e(t)$是否存在？证明你的答案。

(3) 勾勒出两个满足(1)问条件的连续时间函数。

(4) 写出(3)问给出的两个函数方程。

3.6-1 (1) 对如下两个函数，设 $T=0.1\mathrm{s}$，求 $E^*(s)$。分别用时间函数法和零极点法解释为什么两个变换相等。

① $e_1(t)=\cos(4\pi t)$

② $e_2(t)=\cos(16\pi t)$

(2) 写出具有相同 $E^*(s)$的三次方程。

3.6-2 针对习题 3.4-1 中的函数，比较 $E^*(s)$和 $E(s)$在 s 平面上的零极点分布。

3.7-1 满足叠加原理的系统是线性系统。请问采样/零阶保持器是线性的吗？证明你的答案。

3.7-2　设将信号 $e(t)=\cos[(\omega_s/2)t+\theta]$用于理想采样器和零阶保持器。

(1) 绘制零阶保持器输出的时间函数，证明该时间幅值是相位角 θ 的函数。

(2) 求解数据保持器输出信号的傅里叶级数，证明在频率 $\omega=\omega_s/2$ 处，该信号的分量是相位角 θ 的函数。

3.7-3　(1) 将一个 2Hz 的正弦波施加到采样/零阶保持器这一联合体上，设采样频率是 10Hz。列出输出函数中所有小于 50Hz 的频率。

(2) 输入正弦波的频率改为 8Hz，重做(1)问。

(3) (1)问和(2)问的结果是相同的。另外给出 3 个大于 50Hz 的正弦波，使之结果仍然与(1)问和(2)问相同。

3.7-4　已知 $e(t)=3\sin(4t)+2\sin(7t)$

(1) 列出存在于 $e(t)$中小于 $\omega=50\text{rad/s}$ 的所有频率。

(2) 在频率 $\omega_s=22\text{rad/s}$ 处对信号 $e(t)$采样。列出存在于 $e^*(t)$中所有小于 $\omega=50\text{rad/s}$ 的频率。

(3) 将信号 $e^*(t)$加载到零阶保持器上。列举保持器输出中所有小于 $\omega=50\text{rad/s}$ 的频率。

(4) 将 $e^*(t)$加载到一阶保持器，重做(3)问。

3.7-5　将信号 $e(t)=4\sin(7t)$加载到 $\omega=4\text{rad/s}$ 的采样/零阶保持器上。

(1) 请问输出信号幅值最大时的频率分量是多大?

(2) 求出问题(1)所得频率下的幅值和相位。

(3) 画出输入信号和(2)问中的时间分量。

(4) 求(2)问的幅值与输入频率 $\omega=7\text{rad/s}$ 时输出信号频率分量之比。

3.7-6　众所周知，增加相位滞后，将使闭环系统的稳定性降低。第 3.7 节谈到，采样/数据保持器会增加系统的相位滞后。对于一个具有 10Hz 带宽的特定的模拟控制系统来说，这意味着，该系统近乎仅对小于 10Hz 的频率产生响应，近乎不对高于 10Hz 的频率产生响应。将一个采样/零阶保持器添加到该控制系统。

(1) 可以确定的是该系统在系统带宽内可容忍最大增加 10°的相位滞后。请确定所能允许的近乎最小的采样频率及采样周期 T。

(2) 最大相位滞后改为 5°，重做(1)问。

(3) 最大相位滞后改为 20°，重做(1)问。

3.7-7　如图 3-15 所示，将一个正弦波送入采样/零阶保持器后，所获输出为一个畸变的正弦波。

(1) 设正弦波的幅度为 1、频率为 2Hz，并设 $f_s=12\text{Hz}$，求输出在 $f_1=2\text{Hz}$ 处的幅度和相位分量。

(2) 设正弦波的幅度为 1、频率为 2Hz，并设 $f_s=12\text{Hz}$，求输出在$(f_s-f_1)=10\text{Hz}$ 处的幅度和相位分量。

(3) 将采样/零阶保持器换成采样/一阶数据保持器，重做(1)问和(2)问。

(4) 分别讨论在(1)问、(2)问和(3)问的情况下，数据保持器的输出畸变。

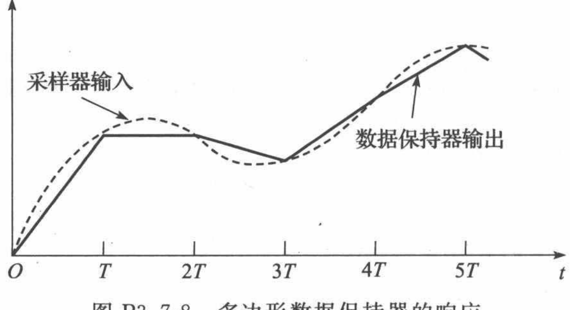


图 P3.7-8　多边形数据保持器的响应

3.7-8　多边形数据保持器是一种通过直线近似实现采样信号重构的装置，如图 P3.7-8 所示。证明该数据保持器的传递函数为：

$$G(s)=\frac{e^{-Ts}(1-e^{-Ts})^2}{Ts^2}$$

该数据保持器是否可物理实现?

3.7-9　如图 P3.7-9 所示，所构建的数据保持器通过直线近似来重构采样信号。我们注意到，这个数据保持器是有 T 秒延迟的多边形数据保持器(见习题 3.7-8)。请推导这个数据保持器的传递函数。该数据保持器是否可物理实现?

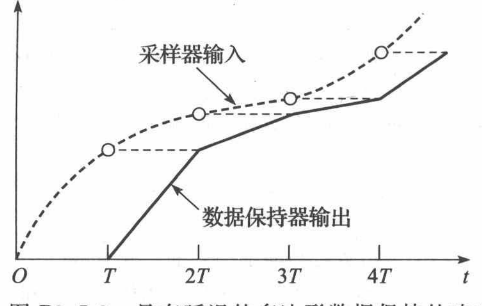


图 P3.7-9　具有延迟的多边形数据保持的响应

3.7-10 针对习题 3.7-8 和 3.7-9 的数据保持器，绘制频率响应(分贝)和相位的关系曲线。请注意可实现的数据保持器在相位上的影响。

3.7-11 推导分数阶保持器的传递函数(见式(3-39))。

3.7-12 图 P3.7-12 给出的也是一个数据保持器的输出，该数据保持器在采样周期的前半时段将输出限定在采样瞬间的输入值，而在后半周期使输出转而为 0。

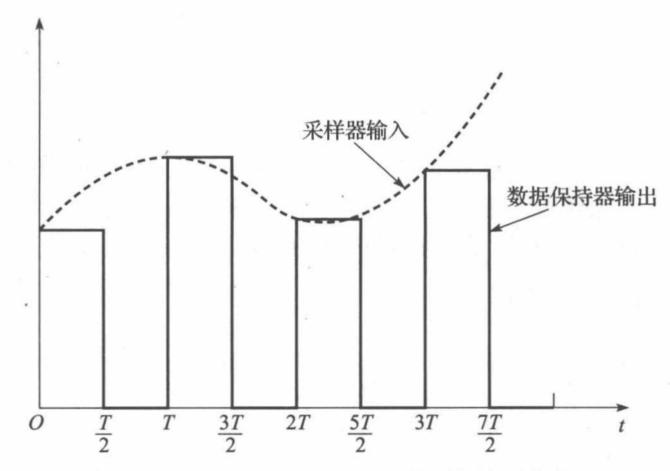


图 P3.7-12 习题 3.7-12 的数据保持器输出

(1) 求该数据保持器的传递函数。

(2) 绘制该数据保持器的频率响应。

(3) 与零阶保持器的频率响应相比，讨论哪种保持器更有利于数据重构。

第4章

开环离散时间系统

4.1 引言

前面的章节讨论了离散时间系统以及 z 变换、采样和数据重构等议题。这一章将利用它们导出开环离散时间系统的分析方法(在这里，推导是必需的，因为理想采样器并不具备传递函数)。本章讨论的分析方法会在下一章的闭环系统中沿用。

4.2 $E(z)$与$E^*(s)$的联系

为了顺利展开对开环系统的分析，我们先确立在 $E(z)$与$E^*(s)$之间存在的联系。首先，式(2-7)给出了数字序列$\{e(k)\}$的 z 变换定义：

$$\mathscr{Z}[\{e(k)\}] = E(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + e(1)z^{-2} + \cdots \tag{4-1}$$

此外，用式(3-7)将时间函数 $e(t)$的星形变换定义为：

$$E^*(s) = e(0) + e(T)\mathrm{e}^{-Ts} + e(2T)\mathrm{e}^{-2Ts} + \cdots \tag{4-2}$$

显然，这两个变换具有相似性。事实上，如果设时间序列$\{e(k)\}$源于对时间函数 $e(t)$的采样[例如，设式(4-1)的 $e(k)$等于式(4-2)的 $e(kT)$]，并设式(4-2)中的 $\mathrm{e}^{sT}=z$，式(4-2)就成为 z 变换，这时，有

$$E(z) = E^*(s)\big|_{\mathrm{e}^{sT}=z} \tag{4-3}$$

于是我们看到，为了确立 $E(z)$与$E^*(s)$之间存在的联系，要把 z 变换视为一种特殊的拉普拉斯变换。在分析离散时间系统时，通常利用式(4-3)进行换元，再用 z 变换来替代星形变换。如果需要获知星形变换，可以先利用 z 变换表求 $E(z)$，然后利用式(4-3)反求出 $E^*(s)$，请看下例。

例 4.1 设

$$E(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

根据附录Ⅵ给出的 z 变换表，得到

$$E(z) = E^*(s)\big|_{\mathrm{e}^{sT}=z} = \frac{z(\mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-2T})}{(z-\mathrm{e}^{-T})(z-\mathrm{e}^{-2T})}$$

于是

$$E^*(s) = \frac{\mathrm{e}^{Ts}(\mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-2T})}{(\mathrm{e}^{Ts}-\mathrm{e}^{-T})(\mathrm{e}^{Ts}-\mathrm{e}^{-2T})}$$

可以将此结果与例 3.3 根据式(3-10)导出的结果进行核对。 ◀

需要注意的是，例 4.1 的$E^*(s)$在 s 平面的零极点数是无限的，而 $E(z)$仅有一个零点 $z=0$ 和两个极点 $z=\mathrm{e}^{-T}$和 $z=\mathrm{e}^{-2T}$，因此，z 变换的使用会使任何一种借助零极点的分析方法得到极大程度的简化，同时也使数据采样系统的分析方法的优势凸显出来。

至此，可以利用替换式(4-3)，根据式(3-10)计算出 $E(z)$：

$$E(z) = \sum_{\text{在}E(\lambda)\text{的极点处}} \left[\mathrm{Res}\left(E(\lambda)\frac{1}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{T\lambda}}\right)\right] \tag{4-4}$$

该表达式在生成 z 变换表时非常有用。正是因为 $E(z)$与$E^*(s)$之间的这种联系，第 2 章所讨论的关于 z 变换的定理也适用于星形变换。令 $z=\mathrm{e}^{Ts}$之后，就可从 z 变换表得到星形变换表，因此通常并不单独给出星形变换表。

4.3 脉冲传递函数

现在，我们来讨论开环数据采样系统输出的 z 变换表达式。因为将输出信号反馈后会形成闭环系统，所以闭环系统要用到这个表达式。

我们来看图 4-1a 给出的开环系统，图中，$G_p(s)$是执行机构的传递函数。请注意，$G(s)$是执行机构传递函数和零阶保持器传递函数的乘积，即

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s)$$

于是，图 4-1a 所示系统可以用图 4-1b 所示系统表示。若图 4-1b 所示系统的表达式是给定的，$G(s)$就必须包含数据保持器的传递函数。一般来讲，我们并不单独给出数据保持器的传递函数，而是将它与其后面环节的传递函数联合起来。

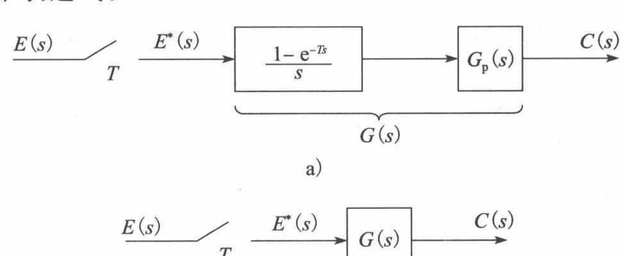


图 4-1 开环数据采样系统

图 4-1 所示系统中，

$$C(s) = G(s)E^*(s) \tag{4-5}$$

设在各采样时刻，$c(t)$是连续的，则根据式(3-11)，有：

$$C^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(s+jn\omega_s) = [G(s)E^*(s)]^* \tag{4-6}$$

式中：$[\cdot]^*$ 表示对括号中函数进行星形变换，根据式(4-5)和式(4-6)，有：

$$C^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(s+jn\omega_s)E^*(s+jn\omega_s) \tag{4-7}$$

式(3-20)指出如下周期性质：

$$E^*(s+jn\omega_s) = E^*(s)$$

将其代入式(4-7)，得到：

$$C^*(s) = E^*(s)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(s+jn\omega_s) = E^*(s)G^*(s) \tag{4-8}$$

再根据式(4-3)，得：

$$C(z) = E(z)G(z) \tag{4-9}$$

我们称采样时刻的输入与输出之间的传递函数 $C(z)$为脉冲传递函数。请注意，脉冲传递函数并不能给出采样时刻之间的输出 $c(t)$的信息，就是说，不论是式(4-8)还是式(4-9)，其中并不包含采样时刻之间的信息。因此，需要我们以能使采样时刻的响应对采样时刻之间的响应具有强指示性为目标来选择采样频率。

以上推导方法具有一般性，因此，对于可以表示成如下形式的任意函数：

$$A(s) = B(s)F^*(s) \tag{4-10}$$

式中：要将 $F^*(s)$表示成：

$$F^*(s) = f_0 + f_1 e^{-Ts} + f_2 e^{-2Ts} + \cdots$$

根据前面的论述，有：

$$A^*(s) = B^*(s)F^*(s) \tag{4-11}$$

根据式(4-3)，有：

$$A(z) = B(z)F(z) \tag{4-12}$$

式中：$B(s)$是 s 的函数；$F^*(s)$是 e^{Ts} 的函数。

就是说，s 仅以 e^{Ts} 的形式出现在函数 $F^*(s)$中，于是在式(4-12)中，有：

$$B(z) = \mathcal{Z}[B(s)], \quad F(z) = F^*(s)\big|_{e^{Ts}=z} \tag{4-13}$$

下面举两个例子来说明上述方法。

例 4.2 求下式的 z 变换：

$$A(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}=\frac{1}{s(s+1)}(1-\mathrm{e}^{-Ts})$$

由式(4-10)，令

$$B(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

$$F^{*}(s)=1-\mathrm{e}^{-Ts}\Rightarrow F(z)=1-z^{-1}=\frac{z-1}{z}$$

查 z 变换表，得：

$$B(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=\frac{(1-\mathrm{e}^{-T})z}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}$$

于是有：

$$A(z)=B(z)F(z)=\frac{(1-\mathrm{e}^{-T})z}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}\left[\frac{z-1}{z}\right]=\frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{z-\mathrm{e}^{-T}}$$ ◀

例 4.3 如图 4-2 所示采样数据曲线中，输入 $e(t)$ 为单位阶跃函数，求输出函数 $C(z)$。

根据如图 4-2 所示采样数据曲线，有：

$$C(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}E^{*}(s)=G(s)E^{*}(s)$$

由例 4.2 可知

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}\right]=\frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{z-\mathrm{e}^{-T}}$$

查附录Ⅵ给出的变换表，可知，

$$E(z)=\mathscr{Z}[u(t)]=\frac{z}{z-1}$$

于是

$$C(z)=G(z)E(z)=\frac{z(1-\mathrm{e}^{-T})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}$$

图 4-2 数据采样系统

求上述函数的反变换，得到时域响应为：

$$c(kT)=1-\mathrm{e}^{-kT}$$

响应曲线如图 4-2b 所示。 ◀

通过图 4-2b 可以看出，z 变换分析方法仅能提供采样时刻的系统响应，由这些响应值勾勒出的响应曲线以指数规律到达其终值“单位 1”。基于上述分析可知，采样时刻之间并不产生系统响应，而实际上采样时刻间的信息通常是需要的，这就需要求出系统的完整模拟响应。

如果采样/零阶保持器的输入是单位阶跃信号，输出便也是单位阶跃信号，因此，零阶保持器可对经采样的阶跃函数实现准确重构，正因如此，如图 4-2 所示系统响应就是传递函数为 $1/(s+1)$的连续时间系统的响应，该响应是：

$$c(t)=1-\mathrm{e}^{-t}$$

可见例 4.3 的 z 变换分析结果是正确的。给定 $c(t)$，将 t 置换成 kT，即可求得 $c(kT)$。但是，一般来讲，用 z 变换方法求得 $c(kT)$后，并不能靠 t 对 nT 的置换得到正确响应 $c(t)$。

上述最后一点与上例有关系。对许多控制系统而言，了解恒定输入下的稳态增益即直流增益(dc gain)十分重要。对于如图 4-2 所示系统而言，设存在稳态输出，则根据终值性质，其单位输入$[E(z)=z/(z-1)]$下的稳态输出 $c_{ss}(k)$为

$$c_{ss}(k) = \lim_{z\to1}((z-1)C(z)) = \lim_{z\to1}((z-1)G(z)E(z))$$

$$= \lim_{z\to1}\left((z-1)G(z)\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z\to1}G(z) = G(1)$$

因为系统的稳态输入为单位 1，直流增益为

$$直流增益 = G(z)\big|_{z=1} = G(1)$$

对上例来讲，$G(1)=1$，这就核实了时间响应计算结果。由于采样/零阶保持器在标准输入下的增益为单位 1，可算出如图 4-1 所示系统的直流增益为：

$$直流增益 = \lim_{s\to0}G_p(s)$$

于是

$$直流增益 = \lim_{z\to1}G(z) = \lim_{s\to0}G_p(s) \tag{4-14}$$

这个关系式中的每一项都比较容易估计，因此也就比较容易核对 $G(z)$。例如，例 4.3 中，有：

$$\lim_{z\to1}G(z) = \lim_{z\to1}\left(\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right) = 1, \quad \lim_{s\to0}G_p(s) = \lim_{s\to0}\left(\frac{1}{s+1}\right) = 1$$

接下来我们来研究其他结构的开环系统。先看如图 4-3a 所示系统，该系统含两个环节，其$G_1(s)$和 $G_2(s)$均含有数据保持器的传递函数。

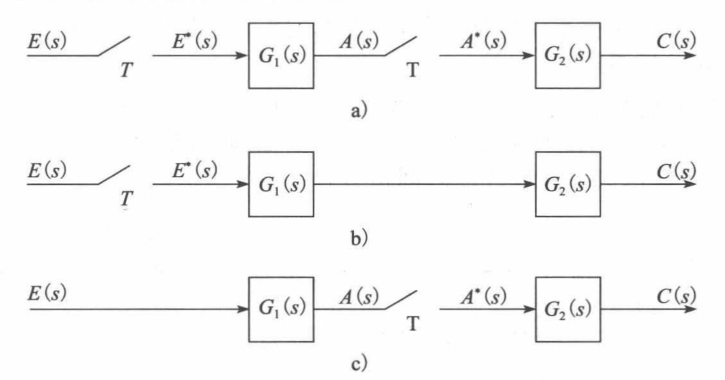


图 4-3　开环数据采样系统

图中

$$C(s) = G_2(s)A^*(s)$$
$$C(z) = G_2(z)A(z) \tag{4-15}$$

于是

$$A(s) = G_1(s)E^*(s)$$
$$A(z) = G_1(z)E(z) \tag{4-16}$$

根据式(4-15)和式(4-16)，得：

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)E(z) \tag{4-17}$$

可见，系统总传递函数等于两个脉冲传递函数的乘积。

再看如图 4-3b 所示系统，显然此例的 $G_2(s)$不包含数据保持器的传递函数，因此，

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)E^*(s)$$

及

$$C(z) = \overline{G_1G_2}(z)E(z)$$

式中：

$$\overline{G_1G_2}(z) = \mathcal{Z}[G_1(s)G_2(s)] \tag{4-18}$$

式中乘积项上侧的横杠表示先在 s 域执行乘积运算再进行 z 变换，并请注意

$$\overline{G_1G_2}(z) \neq G_1(z)G_2(z) \tag{4-19}$$

就是说，函数乘积的 z 变换并不等于函数 z 变换的乘积。

对于如图 4-3c 所示系统，有：

$$C(s)=G_2(s)A^*(s)=G_2(s)\overline{G_1E}^*(s)$$

于是

$$C(z)=G_2(z)\overline{G_1E}(z) \tag{4-20}$$

因为我们无法从$\overline{G_1E}(z)$中得到 $E(z)$，所以也就无法写出该系统的传递函数。在 $E(z)$中，仅包含 $e(t)$在 $t=kT$ 时刻的值，而如图 4-3c 所示系统的信号 $a(t)$则是关于之前所有 $e(t)$值的函数，而不仅仅是采样时刻值的函数。由于

$$A(s)=G_1(s)E(s)$$

则根据拉普拉斯变换的卷积性质，有：

$$a(t)=\int_0^t g_1(t-\tau)e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-21}$$

$a(t)$对所有已发生的 $e(t)$的值具有相依性。一般来讲，如果数据采样系统的输入直接作用于该系统中未经采样的连续性环节，就不能将系统输出的 z 变换表示成输入信号 z 变换的函数，在稍后我们会了解到这类系统并不存在分析和设计上的特殊问题。

4.4 含数字滤波器的开环系统

前面讨论的是开环采样系统传递函数的问题，这一节我们将相同的问题拓展到含有数字滤波环节的开环采样系统上。

在如图 4-4 所示系统中，位于数字滤波器前侧的 A/D 转换器将连续时间信号 $e(t)$转换成数字序列$\{e(kT)\}$，数字滤波器对其进行处理，产生输出数字序列$\{m(kT)\}$，这个数字序列又由 D/A 转换器依次转换成连续时间信号。

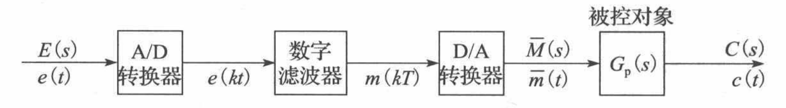


图 4-4 带有数字滤波器的开环系统

正如第 2 章谈到的，用于求解常系数线性差分方程的数字滤波器的传递函数 $D(z)$可以表示成

$$M(z)=D(z)E(z) \tag{4-22}$$

或把 $z=\mathrm{e}^{sT}$代入，得：

$$M^*(s)=D^*(s)E^*(s)$$

通常，D/A 转换器带有一个输出数据保持器，且具有零阶保持器的特性，其输出$\overline{m}(t)$具有如图 3-3 所示 $\overline{e}(t)$的形式，根据式(3-2)，可将 $\overline{m}(t)$的拉普拉斯变换表示成：

$$\overline{M}(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}M^*(s)$$

于是有：

$$C(s)=G_\mathrm{p}(s)\overline{M}(s)=G_\mathrm{p}(s)\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}M^*(s)$$

根据式(4-22)，得：

$$C(s)=G_\mathrm{p}(s)\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}D(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{Ts}}E^*(s) \tag{4-23}$$

可见，我们可以把滤波器及与其相连的 A/D 转换器和 D/A 转换器表示成如图 4-5 所示的框图的形式。根据式(4-23)或图 4-5，可得：

$$C(z)=\mathcal{Z}\left[G_\mathrm{p}(s)\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\right]D(z)E(z)=G(z)D(z)E(z) \tag{4-24}$$

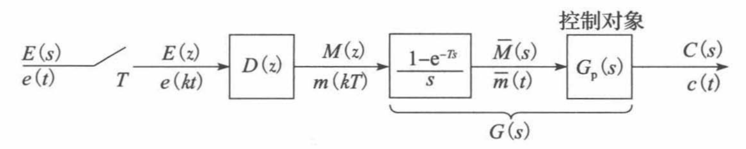


图 4-5　开环系统模型

实际上，实现如图 4-4 所示数字滤波器的数字计算装置是用来处理输入采样数据 $\{e(kT)\}$的，而数字滤波器的模型要处理的是以$\{e(kT)\}$为权重的脉冲函数序列，因此，其完整的模型如图 4-5 所示，即将理想采样器 $D(z)$和零阶保持器级联起来作为 A/D 转换器、数字滤波器和D/A转换器的联合模型。

例 4.4 已知系统如图 4-5 所示，求其阶跃响应。

设描述图中滤波器的差分方程为：

$$m(kT)=2e(kT)-e[(k-1)T]$$

因此

$$D(z)=\frac{M(z)}{E(z)}=2-z^{-1}=\frac{2z-1}{z}$$

再设

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{1}{s+1}$$

则(参见例 4.3)

$$\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}\right]=\frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{2-\mathrm{e}^{-T}}$$

因为 $E(z)=z/(z-1)$，根据式(4-24)，有：

$$\begin{aligned}C(z)&=D(z)G(z)E(z)\\&=\frac{2z-1}{z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{z-\mathrm{e}^{-T}}\right]\frac{z}{z-1}=\frac{(2z-1)(1-\mathrm{e}^{-T})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}\end{aligned}$$

对上式进行部分分式展开：

$$\frac{C(z)}{z}=\frac{(2z-1)(1-\mathrm{e}^{-T})}{z(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}=\frac{1-\mathrm{e}^{T}}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{\mathrm{e}^{T}-2}{z-\mathrm{e}^{-T}}$$

即

$$C(z)=(1-\mathrm{e}^{T})+\frac{z}{z-1}+\frac{(\mathrm{e}^{T}-2)z}{z-\mathrm{e}^{-T}}$$

因为

$$\mathscr{Z}^{-1}[k_i z^{-i}]=\begin{cases}k_i, & n=i\\0, & n\neq i\end{cases}$$

$C(z)$中第一项的反变换仅在 $n=0$ 时为非零值，于是

$$c(nT)=1+(\mathrm{e}^{T}-2)\mathrm{e}^{-nT},\quad n=1,2,3,\cdots$$

及

$$c(0)=1-\mathrm{e}^{T}+1+\mathrm{e}^{T}-2=0$$

需要注意的是，$C(z)$的分子阶数低于分母阶数，于是获得 $c(0)=0$ 的结论，其证明将于习题 4-11 中讨论。 ◀

下面，我们对例 4.4 的系统响应进行部分证明。首先可以看到，$c(nT)$的终值为 1，这一点可以通过 z 变换的终值性质得以证明：

$$\lim_{n\to+\infty}c(nT)=\lim_{z\to1}(z-1)C(z)=\lim_{z\to1}\frac{(2z-1)(1-\mathrm{e}^{-T})}{z-\mathrm{e}^{-T}}=1$$

另外，根据式(4-14)，可得该系统的直流增益：

$$\text{直流增益} = D(z)\big|_{z=1} G_{\mathrm{p}}(s)\big|_{s=0} = \frac{2z-1}{z}\bigg|_{z=1} \frac{1}{s+1}\bigg|_{s=0} = 1$$

因为系统的输入为恒定的1，所以其稳态输出为：

$$\lim_{n\to+\infty} c(nT) = (\text{直流增益})\times(\text{恒定输入}) = 1\times1 = 1$$

如此，系统的稳态输出再次得以证明。

该例最后应注意到的是滤波器的输出为：

$$M(z) = (2-z^{-1})E(z) \Rightarrow m(kT) = 2u(kT) - u[(k-1)T]$$

于是在稳态，执行装置的输入恒为单位1。从例4.3可以看出，恒为单位1的输入导致的输出也恒为单位1。

4.5　改进的 z 变换

前面讨论了含数字滤波器的开环系统的分析问题，但所涉及的分析方法尚不能用于含理想延时器的系统。为了展开对这类系统的分析，必须定义延时函数的 z 变换，我们称其为改进的 z 变换，本节就讨论这种改进的 z 变换。

这里，改进的 z 变换可以这样进行：将延时 ΔT，$0<\Delta\leqslant1$ 的时间函数 $e(t)$ 表示为 $e(t-\Delta T)u(t-\Delta T)$。时间延迟函数的常规 z 变换为：

$$\mathscr{Z}[e(t-\Delta T)u(t-\Delta T)] = \mathscr{Z}[E(s)\mathrm{e}^{-\Delta Ts}] = \sum_{n=1}^{+\infty} e(nT-\Delta T)z^{-n} \tag{4-25}$$

请注意，采样时刻并不延时，就是说，采样时刻依然为0，T，$2T$，…。在这里，称式(4-25)的 z 变换为延时 z 变换，根据定义，$e(t)$ 的延时 z 变换为

$$E(z,\Delta) = \mathscr{Z}[e(t-\Delta T)u(t-\Delta T)] = \mathscr{Z}[E(s)\mathrm{e}^{-\Delta Ts}] \tag{4-26}$$

如果进行 $z=\mathrm{e}^{Ts}$ 的替换，则式(4-26)就是延时星形 z 变换的定义。下面我们来看一个延时 z 变换的例子。

例 4.5　求函数 $e(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 发生延时 $\Delta=0.4$ 之后的 z 变换 $E(z,\Delta)$，根据式(4-25)有：

$$\begin{aligned} E(z,\Delta) &= \mathrm{e}^{-0.6aT}z^{-1} + \mathrm{e}^{-1.6aT}z^{-2} + \mathrm{e}^{-2.6aT}z^{-3} + \cdots \\ &= \mathrm{e}^{-0.6aT}z^{-1}[1 + \mathrm{e}^{-aT}z^{-1} + \mathrm{e}^{-2aT}z^{-2} + \cdots] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-0.6aT}z^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-aT}z^{-1}} = \frac{\mathrm{e}^{-0.6aT}}{z-\mathrm{e}^{-aT}} \end{aligned}$$

$e(t)$ 和 $e(t-\Delta T)$ 的示意图如图4-6所示。

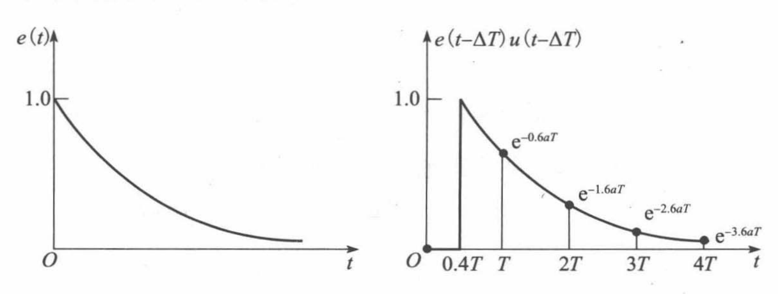


图4-6　延时 z 变换示例图

改进的 z 变换是通过延时 z 变换定义的。根据定义，一个函数改进的 z 变换等于将 Δ 替换成 $1-m$ 的延时 z 变换。于是，如果令 $E(z, m)$ 是 $E(s)$ 改进的 z 变换，那么根据式(4-26)有：

$$E(z,m) = E(z,\Delta)\big|_{\Delta=1-m} = \mathscr{Z}[E(s)\mathrm{e}^{-\Delta Ts}]\big|_{\Delta=1-m} \tag{4-27}$$

令 $\Delta=1-m$，根据式(4-25)和式(4-27)，有：

$$
\begin{aligned}
E(z,m) &= [e(T-\Delta T)z^{-1} + e(2T-\Delta T)z^{-2} \\
&\quad + e(3T-\Delta T)z^{-3} + \cdots]_{\Delta=1-m} \\
&= e(mT)z^{-1} + e[(1+m)T]z^{-2} + e[(2+m)T]z^{-3} + \cdots
\end{aligned} \tag{4-28}
$$

改进的 z 变换具有如下两个性质：

$$E(z,1) = E(z,m)\big|_{m=1} = E(z) - e(0) \tag{4-29}$$

$$E(z,0) = E(z,m)\big|_{m=0} = z^{-1}E(z) \tag{4-30}$$

即 $m=1$ 意味着未出现延时[但式(4-28)中不包含 $e(0)$]，$m=0$ 意味着延时 1 个采样周期。◀

例 4.6 求函数 $e(t)=\mathrm{e}^{-t}$ 改进的 z 变换。根据式(4-28)有：

$$
\begin{aligned}
E(z,m) &= \mathrm{e}^{-mT}z^{-1} + \mathrm{e}^{-(1+m)T}z^{-2} + \mathrm{e}^{-(2+m)T}z^{-3} + \cdots \\
&= \mathrm{e}^{-mT}z^{-1}[1 + \mathrm{e}^{-T}z^{-1} + \mathrm{e}^{-2T}z^{-2} + \cdots] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-mT}z^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1}} = \frac{\mathrm{e}^{-mT}}{z-\mathrm{e}^{-T}}
\end{aligned}
$$

$e(t)$ 和 $e(t-\Delta T)$ 的示意图如图 4-7 所示。

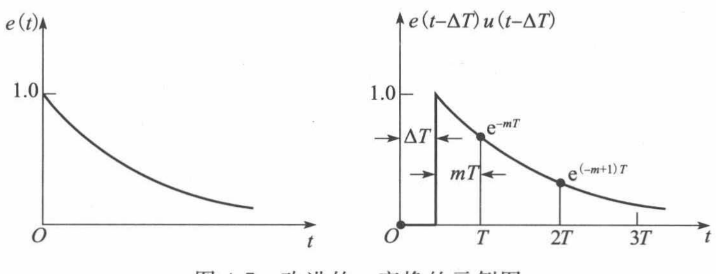


图 4-7　改进的 z 变换的示例图 ◀

常规 z 变换表不能用到改进的 z 变换上，于是需要导出特殊的变换表，方法如下。根据附录Ⅲ，可用如下方法将 $E(s)$ 改进的 z 变换表示为

$$E(z,m) = \mathscr{Z}[E(s)\mathrm{e}^{-\Delta Ts}]\big|_{\Delta=1-m} = \mathscr{Z}[E(s)\mathrm{e}^{-(1-m)Ts}] = z^{-1}\mathscr{Z}[E(s)\mathrm{e}^{mTs}] \tag{4-31}$$

注意，附录Ⅲ中式(A3-7)(参见图 A3-2)的第二个积分项中的 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda E(\lambda)\mathrm{e}^{mT\lambda}$ 为 0，于是可启用式(3-10)，即根据式(3-10)和式(4-31)，得：

$$E(z,m) = z^{-1}\sum_{E(\lambda)\text{的极点}}\left[\mathrm{Res}\left(E(\lambda)\mathrm{e}^{mT\lambda}\frac{1}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{T\lambda}}\right)\right] \tag{4-32}$$

如果 $e(t-\Delta T)$ 在整个采样间隔中是连续的，根据式(3-11)，得

$$E^*(s,m) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(s+\mathrm{j}n\omega_s)\mathrm{e}^{-(1-m)(s+\mathrm{j}n\omega_s)T} \tag{4-33}$$

附录Ⅵ所提供的 z 变换表含有改进的 z 变换和常规 z 变换。

下面介绍改进的 z 变换一个十分有用的性质。由于改进的 z 变换就是移位函数的常规 z 变换，于是，第 2 章导出的那些常规 z 变换的定理在允许条件下均可应用于改进的 z 变换，其中，移位定理就可直接使用。

我们用 $\mathscr{Z}_m[\cdot]$ 表示改进的 z 变换，即

$$\mathscr{Z}_m[E(s)] = E(z,m) = \mathscr{Z}_m[\mathrm{e}^{-\Delta Ts}E(s)]\big|_{\Delta=1-m} \tag{4-34}$$

根据移位定理

$$\mathscr{Z}_m[\mathrm{e}^{-kTs}E(s)] = z^{-k}\mathscr{Z}_m[E(s)] = z^{-k}E(z,m) \tag{4-35}$$

式中：k 为正整数。◀

例 4.7 我们希望通过本例得到函数 $e(t)=t$ 改进的 z 变换。众所周知，该函数的 $E(s)=1/s^2$，它在 $s=0$ 处存在一个二阶极点。因此，其改进的 z 变换可由式(4-32)获得[见式(2-34)]

$$E(z,m)=z^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\frac{\mathrm{e}^{mT\lambda}}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{T\lambda}}\right]_{\lambda=0}\right]$$
$$=z^{-1}\left[\frac{(1-z^{-1}\mathrm{e}^{T\lambda})mT\mathrm{e}^{mT\lambda}-\mathrm{e}^{mT\lambda}(-Tz^{-1}\mathrm{e}^{T\lambda})}{(1-z^{-1}\mathrm{e}^{T\lambda})^2}\right]_{\lambda=0}$$
$$=z^{-1}\left[\frac{mT(1-z^{-1})+Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]=\frac{mT(z-1)+T}{(z-1)^2}$$

该式将在附录Ⅵ中验证。◀

4.6 时间延迟系统

改进的 z 变换可用于求解具有理想时间延迟的离散时间系统的脉冲传递函数。下面我们借助如图 4-8 所示系统来说明这一点，该系统具有 t_0 秒理想时间延迟，它的输出为：

$$C(s)=G(s)\mathrm{e}^{-t_0 s}E^*(s) \tag{4-36}$$

$E(s)$ —/ T — $E^*(s)$ → [$G(s)$] → [$\mathrm{e}^{-t_0 s}$] → $C(s)$

图 4-8 理想时间延迟系统

于是有：

$$C(z)=\mathcal{Z}[G(s)\mathrm{e}^{-t_0 s}]E(z) \tag{4-37}$$

若令

$$t_0=kT+\Delta T,\quad 0<\Delta<1 \tag{4-38}$$

式中：k 为正整数。

则根据式(4-35)有：

$$C(z)=z^{-k}\mathcal{Z}[G(s)\mathrm{e}^{-\Delta Ts}]E(z)=z^{-k}G(z,m)E(z) \tag{4-39}$$

式中：$m=1-\Delta$。

再看下例。

例 4.8 令如图 4-8 所示系统的输入为单位阶跃，$t_0=0.4T$，且

$$G(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}$$

这个 $G(s)$ 就是例 4.3 中的那个无延迟的系统。根据式(4-35)和改进的 z 变换表可知，

$$G(z,m)=\mathcal{Z}_m\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\mathcal{Z}_m\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$
$$=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-\mathrm{e}^{-mT})+\mathrm{e}^{-mT}-\mathrm{e}^{-T}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}\right]$$

代入 $mT=T-\Delta T=0.6T$，有：

$$G(z,m)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-\mathrm{e}^{-0.6T})+\mathrm{e}^{-0.6T}-\mathrm{e}^{-T}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}\right]$$

当式(4-39)中的 $k=0$ 时，得：

$$C(z)=G(z,m)\frac{z}{z-1}=\frac{z(1-\mathrm{e}^{-0.6T})+\mathrm{e}^{-0.6T}-\mathrm{e}^{-T}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})}$$

根据 2.6 节所述幂级数法，可知，

$$C(z)=(1-\mathrm{e}^{-0.6T})z^{-1}+(1-\mathrm{e}^{-1.6T})z^{-2}+(1-\mathrm{e}^{-2.6T})z^{-3}+\cdots$$

例 4.3 告诉我们，无延迟的系统响应为 $c(n)=1-\mathrm{e}^{-nT}$，而存在 0.4T 延迟的系统响应则为：

$$c(nT)\big|_{n\leftarrow(n-0.4)}=1-\mathrm{e}^{-(n-0.4)T},\quad n\geqslant 1 \tag{4-40}$$

由此，此例的结果得以验证。◀

对于数字控制系统而言，当其数字计算机的计算时间不容忽略时，就可用改进的 z 变换求解该数字控制系统的脉冲传递函数。一个 n 阶线性数字控制器每隔 T 秒对如下如同式(2-4)的差分方程进行一次求解：

$$\begin{aligned}m(k)=&b_n e(k)+b_{n-1}e(k-1)+\cdots+b_0 e(k-n)\\&-a_{n-1}m(k-1)-\cdots-a_0 m(k-n)\end{aligned} \tag{4-41}$$

设求解式(4-41)所需时间为 t_0 秒，则 $t=0$ 时刻的输入要到 $t=t_0$ 时刻得到输出，$t=T$ 时刻的输入要到 $t=T+t_0$ 时刻得到输出……于是，可以用如下方法为数字控制器建模，即一个无时间延迟的数字控制器紧随一个 t_0 秒的理想时间延迟环节，如图 4-9a 所示。如此一来，可以得到含有计算时间不容忽略的控制器的开环系统，如图 4-9b 所示。

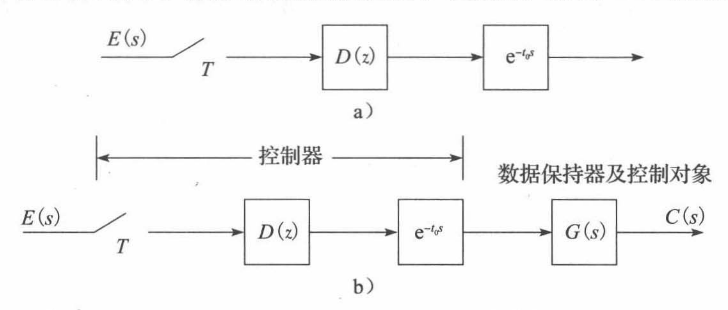


图 4-9　计算时间非 0 的数字控制器

对于如图 4-9b 所示系统

$$C(z)=\mathcal{Z}[G(s)\mathrm{e}^{-t_0 s}]D(z)E(z) \tag{4-42}$$

若令

$$t_0=kT+\Delta T,\quad 0<\Delta<1 \tag{4-43}$$

式中：k 为正整数。

根据式(4-39)和式(4-42)，可得：

$$C(z)=z^{-k}G(z,m)D(z)E(z) \tag{4-44}$$

式中：$m=1-\Delta$。

例 4.9 如图 4-10 所示系统。该系统在例 4.4(具有计算延迟)的基础上增加了一个滤波器，其延迟为 1ms($t_0=10^{-3}$s)、$T=0.05$s

$$D(z)=\frac{2z-1}{z}$$

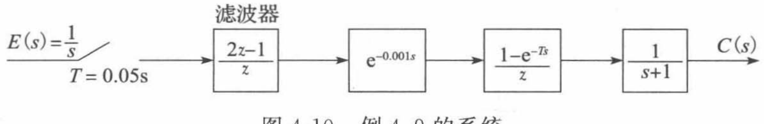


图 4-10　例 4.9 的系统

设

$$mT+\Delta T=T$$

则

$$mT=T-\Delta T=(0.05-0.001)\mathrm{s}=0.049\mathrm{s}$$

于是

$$G(z,m)=\mathcal{Z}_{\mathrm{m}}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}\right]_{mT=0.049}=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}_{\mathrm{m}}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]_{mT=0.049}$$

据例 4.8，有：

$$G(z,m)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-\mathrm{e}^{-0.049})+(\mathrm{e}^{-0.049}-\mathrm{e}^{-0.05})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-0.05})}\right]$$

阶跃输入时，据式(4-44)，有：

$$\begin{aligned}C(z)=G(z,m)D(z)E(z)&=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-\mathrm{e}^{-0.049})+(\mathrm{e}^{-0.049}-\mathrm{e}^{-0.05})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-0.05})}\right]\frac{2z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1}\right]\\&=\frac{(2z-1)[z(1-\mathrm{e}^{-0.049})+(\mathrm{e}^{-0.049}-\mathrm{e}^{-0.05})]}{z(z-1)(z-\mathrm{e}^{-0.05})}\end{aligned}$$

◀

4.7 异步采样

在前面的章节中，我们讨论了简单的开环系统，也讨论了带有数字滤波器和理想时间延迟环节的开环系统。本节将重点讲解异步采样的开环系统。首先，通过图 4-11 给出异步采样的定义，即这种系统有两个采样器，它们的采样频率相同，但采样操作不同步。本节将通过改进的 z 变换推导这类系统的输出。

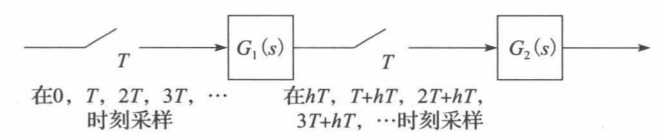


图 4-11 异步采样系统

为了导出这种异步采样系统的分析方法，我们来看看如图 4-12a 所示的采样/数据保持器，图中，采样器在 hT，$T+hT$，$2T+hT$，$3T+hT$，…($0<h<1$)时刻进行采样操作，如图 4-12b 所示的是数据保持器的输出，可将该输出表示为：

$$\begin{aligned}\bar{e}(t) =& e(hT)[u(t-hT)-u(t-T-hT)]+e(T+hT)[u(t-T-hT)\\ &-u(t-2T-hT)]+e(2T+hT)[u(t-2T-hT)\\ &-u(t-3T-hT)]+\cdots\end{aligned} \tag{4-45}$$

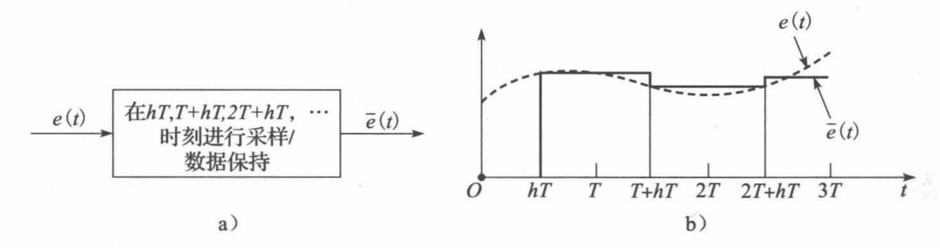


图 4-12 异步采样系统图解

于是

$$\begin{aligned}\bar{E}(s) =& e(hT)\left[\frac{e^{-hTs}}{s}-\frac{e^{-(T+hT)s}}{s}\right]+e(T+hT)\left[\frac{e^{-(T+hT)s}}{s}-\frac{e^{-(2T+hT)s}}{s}\right]\\ &+e(2T+hT)\left[\frac{e^{-(2T+hT)s}}{s}-\frac{e^{-(3T+hT)s}}{s}\right]+\cdots\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\bar{E}(s) &= \frac{1-e^{-Ts}}{s}e^{-hTs}[e(hT)+e(T+hT)e^{-Ts}+e(2T+hT)e^{-2Ts}+\cdots]\\ &= \frac{1-e^{-Ts}}{s}e^{Ts}e^{-hTs}[e(hT)e^{-Ts}+e(T+hT)e^{-2Ts}+e(2T+hT)e^{-3Ts}+\cdots]\end{aligned}$$

据式(4-28)，有：

$$\bar{E}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}e^{Ts}e^{-hTs}E(z,m)\Big|_{m=h,z=e^{Ts}} \tag{4-46}$$

据

$$E(z,m) = \mathcal{Z}[E(s)e^{-\Delta Ts}]\big|_{\Delta=1-m} \tag{4-47}$$

和式(4-46)，可形成如图 4-12 所示采样/数据保持器的模型如图 4-13 所示，图中的采样点 $t=0$，T，$2T$，…，需要注意的是，模型中，输入信号经历了延迟，延迟信号再经采样，再继续行进，致使信号总延迟为 0。

从上述讨论可知，如图 4-11 所示异步采样系统可用如图 4-14 所示模型来表示。如图 4-14所示模型中，两采样器的采样是同步的，如图 4-14 所示系统与如图 4-3a 所示系统的形式相同。

$E(s)$ → $e^{-(1-h)Ts}$ → T → e^{Ts} → e^{-hTs} → $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ → $\bar{E}(s)$

在0，T，$2T$，…时刻采样

图 4-13　采样/数据保持器模型

$E(s)$ → T → $G_1(s)$ → $e^{-(1-h)Ts}$ → $A(s)$ → T → $A^*(s)$ → e^{Ts} → $B^*(s)$ → e^{-hTs} → $G_2(s)$ → $C(s)$

两采样器均在0，T，$2T$，$3T$，…时刻采样

图 4-14　如图 4-11 所示系统模型

在如图 4-14 所示系统中

$$A(s) = e^{-(1-h)Ts}G_1(s)E^*(s)$$

于是

$$A(z) = G_1(z,m)\big|_{m=h}E(z) \tag{4-48}$$

同样

$$B^*(s) = e^{Ts}A^*(s)$$

从而

$$B(z) = zA(z) = zE(z)G_1(z,m)\big|_{m=h} \tag{4-49}$$

则

$$C(s) = e^{-hTs}G_2(s)B^*(s)$$

从而

$$C(z) = G_2(z,m)\big|_{m=1-h}B(z) \tag{4-50}$$

据式(4-49)和式(4-50)，可求得：

$$C(z) = zE(z)G_1(z,m)\big|_{m=h}\,G_2(z,m)\big|_{m=1-h} \tag{4-51}$$

◀

例 4.10　异步采样系统如图 4-15 所示，求该系统的 $C(z)$。

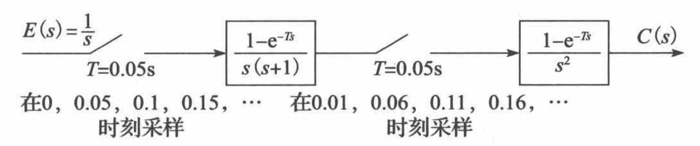


图 4-15　例 4.10 的系统

首先

$$E(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z-1}$$

注意到，系统中 $T=0.05\text{s}$，$hT=0.01\text{s}$。据例 4.8 知，

$$G_1(z,m) = \mathscr{Z}_m\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\right] = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-e^{-mT})+e^{-mT}-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

则

$$G_1(z,m)\big|_{mT=0.01} = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-e^{-0.01})+e^{-0.01}-e^{-0.05}}{(z-1)(z-e^{-0.05})}\right]$$

同样的，查改进 z 变换列表，有：

$$G_2(z,m) = \mathscr{Z}_m\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s^2}\right] = \frac{z-1}{z}\left[\frac{mTz-mT+T}{(z-1)^2}\right]$$

或

$$G_2(z,m)\big|_{m=1-h} = \frac{0.04z+0.01}{z(z-1)}$$

再据式(4-51)，有：

$$C(z)=z\left[\frac{z}{z-1}\right]\frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-\mathrm{e}^{-0.01})+\mathrm{e}^{-0.01}-\mathrm{e}^{-0.05}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-0.05})}\right]\frac{0.04z+0.01}{z(z-1)}$$
$$=\frac{(0.04z+0.01)[z(1-\mathrm{e}^{-0.01})+\mathrm{e}^{-0.01}\mathrm{e}^{-0.05}]}{(z-1)^2(z-\mathrm{e}^{-0.05})}$$

◀

4.8 状态变量模型

至此，我们讨论了如何利用传递函数来分析开环采样系统。我们还可以像第 2 章那样，将描述系统的 z 域传递函数改成离散状态方程，形成新的描述模型。据 2.8 节所述，状态方程的形式如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}\tag{4-52}$$

式中：$\boldsymbol{x}(k)$是状态向量；$\boldsymbol{u}(k)$是输入向量；$\boldsymbol{y}(k)$是输出向量。

第 2 章用到的状态变量法同样可用来求解本节讨论的开环采样系统的状态变量模型。为了得到这个状态变量模型，需要：

1）根据 z 域传递函数画出仿真图。

2）将每一个时间延迟输出标注为一个状态变量。

3）根据仿真图写出状态方程。

我们来举例说明。

例 4.11 例 4.4 用到的系统如图 4-16a 所示，求该系统的状态变量方程。

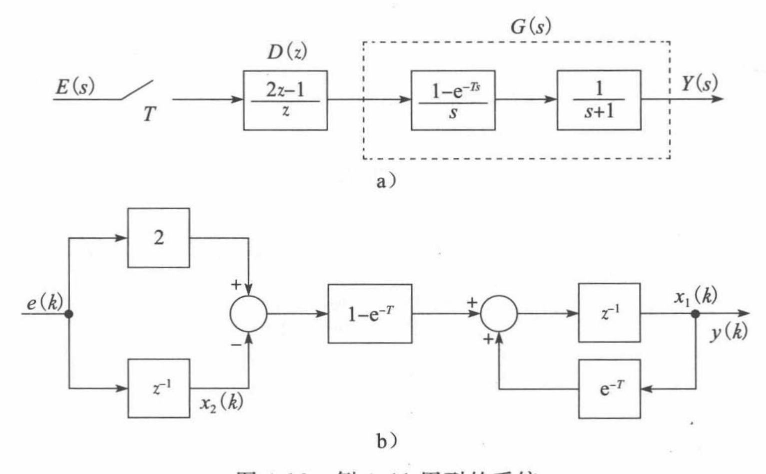


图 4-16 例 4.11 用到的系统

在这里，我们用 $Y(s)$取代 $C(s)$来表示输出，以防止输出 $C(s)$与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 在符号上的混淆。据例 4.4，有：

$$G(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s+1)}\right]=\frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{z-\mathrm{e}^{-T}}$$

注意到如图 4-16a 所示系统的

$$D(z)=\frac{2z-1}{z}$$

该系统的仿真图如图 4-16b 所示。将图中的每一个延迟输出均标注为状态变量，不难写出：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-T} & -1+\mathrm{e}^{-T}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}2(1-\mathrm{e}^{-T})\\ 1\end{pmatrix}e(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

◀

4.9　连续时间状态变量回顾

上一节主要论述了获取线性时间离散系统状态方程的方法。该方法以传递函数为基础，但存在两个缺陷。其一为涉及的仅是无摩擦环境下质点的运动这样一种简单的机械系统，设用 $x(t)$ 表示系统质点的位移或位置，用 $f(t)$ 表示外部的作用力，则该系统具有关系式：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}(t) = f(t) \tag{4-53}$$

为获得它的连续时间状态变量模型，按照如下方法选择状态变量：

$$\begin{aligned} v_1(t) &= x(t) = \text{位置} \\ v_2(t) &= \dot{v}_1(t) = \dot{x}(t) = \text{速度} \end{aligned} \tag{4-54}$$

式中：$\dot{x}(t)=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$；$v_i(t)$，$i=1$，2，用于表示连续时间系统的状态。

则状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \tag{4-55}$$

在这里，选用的状态变量是质点的位置和速度，它们是系统的自然状态(物理变量)，算得上是一种最适宜的选择。如果数据采样系统含有这种简单系统，位置是该简单系统的输出，则将这个位置选为离散状态模型的一个状态是容易做到的；但是如果通过传递函数获取离散状态模型，则将速度选为第二个状态变量却是难以做到的。于是，基于传递函数建立系统状态方程的方法会造成自然且适宜的系统状态的缺失。传递函数方法的另一个缺陷是导出高阶系统的脉冲传递函数比较困难。

下一节将介绍另一种获取离散时间状态模型的方法，该方法的基点是使用了连续时间状态变量，因此，有必要先对连续时间状态变量的理论做一个简短的陈述。

正像上述质点运动的例子所揭示的，线性时不变系统的连续时间状态变量方程具有如下形式：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{v}}(t) &= \boldsymbol{A}_c \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{B}_c \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}_c \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{D}_c \boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{4-56}$$

式中：$\boldsymbol{v}(t)$是状态；$\boldsymbol{u}(t)$是输入；$\boldsymbol{y}(t)$是输出。

矩阵下标表示连续时间状态方程，而无下标矩阵则表示离散时间状态方程。为了说明连续时间状态方程，我们来看下例。

例 4.12 设机械系统如图 4-17a 所示，其中，M 是质量，B 是线性摩擦阻尼系数，K 是线性弹簧的刚度系数。试求该系统的状态模型。

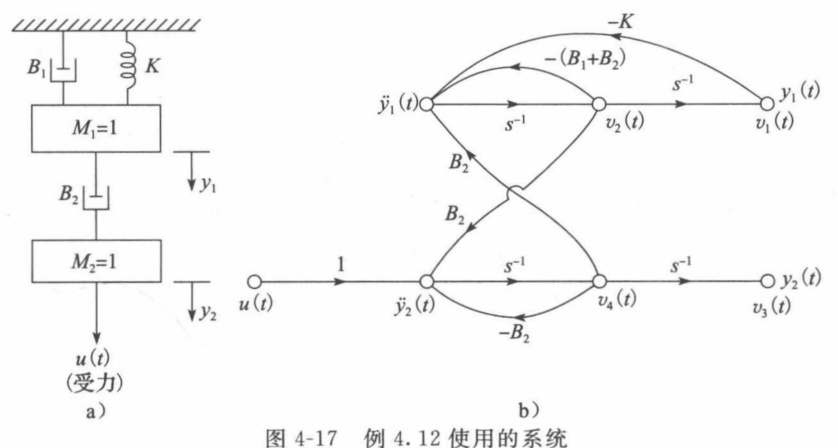


图 4-17　例 4.12 使用的系统

首先，图示系统的状态方程为[1]：

$$\ddot{y}_1(t)+B_1\dot{y}_1(t)+Ky_1(t)+B_2[\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)]=0$$

$$\ddot{y}_2(t)+B_2[\dot{y}_2(t)-\dot{y}_1(t)]=u(t)$$

选择状态变量为：

$$v_1(t)=y_1(t);\qquad v_3(t)=y_2(t)$$

$$v_2(t)=\dot{y}_1(t);\qquad v_4(t)=\dot{y}_2(t)$$

由状态方程得流程图如图 4-17b 所示，图中，传递函数 s^{-1} 表示积分器，积分器的输出为状态变量，据此流程图可写出如下状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -K & -(B_1+B_2) & 0 & B_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & B_2 & 0 & -B_2\end{bmatrix}\boldsymbol{v}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$ ◀

例 4.12 选用的状态变量是位置和速度。因此，如果根据物理定律得到系统的微分方程，再由该微分方程画出系统的流程图，则所选状态便是系统的自然状态。

对于单入单出的连续时间系统，其状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{B}_cu(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{D}_cu(t) \tag{4-57}$$

可用拉普拉斯变换方法对上述方程进行求解。对于式(4-57)来讲，有：[1]

$$s\boldsymbol{V}(s)-\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{V}(s)+\boldsymbol{B}_cU(s) \tag{4-58}$$

为求解 $\boldsymbol{V}(s)$，将上式整理成：

$$\boldsymbol{V}(s)=[\boldsymbol{I}s-\boldsymbol{A}_c]^{-1}\boldsymbol{v}(0)+[\boldsymbol{I}s-\boldsymbol{A}_c]^{-1}\boldsymbol{B}_cU(s) \tag{4-59}$$

定义

$$\boldsymbol{\Phi}_c(t)=\mathscr{L}^{-1}\{[\boldsymbol{I}s-\boldsymbol{A}_c]^{-1}\} \tag{4-60}$$

称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_c(t)$ 为式(4-57)的状态转移矩阵。式(4-59)的拉普拉斯反变换为：

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\Phi}_c(t)\boldsymbol{v}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}_c(t-\tau)\boldsymbol{B}_cu(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-61}$$

式(4-60)可用于计算状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_c(t)$。除式(4-60)外，也可导出 $\boldsymbol{\Phi}_c(t)$ 的另一种表达式，即设式(4-61)的 $\boldsymbol{\Phi}_c(t)$ 为如下的无穷级数：

$$\boldsymbol{\Phi}_c(t)=\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_1t+\boldsymbol{K}_2t^2+\boldsymbol{K}_3t^3+\cdots \tag{4-62}$$

式中：$\boldsymbol{K}_i$ 为常数矩阵。选 $u(t)=0$，再选用式(4-62)的 $\boldsymbol{\Phi}_c(t)$，将式(4-61)代入式(4-57)得[1]：

$$\boldsymbol{\Phi}_c(t)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_ct+\boldsymbol{A}_c^2\frac{t^2}{2!}+\boldsymbol{A}_c^3\frac{t^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}_c^kt^k}{k!} \tag{4-63}$$

后面会证明：在推导数据采样系统离散时间状态模型时，要用到 $\boldsymbol{\Phi}_c(t)$ 的这个表达式。

在建立物理系统状态模型的时候，经常会出现这样一个问题，如图 4-18a 所示。

根据图 4-18b 给出的仿真图，可写出它的状态方程为：

$$\dot{x}(t)=-x(t)+[u(t)-\dot{x}(t)]$$

$$y(t)=\dot{x}(t)$$

可以看出，$\dot{x}(t)$ 出现在了 $\dot{x}(t)$ 方程和 $y(t)$ 方程的右边，因此，它们是非标准的。由 $\dot{x}(t)$ 方程求解 $\dot{x}(t)$，导致

$$\dot{x}(t)=-0.5x(t)+0.5u(t)$$

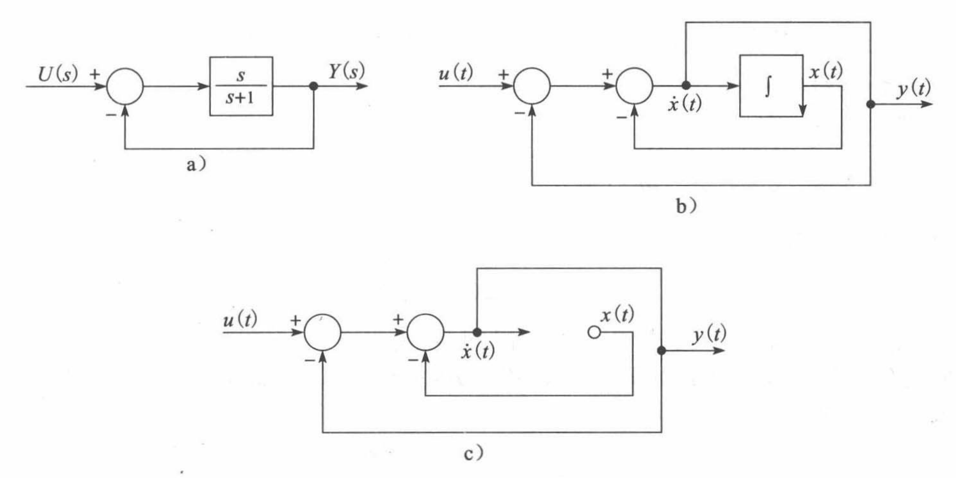


图 4-18　代数环状系统

因此，

$$y(t) = -0.5x(t) + 0.5u(t)$$

下面我们来讨论如何列写如图 4-18 所示系统的标准形式状态方程的方法。将如图 4-18b所示系统中的积分环节略去，得到如图 4-18c 所示系统，针对该系统，列写 $\dot{x}(t)$ 和$y(t)$关于如图 4-18c 所示系统输入 $x(t)$和$u(t)$的方程。这是根据仿真图列写状态方程的标准方法，不过通常情况下，并不做去除积分环节的处理。针对如图 4-18c 所示系统，使用梅森增益公式，即可得到适宜的状态方程：

$$\dot{x}(t) = \frac{-1}{1+1}x(t) + \frac{1}{1+1}u(t) = -0.5x(t) + 0.5u(t)$$

$$y(t) = \frac{-1}{1+1}x(t) + \frac{1}{1+1}u(t) = -0.5x(t) + 0.5u(t)$$

如图 4-18c 所示系统中的环路不包含积分器，故称其为代数环路。列写含代数环路系统状态方程的方法如下。首先，将系统方程写成：[2]

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_1\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_1\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)$$

求解其中的第一个方程，得：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1]^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t) + [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1]^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t)$$

将此方程代入另一方程，得到：

$$\boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{C}_1[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1]^{-1}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{C}_2]\boldsymbol{x}(t) + [\boldsymbol{C}_1[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1]^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_1]\boldsymbol{u}(t)$$

至此可得到标准形式下的系统状态方程。

4.10　离散时间系统的状态方程

本节介绍从连续时间状态方程直接推导出数据采样系统离散状态方程的方法。实际上，连续时间模型的状态可成为离散模型的状态，而系统的自然状态会依然得以保留。

图 4-19　数据采样系统

某数据采样系统如图 4-19 所示，该系统中连续时间部分的状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{B}_c u(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{D}_c u(t) \tag{4-64}$$

参照如 4.9 节所述方法，上述方程的解为：

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(t-t_0)\boldsymbol{v}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(t-\tau)\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-65}$$

式中：t_0 为初始时间。

根据式(4-63)，有：

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(t-t_0)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{k}(t-t_0)^{k}}{k!} \tag{4-66}$$

为获得离散模型，在时间点 $t=kT+T$，$t_0=kT$ 上求解式(4-65)，得：

$$\boldsymbol{v}(kT+T)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T)\boldsymbol{v}(kT)+\boldsymbol{u}(kT)\int_{kT}^{kT+T}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(kT+T-\tau)\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\mathrm{d}\tau \tag{4-67}$$

需要注意的是，由于在 $kT\leqslant t<kT+T$ 的时间段内 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(kT)$，因此，式中的 $\boldsymbol{u}(t)$ 被 $\boldsymbol{u}(kT)$ 所替代。需要强调的是，上述结果仅当 $\boldsymbol{u}(t)$ 为零阶保持器的输出时方能成立。

式(4-52)给出的离散状态方程为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned} \tag{4-68}$$

用其与式(4-67)进行对比，发现若令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(kT)&=\boldsymbol{v}(kT)\\ \boldsymbol{A}&=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T)\\ \boldsymbol{B}&=\int_{kT}^{kT+T}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(kT+T-\tau)\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{4-69}$$

便可得到数据采样系统的离散状态方程，离散系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 由式(4-69)提供。

$t=kT$ 时，式(4-64)的输出方程为：

$$\boldsymbol{y}(kT)=\boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{v}(kT)+\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(kT)=\boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(kT) \tag{4-70}$$

因此，离散矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 与连续时间矩阵$\boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}$ 和$\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}$ 分别相等。

关系 $\boldsymbol{B}$ 是可以简化的，可令式(4-69)中的 $kT-\tau=-\sigma$，则 $\boldsymbol{B}$ 简化为：

$$\boldsymbol{B}=\left[\int_{0}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T-\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}} \tag{4-71}$$

用式(4-60)的拉普拉斯变换法解出$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T)$，可进而算得离散系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$。不过，这种方法通常情况下比较烦琐，更为有效的办法则是利用计算机计算式(4-63)中的$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T)$，即令 $t=T$，使式(4-66)和式(4-63)成为：

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}T+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{2}\frac{T^{2}}{2!}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{3}\frac{T^{3}}{3!}+\cdots \tag{4-72}$$

这是一个收敛的级数，因此，可以在满足精度要求的前提下，将该级数截断。

为算出矩阵 $\boldsymbol{B}$，也可以用级数展开式计算式(4-71)的积分项。令式(4-71)中的 $\tau=T-\sigma$，有：

$$\begin{aligned}\int_{0}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T-\sigma)\mathrm{d}\sigma&=\int_{T}^{0}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(\tau)(-\mathrm{d}\tau)=\int_{0}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &=\int_{0}^{T}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\tau+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{2}\frac{\tau^{2}}{2!}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{3}\frac{\tau^{3}}{3!}+\cdots\right)\mathrm{d}\tau\\ &=\boldsymbol{I}T+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\frac{T^{2}}{2!}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{2}\frac{T^{3}}{3!}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{3}\frac{T^{4}}{4!}+\cdots\end{aligned} \tag{4-73}$$

根据式(4-71)和式(4-73)，有：

$$\boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{I}T+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\frac{T^{2}}{2!}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{2}\frac{T^{3}}{3!}+\cdots\right]\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}} \tag{4-74}$$

比较式(4-72)和式(4-73)可以发现，只要将$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T)$的计算程序稍加扩展，就可用于计算 $\int_{0}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(\tau)\mathrm{d}\tau$。

上面的推导是建筑在单入单出情况之下的。对于多入多出的系统，只需将 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 矩

阵化，其结果便与单入单出的结果相同。多输入时，要求每个输入必须是零阶保持器的输出。而在某些实际应用中，有些输入并不是零阶保持器的输出，上述方法依然适用。如果相对于采样周期，输入量缓慢变化，则建立的离散模型便足够准确。

下面举一个推导示例。

例 4.13 数据采样系统如图 4-19 所示，令 $T=0.1$，被控对象为：

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

设想该被控对象为第 1 章中描述的伺服电动机。图 4-20a 给出了这个系统的连续时间状态变量模型为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 10\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(t)$$

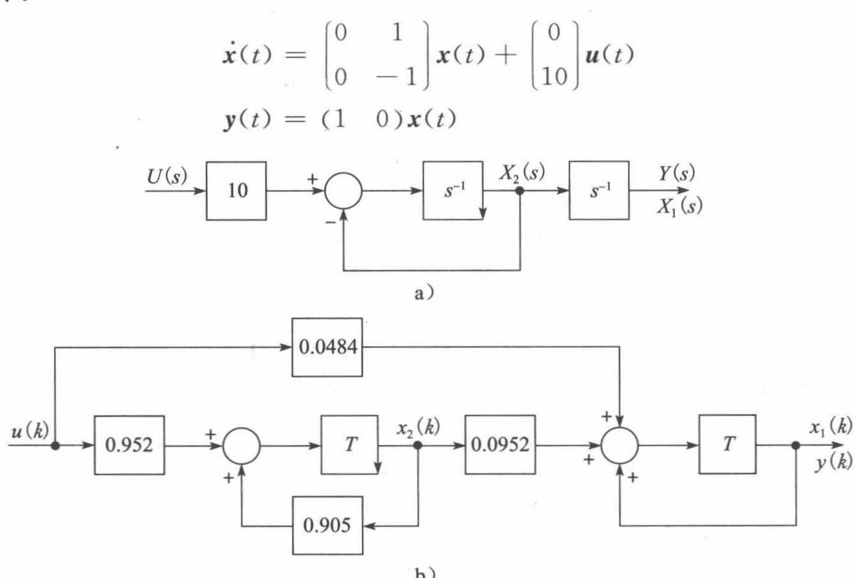


图 4-20　例 4.13 使用的系统仿真图

本例中，由于系统是二阶的，求解 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(t)$ 如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(t)&=\mathscr{L}^{-1}[[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}]^{-1}]\\&=\mathscr{L}^{-1}\begin{pmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{pmatrix}^{-1}=\mathscr{L}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1 & 1-\mathrm{e}^{-t}\\ 0 & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

同样

$$\int_0^T\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\tau & \tau+\mathrm{e}^{-\tau}\\ 0 & -\mathrm{e}^{-\tau}\end{pmatrix}\Bigg|_0^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}T & T-1+\mathrm{e}^{-T}\\ 0 & 1-\mathrm{e}^{-T}\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(T)\big|_{T=0.1}=\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\left[\int_0^T\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{c}}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.00484\\ 0 & 0.0952\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0484\\ 0.952\end{pmatrix}$$

因此，得离散状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.0484\\ 0.952\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

该模型的仿真图如图 4-20b 所示。如图 4-20a 所示则是模拟对象的仿真图。尽管如图 4-20 所示模型中两个仿真图的状态、输入，以及输出在采样瞬间相同，但两者之间没有相似性。一般来说，如此系统的两张仿真图不是相似的。 ◀

上例中离散矩阵的计算也可以借助计算机来完成。为保证 3 位有效数字的精度，需要保留$\boldsymbol{\Phi}_c(t)$的级数展开式的前 3 项，而级数展开式的前 5 项能够保证 6 位有效数字的精度。

4.11 程序计算

如前文所述，所有模拟对象的离散模型的计算均可由计算机来完成，尤其是高阶系统的计算问题。但是，站在降低计算误差的角度，应首选低阶系统。

用于计算的必要步骤如下。

1）推导系统中模拟部分的状态模型，形式如下：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_c\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}\tag{4-75}$$

2）如果需要给出系统中模拟部分的传递函数，则计算[1,3]下式：

$$G_p(s)=\boldsymbol{C}_c[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]^{-1}\boldsymbol{B}_c+\boldsymbol{D}_c\tag{4-76}$$

3）计算系统中模拟部分的离散矩阵[式(4-74)]：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_cT+\boldsymbol{A}_c^2T^2/2+\cdots\\ \boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{I}T+\boldsymbol{A}_cT^2/2!+\boldsymbol{A}_c^2T^3/3!+\cdots)\boldsymbol{B}_c\\ \boldsymbol{C}&=\boldsymbol{C}_c,\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_c\end{aligned}\tag{4-77}$$

4）用下式[3]计算脉冲传递函数[见(2-84)]：

$$G(z)=\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\tag{4-78}$$

上述步骤 2)、3)、4)的计算工作可交于 MATLAB 程序进行，执行语句如下：

```
2.[numc,denc] = ss2tf(Ac,Bc,Cc,Dc)
3.[A,B] = c2d(Ac,Bc,T)
4.[numz,denz] = ss2tf(A,B,C,D)
```

其中，numc 和 denc 分别是 $G_p(s)$的分子多项式系数和分母多项式系数。num$z$ 和 den$z$ 分别是$G(z)$的分子多项式系数和分母多项式系数。

需要注意的是，上述步骤将给出模拟传递函数、离散状态模型和脉冲传递函数。在这些步骤的任意一步，并不直接使用 z 变换表，靠的是计算机执行程序。不过，我们需要通过某些程序推导模拟状态模型。下面来看一个例子。

例 4.14 计算例 4.13 所用系统的离散状态矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$，以及被控对象传递函数$G(z)=$num$z$/den$z$ 的 MATLAB 程序如下：

```
Ac = [0 1; 0 -1];
Bc = [0; 10];
C = [1 0];
D = 0;
T = 0.1;
[A,B] = c2d(Ac,Bc,T)
[numz,denz] = ss2tf(A,B,C,D)
Gz = tf(numz,denz,T)
```
◀

有些系统，对式(4-74)和式(4-77)直接编程会产生不能容忍的数值计算误差，在这种情况下，应使用其他算法[4-6]实现对离散矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和离散矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的计算。

4.12 小结

本章审视了开环离散时间系统的方方面面。特别讨论了星形变换，证明了第2章定义的 z 变换所具有的性质。介绍了如何用星形变换求解开环系统的脉冲传递函数，并把脉冲传递函数扩展到含有数字滤波器的开环系统的分析。为展开对具有理想时间延迟系统的分析，推导出了改进 z 变换及其性质。然后，给出了求解开环数据采样系统离散状态变量模型的方法。这些形成了用计算机求解离散状态模型和脉冲传递函数的基础。本章针对开环系统所讲述的方法可作为第5章闭环离散时间系统分析的基础。

参考文献

[1] C. L. Phillips and J. Parr, *Feedback Control Systems,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[2] D. M. Look, "Direct State Space Formulation of Second-Order Coupled Systems," M.S. thesis, Auburn University, Auburn, AL, 1971.

[3] J. L. Melsa and S. K. Jones, *Computer Programs for Computational Assistance*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

[4] R. C. Ward, "Numerical Computation of the Matrix Exponential with Accuracy Estimate," *SIAM J. Numer. Anal.*, pp. 600–610, 1977.

[5] C. Moler and C. Van Loam, "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix," *SIAM Rev.,* pp. 801–836, 1978.

[6] D. Westreich, "A Practical Method for Computing the Exponential of a Matrix and Its Integral," *Commun. Appl. Numer. Methods,* pp. 375–380, 1990.

[7] J. A. Cadzow and H. R. Martens, *Discrete-Time and Computer Control Systems.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1970.

[8] P. M. De Russo, R. J. Roy, C. M. Close, and A. A. Desrochers, *State Variables for Engineers,* 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[9] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems,* 3rd ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

[10] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1973.

[11] B. C. Kuo, *Digital Control Systems,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1995.

[12] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems,* 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.

习题

4.2-1 (1) 证明：$E(s)$位于 s 域左半平面的极点转变成 $E(z)$位于 z 域单位圆内的极点。

(2) 证明：$E(s)$位于 s 域虚轴上的极点转变成 $E(z)$位于 z 域单位圆上的极点。

(3) 证明：$E(s)$位于 s 域右半平面的极点转变成 $E(z)$位于 z 域单位圆外的极点。

4.2-2 令 $T=0.05\text{s}$ 及

$$E(s)=\frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$$

(1) 不通过 $E(z)$求其极点；

(2) 给出问题(1)求极点时所使用的规则；

(3) 通过 $E(z)$求其极点，并验证(1)问的结果；

(4) 比较 $E(z)$与 $E(s)$的零点；

(5) $E(z)$的极点可通过 $E(s)$的极点求得，那么，在两函数的零点间是否存在这种等效规则？

4.2-3 借助 z 变换表，求解下列函数的 z 变换。比较 z 平面上 $E(z)$的零极点位置与 s 平面上 $E(s)$和 $E^*(s)$的零极点位置(参考习题3.4-1)。令 $T=0.1\text{s}$。

(1) $E(s)=\dfrac{20}{(s+2)(s+5)}$ (2) $E(s)=\dfrac{5}{s(s+1)}$

(3) $E(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$ (4) $E(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$

(5) $E(s)=\dfrac{s^2+5s+6}{s(s+4)(s+5)}$ (6) $E(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+5}$

(7) 用 MATLAB 程序对以上各题给出的部分分式展开结果进行验证。

4.2-4 令 $T=0.01\text{s}$，重做习题4.2-3。

4.3-1　求解下列函数的 z 变换

(1) $E(s)=\dfrac{(e^{s}-1)^2}{e^{2s}s(s+1)}$，$T=0.5\text{s}$

(2) $E(s)=\dfrac{(0.5s+1)(1-e^{-0.25s})^2}{0.5s(s+0.25)}$，$T=0.25\text{s}$

4.3-2　(1) 对如图 P4.3-2 所示系统，求解单位阶跃激励下采样瞬间的响应，画出时间函数 $c(nT)$；

(2) 确定被控对象的输入 $m(t)$，用连续时间法求其输出 $c(t)$，从而验证(1)问的结果；

(3) 同时根据脉冲传递函数和被控对象传递函数求解常数输入下的稳态增益(直流增益)。

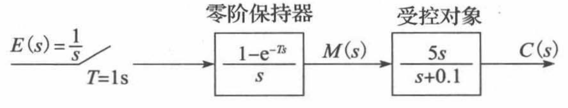


图 P4.3-2　习题 4.3-2 图

(4) (3)问给出的增益是否可以从(1)问和(2)问的结果中得出？为什么？

4.3-3　令 $T=0.1s$，且其被控对象传递函数改为：

(1) $G_{\text{p}}(s)=\dfrac{5}{s^2+3s+2}$

(2) $G_{\text{p}}(s)=\dfrac{5}{s^2+2s+2}$

重做习题 4.3-2。

4.3-4　(1) 求传递函数 $G(z)$的直流增益为 0 时应满足的条件。证明你的结论。

(2) 设

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_{\text{p}}(s)\right]$$

求 $G(z)$的直流增益为 0 时 $G_{\text{p}}(s)$应满足的条件。证明你的结论。

(3) 通常情况下，s 平面原点处的极点可变换成 z 平面上 $z=1$ 的极点。(2)问给出的 $G(z)$在其括号里就存在这样一个极点，请问：为什么这个极点不能转变成 z 平面上 $z=1$ 的极点？

(4) 求 $G(z)$的直流增益无界时应满足的条件。证明你的结论。

(5) 对(2)问使用的 $G(z)$，求其直流增益无界时 $G_{\text{p}}(s)$应满足的条件。证明你的结论。

4.3-5　已知控制系统如图 P4.3-5 所示，求该系统在单位阶跃激励下采样瞬间的响应。

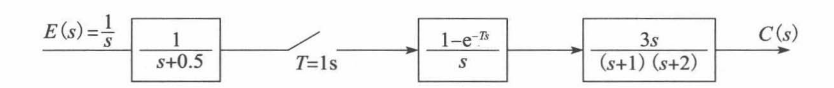


图 P4.3-5　习题 4.3-5 系统

4.3-6　(1) 求如图 P4.3-6 所示系统的输出 $c(kT)$，其中，$e(t)$为单位阶跃函数。

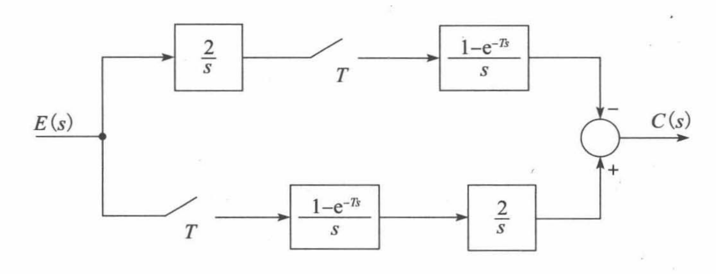


图 P4.3-6　习题 4.3-6 系统

(2) 请问图中上侧通道中采样器和数据保持器会对 $c(kT)$造成怎样的影响？为什么？

(3) 绘制如图 P4.3-6 所示系统的单位阶跃响应 $c(t)$。这一做法可以避开通过数学方法求解 $C(s)$。

(4) 去掉图中上侧通道的采样器和数据保持器，重做(3)问。

4.3-7　(1) 控制系统如图 P4.3-7 所示，请将 $C(s)$和 $C(z)$写成关于系统输入的函数。

(2) 设图 P4.3-7 含有数据保持器，列出它们的传递函数。

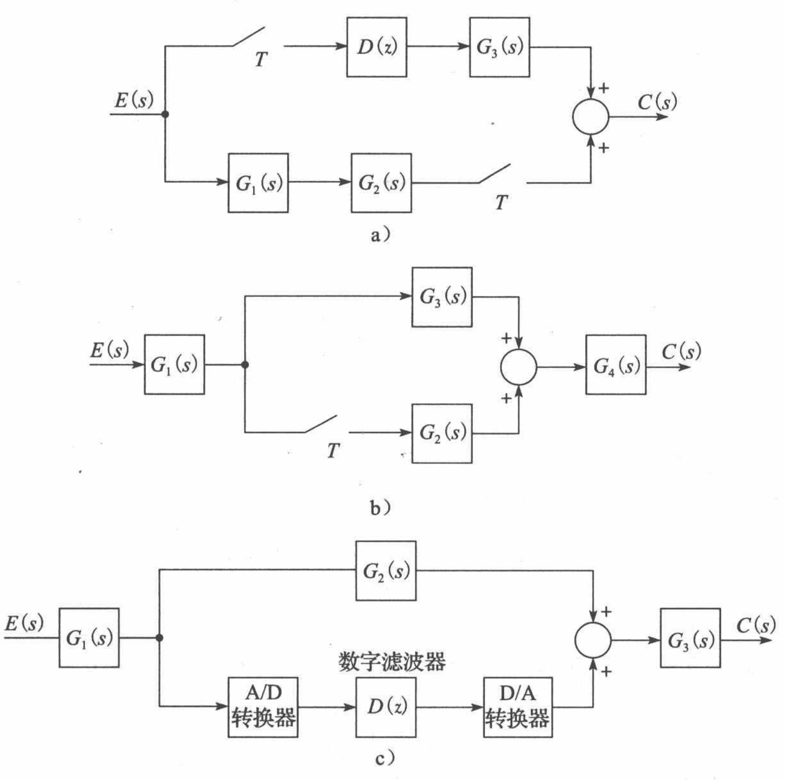


图 P4.3-7　习题 4.3-7 图

4.3-8　机器人手臂关节的系统框图如图 P4.3-8 所示。该系统在习题 1.5-4 中有所陈述。信号 $M(s)$是采样器的输入，$E_a(s)$是伺服电动机的输入电压，$\Theta_m(s)$是电动机轴的角度，系统输出 $\Theta_a(s)$为机器人手臂的角度。

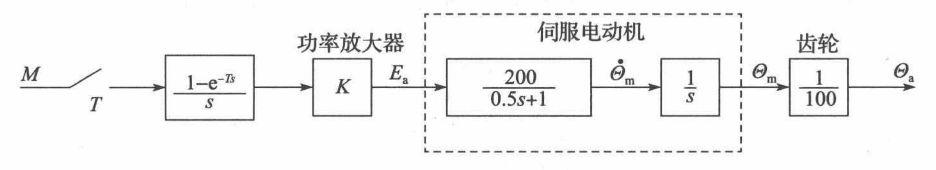


图 P4.3-8　机器人手臂关节系统模型

(1) 假设采样-数据重构过程由模/数(A/D)转换器和数/模(D/A)转换器来实现。重绘图 P4.3-8，使之含有 A/D 转换器和 D/A 转换器；

(2) 设 $e_a(t)$的单位是伏特，$\Theta_m(t)$的单位是每分钟多少转(r/min)。伺服电动机的额定电压为 24V(电压 $e_a(t)$的量级应小于或等于 24V)。通常，可购置的 D/A 转换器的额定电压为±5V，±10V，0～5V，0～10V 或 0～20V。如果功率放大器的增益是 2.4，D/A 转换器的额定电压是多少？为什么？

(3) 推导模拟传递函数 $\Theta_a(s)/E_a(s)$；

(4) 设 $K=2.4$、$T=0.1\text{s}$，请推导脉冲传递函数 $\Theta_a(z)/M(z)$；

(5) 设 $m(t)$为常数，推导系统的稳态输出，根据电机特性验证此输出结果；

(6) 用计算机算法验证(4)问的结果。

4.3-9　热应力室系统框图如图 P4.3-9 所示。该系统在习题 1.6-1 中有所陈述。室温 $c(t)$是系统输出，以℃为单位；控制电压 $m(t)$是热应力室的输入，用于操作蒸汽管路上的阀门；温度传感器使用一个热敏电阻；$d(t)$是输入端扰动，模拟因室门的打开而形成的干扰，若门关闭，则 $d(t)=0$，若在 $t=t_0$ 时刻门打开，则形成一个单位阶跃干扰，使 $d(t)=u(t-t_0)$。

(1) 假设采样-数据重构过程由模/数(A/D)转换器和数/模(D/A)转换器来实现。重绘图 P4.3-9，使之含有 A/D 转换器和 D/A 转换器。

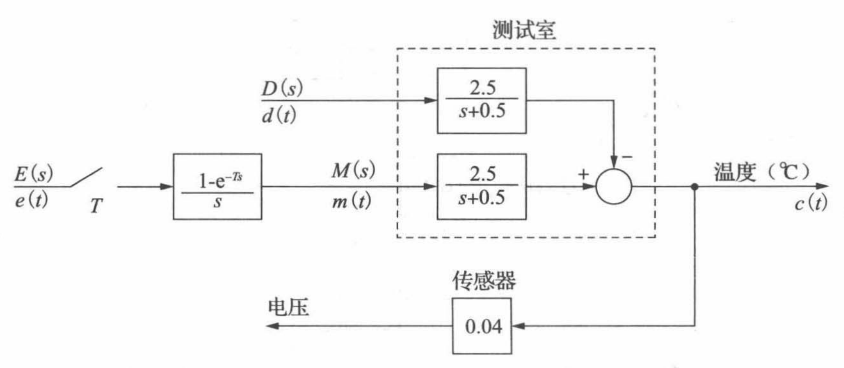


图 P4.3-9　热测试室系统框图

(2) 推导传递函数 $C(z)/E(z)$。

(3) 设作用于系统的输入在较长的时段上为 $e(t)=10\mathrm{V}$ 这一恒定值，室门关闭，计算该测试室的稳态温度。注意，该问题的求解无需确知采样周期 T。

(4) 求室门打开状态下，稳定状态对室温的影响。

(5) 求解函数 $C(s)$ 关于拉普拉斯变换变量 s、控制输入和干扰输入的表达式。z 变换的变量 z 不要出现在表达式中。

4.3-10 刚性体卫星系统框图如图 P4.3-10 所示。系统中，电压 $e(t)$ 是控制信号；$m(t)$ 是零阶保持器的输出，放大推进器将其转换成扭转力 $\tau(t)$（参见 1.4 节）。$\theta(t)$ 是系统输出的卫星姿态角。

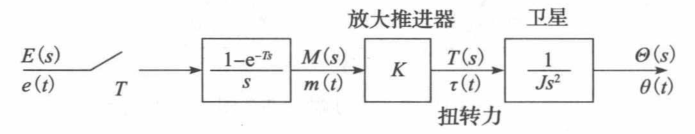


图 P4.3-10　卫星系统框图

(1) 求传递函数 $\Theta(z)/E(z)$。

(2) 利用(1)问的结果，求该系统的单位阶跃响应，即 $e(t)=u(t)$ 时的系统响应。

(3) 绘制(2)问中零阶保持器的输出曲线 $m(t)$。

(4) 用(3)问中的 $m(t)$，计算 $c(t)=\mathscr{L}^{-1}[KM(s)/Js^2]$。

(5) 估计(4)问的 $c(kT)$。该响应应该与(2)的响应相等。

4.3-11 天线定位系统如图 P4.3-11 所示，该系统在 1.5 节和习题 1.5-1 中有所陈述。在这里，我们考虑其偏航角控制系统，其中，$\theta(t)$ 是偏航角。角度传感器（数字式轴角编码器和数据保持器）产生的信号 $v_o(kT)=[0.4\theta(kT)]$，$v_o(t)$ 的单位为 V，$\theta(t)$ 为 “°”。采样周期 $T=0.05\mathrm{s}$。

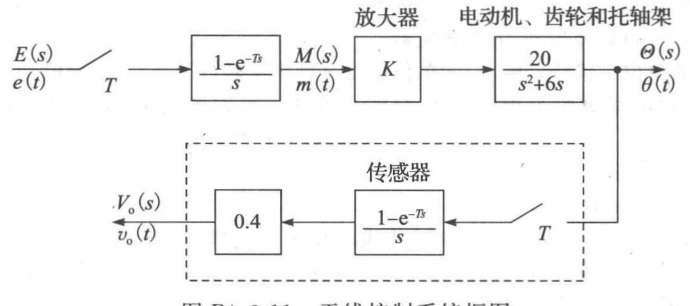


图 P4.3-11　天线控制系统框图

(1) 求传递函数 $\Theta(z)/E(z)$。

(2) 设偏航角初始值为零，$t=0$ 时，输入电压 $e(t)$ 设置为 10V，而在此后各采样周期为 0。计算偏航角的稳态值。

(3) 注意到，(2)问中，部分分式展开式的各系数相加为零。请问为什么？

(4) 设置输入电压 $e(t)$ 为恒定值，使用非数学方法给出该系统响应的表达式。

(5)设(2)问的天线可观测，请描述所能看到的情景。

4.4-1　对于如图 4-2 所示系统，例 4.3 给出了它的阶跃响应，图 P4.4-1 是在该系统中加入传递函数为$D(z)=(2-z^{-1})$的数字滤波器之后的系统框图，例 4.4 给出了它的阶跃响应。对于如图 P4.4-1 所示系统。

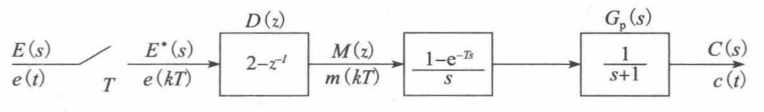


图 P4.4-1　习题 4.4-1 系统框图

(1) 求解数字滤波器的输出 $m(kT)$。

(2) 将例 4.3 的响应标记为 $c_1(kT)$。用(1)问的结果将图 P4.4-1 的输出 $c(kT)$表示成 $c_1(kT)$的函数。

(3) 用例 4.3 算得的响应 $c_1(kT)$和(2)的结果求图 P4.4-1 的输出 $c(kT)$。该结果应与例 4.4 的结果相同。

(4) 用例 4.3 算得的响应 $C_1(z)$和(2)的结果求图 P4.4-1 的输出 $C(z)$。该结果应与例 4.4 的结果相同。

4.4-2　请思考图 P4.4-2 所描述的硬件。由计算机实现的数字控制器的传递函数由下式给出

$$D(z)=\frac{4.5\times(z-0.90)}{z-0.85}$$

模/数转换器的输入电压范围为±10V，数/模转换器的输出电压范围也是±10V。

(1) 计算该控制器的直流增益。

(2) 请确切地叙述：如何用硬件电路验证(1)问得到的计算值。给出所需设备及其设置，以及期望的测量值。

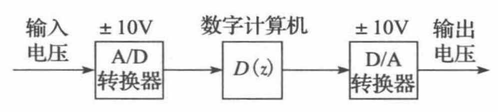


图 P4.4-2　习题 4.4-2 的硬件配置

4.4-3　如图 P4.4-3 所示系统中，滤波器的采样率为 1Hz，实现对如下差分方程的计算

$$m(k)=0.9m(k-1)+0.2e(k)$$

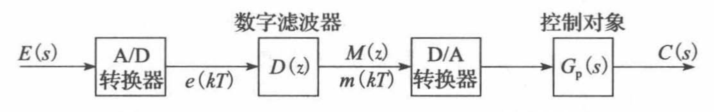


图 P4.4-3　习题 4.4-3 和习题 4.4-4 所用系统

控制对象的传递函数为：

$$G_p(s)=\frac{1}{s+0.2}$$

(1) 求该系统的传递函数 $C(z)/E(z)$。

(2) 根据(1)问的结果，求系统的直流增益。

(3) 分别用 $D(z)$和 $G_p(s)$求滤波器和控制对象的直流增益以验证(2)问的结果。

(4) 用(2)问的结果求单位阶跃响应的稳态值。

(5) 通过计算单位阶跃输入下的 $c(kT)$以验证(4)问的结果。

(6) 注意到在(5)问中，部分分式展开式的各系数相加为零，请问为什么？

4.4-4　设滤波器的采样率为 10Hz，所实现的差分方程为：

$$m(k+1)=0.5e(k+1)-(0.5\times0.98)e(k)+0.995m(k)$$

控制对象的传递函数为：

$$G_p(s)=\frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

重做习题 4.4-3。

4.4-5　如图 P4.4-5 所示系统中，滤波器的传递函数为 $D(z)$。

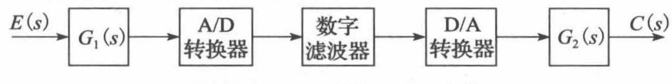


图 P4.4-5　习题 4.4-5 系统

(1) 将 $C(z)$表示成 E 的函数。

(2) 该系统的离散状态模型并不存在，请问为什么？

(3) 为导出该系统的近似离散状态模型，应该对 $e(t)$做出怎样的假设？

4.4-6 在图 P4.4-5 中输入端添加一个对 $E(s)$进行采样的采样器，且已知

$$G_1(s)=\frac{1}{s+10};\qquad D(z)=\frac{z-0.5}{z-1};\qquad G_2(s)=\frac{s}{s^2+9s+23}$$

$T=0.5\text{s}$，求单位阶跃输入下的 $c(kT)$；请问：这个采样间隔是最佳选择吗？如果不是，你建议改用怎样的采样率；在所建议的采样率下，求 $c(kT)$，用 MATLAB 程序绘制这两个阶跃响应。

4.5-1 求下列函数的改进 z 变换：

(1) $E(s)=\dfrac{20}{(s+2)(s+5)}$　　(2) $E(s)=\dfrac{5}{s(s+1)}$

(3) $E(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$　　(4) $E(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$

(5) $E(s)=\dfrac{s^2+5s+6}{s(s+5)(s+4)}$　　(6) $E(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+5}$

4.5-2 求下列函数的 z 变换，这时，会用到习题 4.5-1 的结果。

(1) $E(s)=\dfrac{20e^{-0.3Ts}}{(s+2)(s+5)}$　　(2) $E(s)=\dfrac{5e^{-0.6Ts}}{s(s+1)}$

(3) $E(s)=\dfrac{s+2e^{-1.1Ts}}{s(s+1)}$　　(4) $E(s)=\dfrac{s+2e^{-0.2Ts}}{s^2(s+1)}$

(5) $E(s)=\dfrac{(s^2+5s+6)e^{-0.3Ts}}{s(s+4)(s+5)}$　　(6) $E(s)=\dfrac{2e^{-0.75Ts}}{s^2+2s+5}$

4.5-3 求下列函数的改进 z 变换：

(1) $E(s)=\dfrac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$　　(2) $E(s)=\dfrac{4}{s(s+2)^2}$

(3) $E(s)=\dfrac{s^2+2s+2}{s(s+2)^2}$　　(4) $E(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^2(s+1)^2}$

(5) $E(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{s(s+2)^2(s+4)}$　　(6) $E(s)=\dfrac{2s+7}{(s^2+2s+5)(s+3)}$

4.5-4 求下列函数的 z 变换，这时，会用到习题 4.5-3 的结果。

(1) $E(s)=\dfrac{6e^{-0.3Ts}}{(s+1)(s+2)(s+3)}$　　(2) $E(s)=\dfrac{4e^{-0.6Ts}}{s(s+2)^2}$

(3) $E(s)=\dfrac{s^2+2s+2e^{-1.1Ts}}{s(s+2)^2}$　　(4) $E(s)=\dfrac{(s+2)^2e^{-0.2Ts}}{s^2(s+1)^2}$

(5) $E(s)=\dfrac{s^2e^{-0.3Ts}+2s+3}{s(s+2)^2(s+4)}$　　(6) $E(s)=\dfrac{(2s+7)e^{-0.75Ts}}{(s^2+2s+5)(s+3)}$

4.6-1 一般情况下，如果控制对象加载一个理想时间延迟环节，就可实现对温度控制系统的较精确建模。设习题 4.3-9 的热应力测试室系统中，控制对象的传递函数为：

$$G_p(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{2e^{-2s}}{s+0.5}$$

则该控制对象在对输入的响应之前具有 2s 的时间延迟。本题中，令采样周期 $T=0.6\text{s}$。

(1) 求如图 P4.3-9 所示系统的单位阶跃响应，即求 $e(t)=u(t)$、$d(t)=0$，且不具延迟时的 $c(kT)$。

(2) 设 $G_p(s)$具有上式反映的 2s 延迟，重做(1)问。

(3) 控制对象输入为 $m(t)$，用拉普拉斯变换求无延迟下的 $c(t)$。

(4) 用(3)问的结果求具有延迟的 $c(t)$。

(5) 证明：对(3)问的 $c(t)$进行 $t=kT$ 时的估计，即可得到(1)问的 $c(kT)$。

(6) 证明：对(4)问的 $c(t)$进行 $t=kT$ 时的估计，即可得到(2)问的 $c(kT)$。

4.6-2 对习题 4.3-9 和习题 4.6-1 使用的热应力室系统(图 P4.3-9)，设 $T=0.6\text{s}$，在其采样器和零阶保持器之间插入一个比例-积分(PI)数字控制器，该控制器的传递函数为：

$$D(z)=1.2+\frac{0.1z}{z-1}$$

(1) 设 $d(t)=0$、$e(t)=u(t)$，忽略 2s 的时间延迟，求 $c(kT)$。

(2) 解释(1)问的室温所发生的变化。请问该结果是否是物理可实现的？

(3) 输入同(1)问，求如图 P4.3-9 所示蒸汽管路上阀值的控制信号 $m(kT)$。

(4) 考虑阀值的物理特性，回答在物理试验室中温度会发生怎样的变化？

4.6-3　对于习题 4.4-6，设 $D(z)$ 的总延迟加上控制对象的延迟合计 $3.4T$ 秒。在新条件下，重做习题 4.4-6。

4.8-1　在如图 P4.8-1 所示系统中，已知连续时间系统部分的离散状态变量为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix} 0.9 & 1 & 2 \\ 0 & 0.9 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{m}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1 \quad 1.5 \quad 2.3)\boldsymbol{x}(k)$$

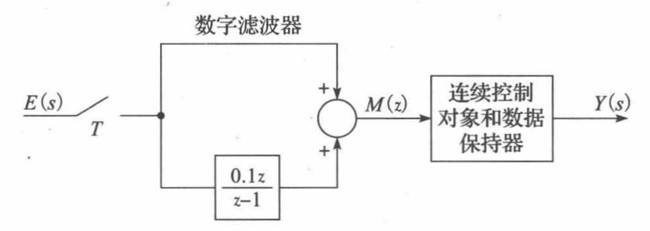


图 P4.8-1　习题 4.8-1 系统

求该系统的离散状态变量表达式。

4.8-2　用下列传递函数替代图 P4.8-1 中的数字滤波器，重做习题 4.8-1。

$$D(z)=\frac{z-0.5}{(z-0.8)(z-1)}$$

4.9-1　(1) 设带有代数环的连续时间系统模型为：

$$\dot{x}_1(t)=-2x(t)+0.5\dot{x}(t)+3u(t)$$
$$y(t)=\dot{x}(t)+4u(t)$$

推导出该系统的状态方程。

(2) 当系统描述变为：

$$\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+2\dot{x}_2(t)+u_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-\dot{x}_2(t)-x_2(t)-\dot{x}_1(t)+x_1(t)+u_2(t)$$
$$y(t)=\dot{x}_2(t)$$

用 4.9 节的矩阵方法，重做(1)问。

(3) 求标准状态变量形式下的 $\dot{x}_1(t)$，$\dot{x}_2(t)$，以验证(2)问的结果。

4.9-2　设带有代数环的连续时间系统的模型为

$$\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+2\dot{x}_2(t)+u_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-\dot{x}_2(t)-x_2(t)-\dot{x}_1(t)+x_1(t)+u_2(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=-\dot{x}_3(t)-x_3(t)-\dot{x}_2(t)+x_1(t)+u_2(t)$$
$$y(t)=\dot{x}_3(t)$$

用 4.9 节的矩阵方法，推导该系统的状态方程，并通过求标准状态变量形式下的 $\dot{x}_1(t)$，$\dot{x}_2(t)$和 $\dot{x}_3(t)$，验证所得结果。

4.10-1　已知控制系统如图 P4.10-1 所示，控制对象由如下一阶微分方程描述：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+0.05y(t)=0.1m(t)$$

令 $T=2\mathrm{s}$。

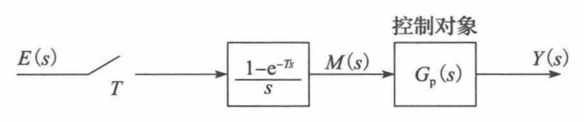


图 P4.10-1　习题 4.10-1 系统

(1) 求系统传递函数 $Y(z)/E(z)$。

(2) 使用(1)问的结果绘制离散仿真图，并给出该图的状态方程。

(3) 绘制 $G_p(s)$的连续时间仿真图，并给出该图的状态方程。

(4) 用(3)问的状态变量模型建立系统的离散状态模型，离散系统的状态向量与连续时间系统相同。

(5) 绘制(4)问的离散状态模型的仿真图。

(6) 用梅森增益公式求(5)问的传递函数，其结果一定与(1)问的结果相同。

4.10-2 将系统的控制对象改由如下二阶微分方程描述，重做习题 4.10-1。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 0.15\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 0.005y(t) = 0.1m(t)$$

4.10-3 设图 P4.3-8 所示的机器人手臂系统中的 $T=0.1\mathrm{s}$。

(1) 求系统传递函数 $\Theta_a(z)/M(z)$。

(2) 用(1)问的结果绘制离散仿真图，并给出该图的状态方程。

(3) 绘制放大器-伺服电动机-齿轮系统的连续时间仿真图，并给出该图的状态方程。

(4) 用(3)问的状态变量模型建立系统的离散状态模型，离散系统的状态向量与连续时间系统相同。

(5) 绘制(4)问的离散状态模型的仿真图。

(6) 用梅森增益公式求(5)问的传递函数，其结果一定与(1)问的结果相同。

4.10-4 令图 P4.3-9 所示的热应力室系统中 $T=0.6\mathrm{s}$，忽略干扰输入 $d(t)$。

(1) 求系统传递函数 $C(z)/E(z)$。

(2) 用(1)问的结果绘制离散仿真图，并给出该图的状态方程。

(3) 绘制控制对象的连续时间仿真图，并给出该图的状态方程。

(4) 用(3)问的状态变量模型建立系统的离散状态模型，离散系统的状态与连续时间系统相同。

(5) 绘制(4)问的离散状态模型的仿真图。

(6) 用梅森增益公式求(5)问的传递函数，其结果一定与(1)问的结果相同。

4.10-5 设图 P4.3-10 所示卫星系统的 $T=1\mathrm{s}$，重做习题 4.10-4。其中，(1)问所需要的传递函数是 $\Theta(z)/E(z)$。

4.10-6 设图 P4.3-11 所示的天线系统的 $T=0.05\mathrm{s}$，重做习题 4.10-4。其中，(1)问所需要的传递函数是$\Theta(z)/E(z)$。

4.10-7 将一个比例-积分(PI)数字控制器置于控制系统的采样器和保持数据器之间，设该控制器的传递函数为：

$$D(z) = 1.2 + \frac{0.1z}{z-1}$$

求如下系统的离散状态模型。

(1) 习题 4.10-1 的系统。

(2) 习题 4.10-5 的卫星系统。

(3) 对(1)问和(2)问，从状态模型出发，借助系统传递函数得到的系统离散状态模型，用 MATLAB 程序给予验证。

第5章

闭环系统

5.1 引言

第 4 章讨论了确定开环离散线性时不变(LTI)系统输出函数的方法，本章将此方法推广到闭环离散线性时不变系统输出函数的求解中。同样需要建立闭环离散系统的状态变量模型。为方便讲解，此处将离散时间系统简称为离散系统。

5.2 初步概念

在介绍采样闭环系统之前，先来回顾一下对控制对象形成的具有级联关系的开环系统。按照第 4 章的方法，如图 5-1a 所示系统的输出为：

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)E(z) \tag{5-1}$$

如图 5-1b 所示的输出为：

$$C(z) = \overline{G_1G_2}(z)E(z) \tag{5-2}$$

对于如图 5-1c 所示系统来说，

$$C(s) = G_2(s)A^*(s) = G_2(s)\overline{G_1E^*}(s) \tag{5-3}$$

$$C(z) = G_2(z)\overline{G_1E}(z) \tag{5-4}$$

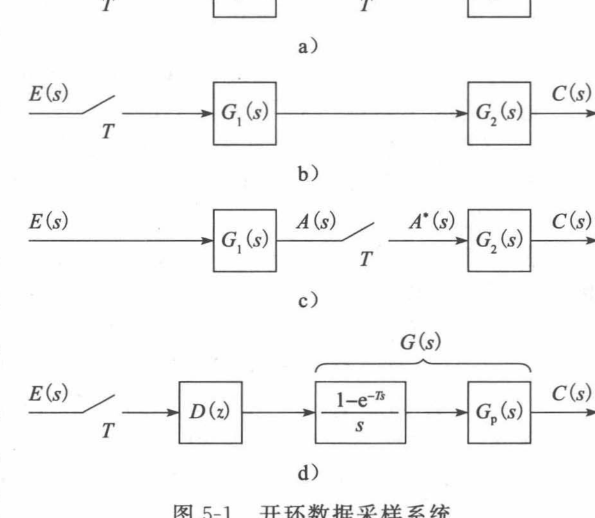


图 5-1 开环数据采样系统

此时，由于 $E(z)$ 不能从 $\overline{G_1E}(z)$ 分离出来，因此无法得到传递函数。通常情况下，输入函数作用于系统的模拟单元时，该输入信号是不经采样的，此时便无法得到该离散系统的传递函数。但是，输出总是可以表示成输入的函数，因此，此类系统的分析和设计问题不会特别难。如图 5-1d 所示的输出为：

$$C(z) = D(z)G(z)E(z)$$

式中：

$$G(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}G_{\mathrm{p}}(s)\right] = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\frac{G_{\mathrm{p}}(s)}{s}\right]$$

现在来推导如图 5-2 所示闭环系统的输出函数。首先

$$C(s) = G(s)E^*(s) \tag{5-5}$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \tag{5-6}$$

将式(5-5)代入式(5-6)，得：

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s) \tag{5-7}$$

再取星形变换，得：

$$E^*(s) = R^*(s) - \overline{GH}^*(s)E^*(s) \tag{5-8}$$

解 $E^*(s)$，得：

$$E^*(s)=\frac{R^*(s)}{1+\overline{GH}^*(s)} \tag{5-9}$$

根据式(5-5)，得到该系统连续输出表达式为：

$$C(s)=G(s)\frac{R^*(s)}{1+\overline{GH}^*(s)} \tag{5-10}$$

采样输出为：

$$C^*(s)=G^*(s)E^*(s)=\frac{G^*(s)R^*(s)}{1+\overline{GH}^*(s)},C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+\overline{GH}(z)} \tag{5-11}$$

我们来看看如图 5-2 所示系统的实际情况，由于$E^*(s)$是一系列脉冲函数，所以必须假定$G(s)$所接受的脉冲信号是由零阶保持器送出的。除特殊情况外，本章内容都遵循此原则，即如果对拉普拉斯传递函数进行星形变换，则需假设传递函数中包含了零阶保持器，以便处理星形变换输入。

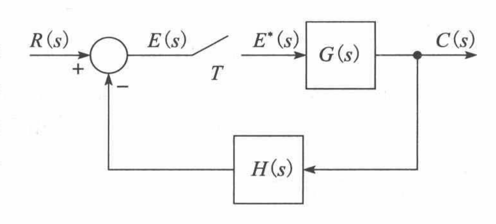


图 5-2　闭环数据采样系统

如上所述，在推导闭环系统输出函数的时候会碰到一些问题。假设对式(5-6)做过星形变换之后代入式(5-5)，则有：

$$C(s)=G(s)R^*(s)-G(s)\overline{HC}^*(s) \tag{5-12}$$

式中：

$$C^*(s)=G^*(s)R^*(s)-G^*(s)\overline{HC}^*(s) \tag{5-13}$$

通常情况下，$C^*(s)$不能从$\overline{HC}^*(s)$中分离出来，因此就无法根据式(5-13)解出$C^*(s)$。如上所述，在进行系统分析时，如果存在不能独立的因子，就不能对其描述式进行星形变换。如果系统变得更为复杂，则求解其方程将变得更困难。下面来讨论简单的分析方法，以避开此类问题。

先来看看如图 5-3 所示系统，该系统的输入在送入模拟单元之前未经采样，因此无法推出其传递函数。

但是该系统还是可分析的。从图 5-3 可知，

$$C(s)=G(s)E(s) \tag{5-14}$$

$$E(s)=R(s)-H(s)C^*(s) \tag{5-15}$$

将式(5-15)代入式(5-14)，得：

$$C(s)=G(s)R(s)-G(s)H(s)C^*(s) \tag{5-16}$$

对式(5-16)进行星形变换，得：

$$C^*(s)=\overline{GR}^*(s)-\overline{GH}^*(s)C^*(s) \tag{5-17}$$

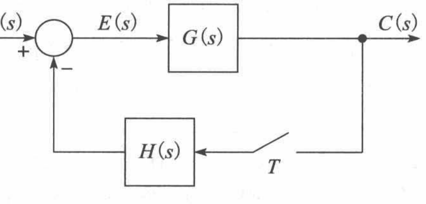


图 5-3　采样系统

由于系统中$r(t)$未经采样，因此，式(5-17)中的作用函数$R(s)$不能作为一个独立的因子。通过式(5-17)求解$C^*(s)$，得到：

$$C^*(s)=\frac{\overline{GR}^*(s)}{1+\overline{GH}^*(s)},C(z)=\frac{\overline{GR}(z)}{1+\overline{GH}(z)} \tag{5-18}$$

通过式(5-16)和式(5-18)，可知连续输出函数为：

$$C(s)=G(s)R(s)-\frac{G(s)H(s)\overline{GR}^*(s)}{1+\overline{GH}^*(s)} \tag{5-19}$$

对于如图 5-3 所示系统来说，输入函数未经采样处理就直接作用于系统的模拟单元，因此无法推导出该系统的传递函数。在实际系统中，常遇到多输入的情况。例如，闭环模式下的飞行器系统(如自动飞行器的飞行系统)。设自动飞行器执行数字化的程序，因此它是一个闭环的数字控制系统。控制指令经 A/D 转换器的变换后方能作为执行控制任务的计算机的输入，或者计算机自身就能直接生成控制指令。于是该系统因输入被采样而能导出传递函数。而对于高度控制系统来说，垂直风是它的一种未经采样的输入，因此虽然能

推导出该系统从输入命令到高度输出的传递函数，但无法得到该系统从风输入到高度输出的传递函数。

5.3 推导

由于无法写出理想采样器的传递函数，从而造成确定数据采样系统传递函数的困难。下面借助图5-4所示系统来探讨如何得到这种系统传递函数的方法。首先，图5-4所示系统的信号流图如图5-5所示，考虑到无法写出采样器的传递函数，我们将采样器的作用留下来而将采样器从系统的信号流图中略去，这个作用就体现在图中标注了星号的 E_1^*，它是控制对象的输入。我们称该流图为原始信号流图。此类离散时间系统的采样输出 $C^*(s)$ 可通过下列步骤得到。

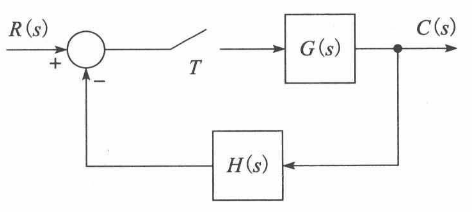


图5-4 数据采样控制系统

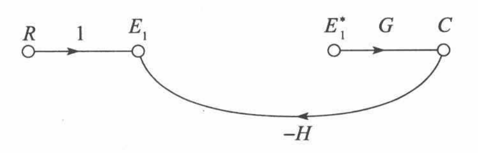


图5-5 图5-4数据采样系统的原始流图

1）建立原始信号流图，如图5-5所示。

2）为每个采样器输入指定一个变量。对这个变量进行星形变换后作为采样器的输出。例如，图5-5所示 E_1 是采样器的输入，E_1^* 则是采样器的输出。

3）将采样器输出视为源节点（输入），用采样器的输出和系统输入来表示采样器的输入和系统输出。例如，图5-5所示流图中

$$E_1 = R - GHE_1^* \tag{5-20}$$

$$C = GE_1^* \tag{5-21}$$

为简便起见，上两式中略去了自变量 s，即 $E_1 = E_1(s)$，$C = C(s)$，…。

4）对上述等式进行星形变换，并用简便的方法求解。例如，

$$E_1^* = R^* - \overline{GH}^* E_1^* \tag{5-22}$$

$$C^* = G^* E_1^* \tag{5-23}$$

由式(5-22)，得：

$$E_1^* = \frac{R^*}{1 + \overline{GH}^*} \tag{5-24}$$

再根据式(5-23)和式(5-24)，有：

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)} R^*(s) \tag{5-25}$$

如果系统中使用了多个采样器，待解的便是星形变量方程组，这时，可启用克莱默法则或适于求解线性联立方程组的任意方法。

也可以通过建立信号流图（也称为采样信号流图）、使用梅森增益公式来求解上述系统方程组，在采样信号流图足够简单以至于所有的环易于辨别的情况下，这种方法比克莱默法则好用。为说明这一点，再次考查式(5-21)，式(5-22)和式(5-23)，这3个方程的信号流图如图5-6所示，根据该流图可写出：

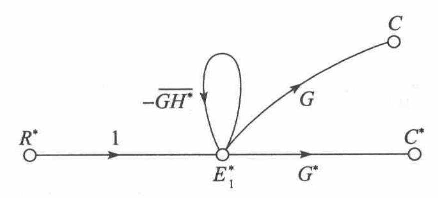


图5-6 图5-4系统的采样信号流图

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)} R^*(s) \tag{5-26}$$

此结果与式(5-25)一致。

根据图5-6还可写出：

$$C(s)=\frac{G(s)}{1+\overline{GH}^{*}(s)}R^{*}(s) \tag{5-27}$$

下面举例说明求解闭环系统输出函数的方法。

例 5.1 已知数字控制系统如图 5-7a 所示，图 5-7b 所示的是该系统的模型(见 4.4 节)，其原始流图如图 5-8 所示。

根据图 5-8，有：

$$E=R-GHD^{*}E^{*}$$
$$C=GD^{*}E^{*}$$

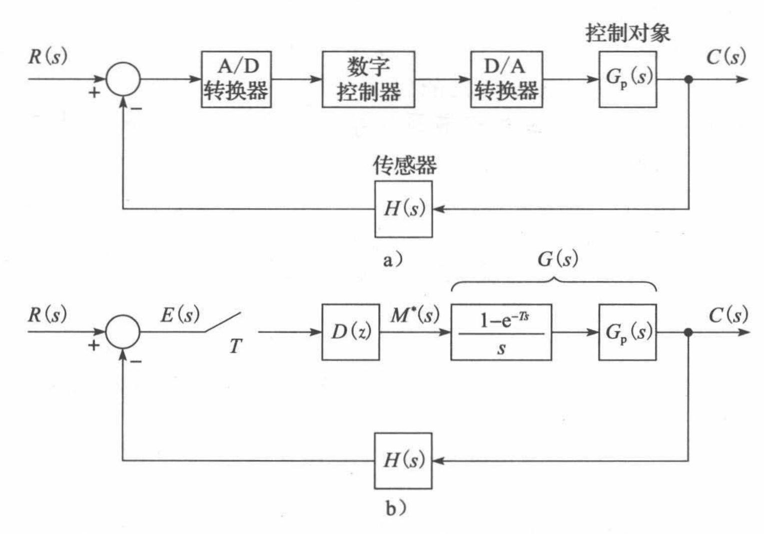


图 5-7　闭环数字控制系统

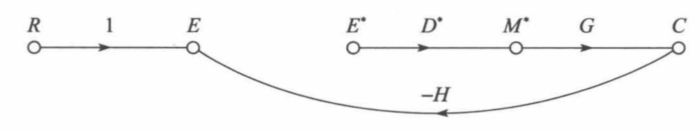


图 5-8　例 5.1 的原始流图

于是

$$E^{*}=R^{*}-\overline{GH}^{*}D^{*}E^{*}\rightarrow E^{*}=\frac{R^{*}}{1+D^{*}\overline{GH}^{*}}$$
$$C^{*}=G^{*}D^{*}E^{*}$$

因此

$$C(z)=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)\overline{GH}(z)}R(z)$$ ◀

例 5.2 已知控制系统如图 5-9 所示，图 5-10 是它的原始信号流图，由该图可得系统方程：

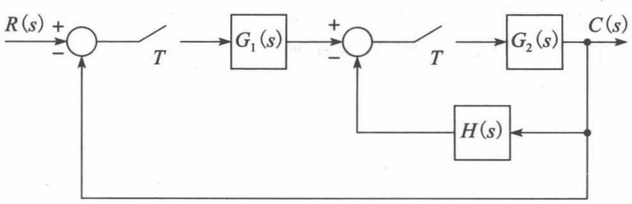


图 5-9　例 5.2 的数据采样系统

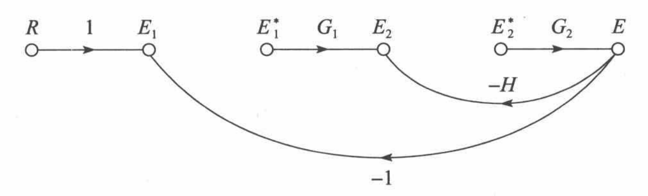


图 5-10　例 5.2 的原始流图

$$E_1 = R - G_2 E_2^*$$
$$E_2 = G_1 E_1^* - G_2 H E_2^*$$
$$C = G_2 E_2^*$$

对它们进行星形变换，得：

$$E_1^* = R^* - G_2^* E_2^*$$
$$E_2^* = G_1^* E_1^* - \overline{G_2 H}^* E_2^*$$
$$C^* = G_2^* E_2^*$$

由此画出采样信号流图如图 5-11 所示。

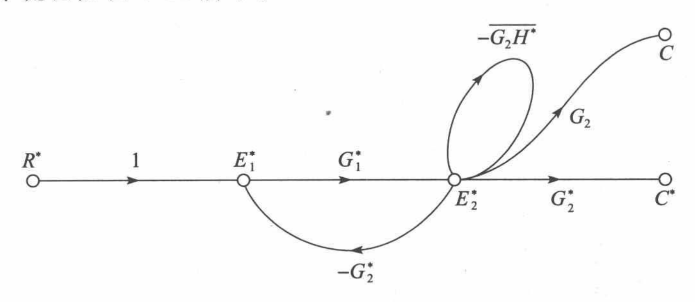


图 5-11　例 5.2 的采样流图

通过梅森增益公式，可得：

$$C^* = \frac{G_1^* G_2^*}{1 + G_1^* G_2^* + \overline{G_2 H}^*} R^* \text{ 或 } C(z) = \frac{G_1(z) G_2(z) R(z)}{1 + G_1(z) G_2(z) + \overline{G_2 H}(z)}$$

及

$$C(s) = \frac{G_2(s) G_1^*(s)}{1 + G_1^*(s) G_2^*(s) + \overline{G_2 H}^*(s)} R^*(s)$$ ◀

例 5.3 再举一例。已知控制系统如图 5-12 所示。请注意，由于送到 $G_2(s)$ 的输入 $R(s)$ 未经采样，于是给不出该系统的传递函数。绘制图 5-12 所示的原始信号流图如图 5-13 所示，根据此图，有：

$$E_1 = R - C$$
$$C = E_1 + G_2[G_1 E_1^* - C] = R - C + G_1 G_2 E_1^* - G_2 C$$

图 5-12　例 5.3 的数据采样系统

于是

$$[1 + 1 + G_2] C = R + G_1 G_2 E_1^*$$

及

$$C = \frac{R}{2+G_2} + \frac{G_1G_2}{2+G_2}E_1^*$$

$$E_1 = R - C = \frac{(1+G_2)R}{2+G_2} - \frac{G_1G_2}{2+G_2}E_1^*$$

还可以根据图 5-13 所示流图，用梅森公式直接写出 E_1 和 C 的方程。

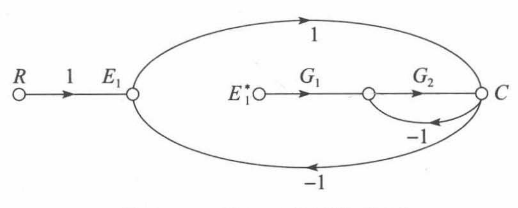


图 5-13　例 5.3 的原始流图

因此

$$C^* = \left[\frac{R}{2+G_2}\right]^* + \left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right]^* E_1^*$$

$$E_1^* = \left[\frac{(1+G_2)R}{2+G_2}\right]^* - \left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right]^* E_1^*$$

根据上两式得到的采样流图如图 5-14 所示。利用梅森增益公式，可得

$$C^*(s) = \left[\frac{R}{2+G_2}\right]^*(s) + \frac{\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right]^*(s)}{1+\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right]^*(s)}\left[\frac{(1+G_2)R}{2+G_2}\right]^*(s)$$

如前所述，由于经反馈通路送到系统中连续单元 $G_2(s)$ 的输入未经采样，因此不可能存在传递函数。

前面曾谈到，当采样信号流图为多环，特别是不易辨别出流图中的全部环路时，用克莱默法则的矩阵法求解系统方程会简单些。不过，一旦信号流图的方法和经验被熟练掌握，借助流图，还是能够比较容易快速且准确地获得不过分复杂系统的解的。

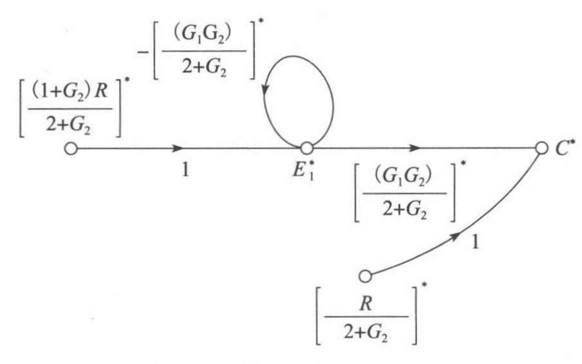


图 5-14　例 5.3 的采样流图

例 5.4　最后一例。已知控制系统如图 5-15 所示，系统中含有一个数字控制器，控制器的计算时间为 t_0 秒（$t_0 < T$），用理想时间延迟模型（见 4.6 节）表示。

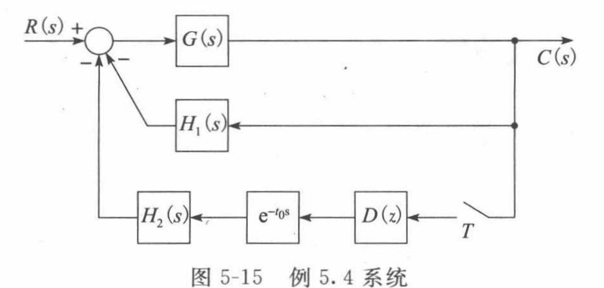


图 5-15　例 5.4 系统

首先，画出该系统的原始信号流图如图 5-16 所示。根据梅森增益公式可得系统方程为：

$$C = \frac{GR}{1+GH_1} - \frac{GH_2 e^{-t_0 s}}{1+GH_1}D^* C^*$$

于是

$$C(z) = \left[\frac{GR}{1+GH_1}\right](z) - \left[\frac{GH_2}{1+GH_1}\right](z,m)D(z)C(z)$$

式中：$mT = T - t_0$。

由上述第二式可直接解出 $C(z)$ 为：

$$C(z) = \frac{\left[\frac{GR}{1+GH_1}\right](z)}{1+\left[\frac{GH_2}{1+GH_1}\right](z,m)D(z)}$$

R　1　G　C
$-H_1$
$-H_2$
C^*
D^*
$e^{-t_0 s}$

图 5-16　例 5.4 原始流图

如果计算延迟大于采样间隔(例如，$t_0=kT+\Delta T$，k 为正整数)，则上式的分母变为：

$$1+z^{-k}\left[\frac{GH_2}{1+GH_1}\right](z,m)D(z)$$

式中：$mT=T-\Delta T$。 ◀

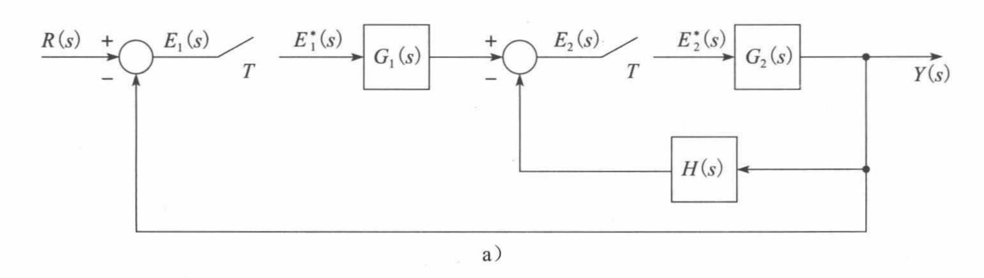
5.4　状态变量模型

前文讲述了求解闭环离散时间系统传递函数的方法。第 4 章讲到，传递函数可用来直接获得系统的离散时间状态变量模型。但是这种方法有一个缺陷，即模拟系统的物理变量不能作为离散时间状态变量呈现出来。

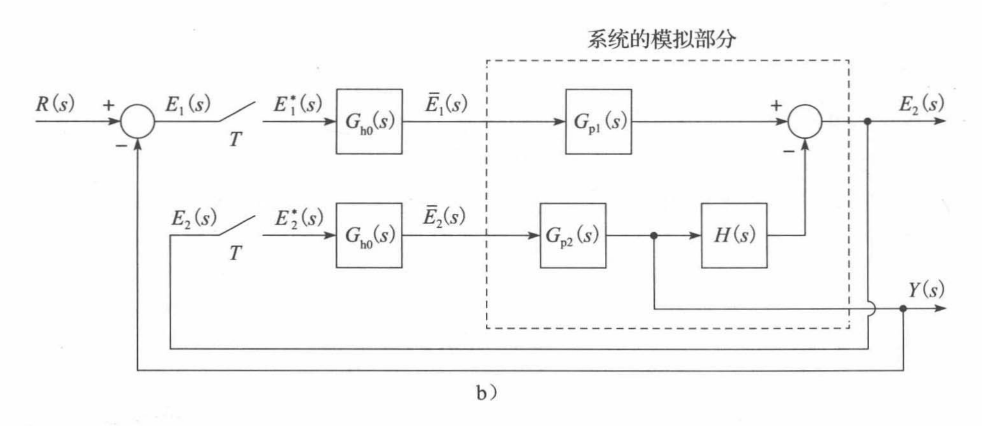
转换连续状态方程　4.10 节讲述的将连续状态方程转换为离散状态方程的方法也可用来确定闭环系统离散时间状态变量模型。先通过一个例子来说明如何使用这一方法，见例 5.2 的系统，将它的系统框图重绘于图 5-17a 中。第一步，把零阶保持器的输出表示成下一个环节的输入，把采样器的输入和系统输出均作为输出引出，如图 5-17b所示，其中，系统的模拟部分绘于图 5-18a 中(由于 $E_1(s)$可依据系统输出 $Y(s)$直接确定，故未将其以输出的形式出现在该图中)。然后写出这个模拟部分的连续状态方程，再由此生成离散时间状态方程。对于本例系统，离散时间状态方程具有如下形式：

$$\boldsymbol{v}(k+1)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{B}_1\begin{bmatrix}e_1(k)\\e_2(k)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y(k)\\e_2(k)\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{D}_1\begin{bmatrix}e_1(k)\\e_2(k)\end{bmatrix} \tag{5-28}$$



a)



b)

图 5-17　闭环系统

根据上述状态方程，可构建出离散仿真图和信号流图，仿真图和信号流图应包含闭环系统外部到仿真图的所有连接路径，如图 5-18b 所示。由此仿真图，可写出系统的离散状态方程。下面举例说明。

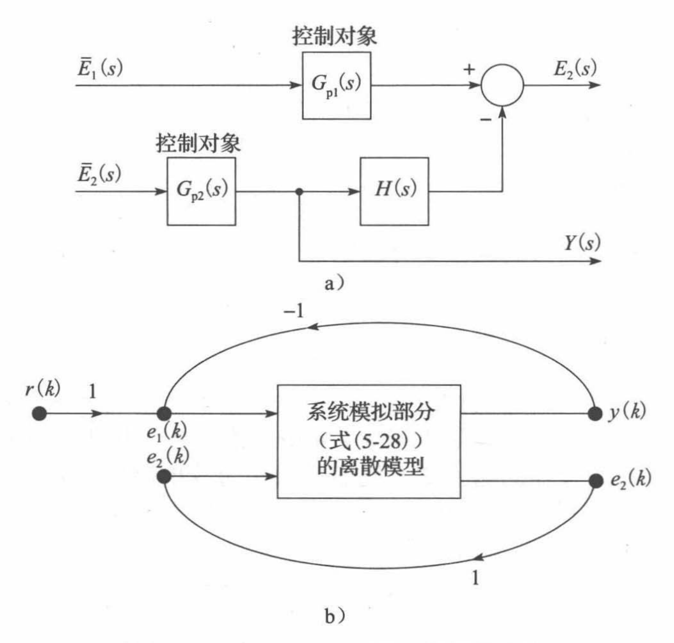


图 5-18 建立离散时间状态模型的方法

例 5.5 已知图 5-17 所示系统中，$T=0.1\text{s}$，且

$$G_1(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s^2(s+1)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}G_{p1}(s)$$

$$G_2(s)=\frac{2(1-\mathrm{e}^{-Ts})}{s(s+2)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}G_{p2}(s)$$

$$G_{p1}(s)=\frac{1}{s(s+1)},\quad G_{p2}(s)=\frac{2}{s+2},\quad H(s)=\frac{10}{s+10}$$

请推导其离散状态模型。

图 5-18a 所示系统的信号流图如图 5-19a 所示。根据该流图可写出其连续状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -10 & 10\\0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{e}_1(t)\\\bar{e}_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y(k)\\e_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(k)$$

在这些方程中，$\bar{e}_1(t)$是输入 $e_1^*(t)$下的零阶保持器的输出，$\bar{e}_2(t)$的定义与$\bar{e}_1(t)$雷同，我们用 4.10 节所述方法来获取离散状态矩阵。对本例来讲，就是利用计算机计算如下矩阵：

$$\boldsymbol{v}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0952 & 0 & 0\\0 & 0.905 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.368 & 0.563\\0 & 0 & 0 & 0.819\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(k)+\begin{bmatrix}0.00484 & 0\\0.0952 & 0\\0 & 0.0686\\0 & 0.181\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(k)\\e_2(k)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y(k)\\e_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(k)$$

图 5-19b 给出的是本系统的仿真图，包含了所有的外部连接路径。由此仿真图可得闭环系统的离散状态方程：

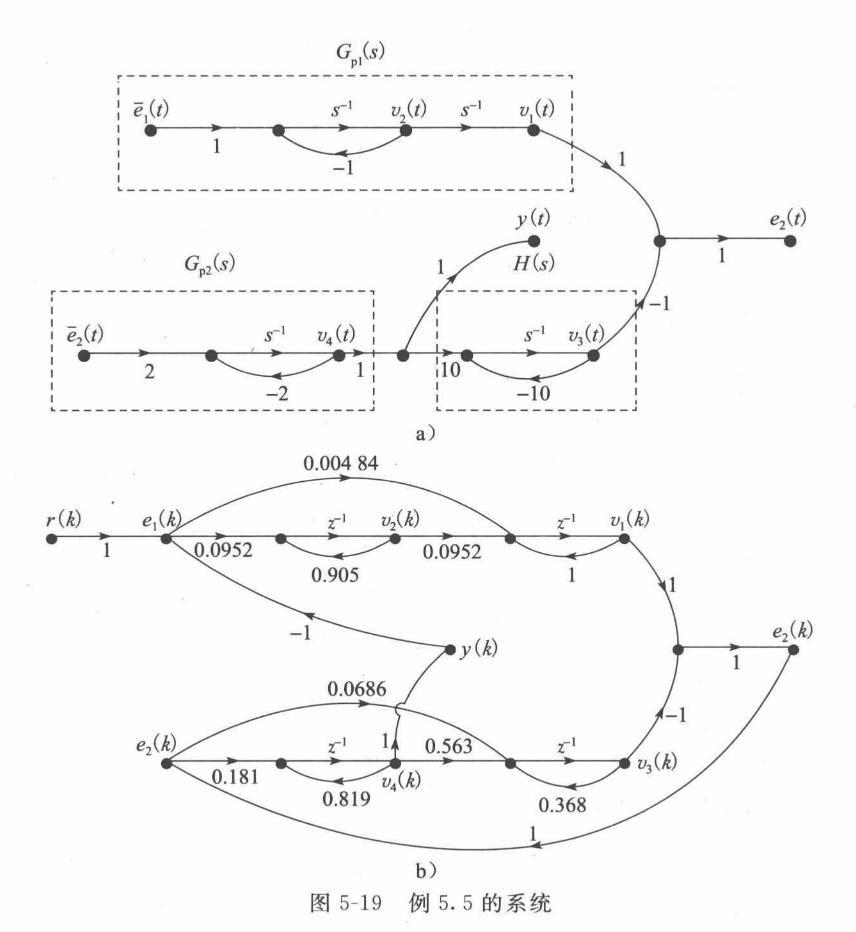


图 5-19 例 5.5 的系统

$$
\boldsymbol{v}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.0952 & 0 & -0.00484\\ 0 & 0.905 & 0 & -0.0952\\ 0.0686 & 0 & 0.299 & 0.563\\ 0.181 & 0 & -0.181 & 0.819\end{pmatrix}\boldsymbol{v}(k)+\begin{pmatrix}0.00484\\ 0.0952\\ 0\\ 0\end{pmatrix}r(k)
$$

$$
\boldsymbol{y}(k)=(0\quad 0\quad 0\quad 1)\boldsymbol{v}(k)
$$

◀

注意本方法与之前介绍的求解闭环系统传递函数的方法类似。系统在每个采样器处断开，并设零阶保持器的输出为输入、采样器的输入为输出，然后写出相对于这些特定输入、输出的离散状态方程。通过仿真图，操控这些状态方程以获取闭环系统的状态方程。

上述方法可用于低阶系统，但是，对复杂流图列写系统方程确实难于实施，这时，需要借助计算机程序来执行矩阵步骤，如何做呢？从例 5.5 入手，将其连续系统的离散状态方程写成：

$$
\boldsymbol{v}(k+1)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{e}(k) \tag{5-29}
$$

$$
\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}(k) \tag{5-30}
$$

式中：$\boldsymbol{e}(k)=(e_1(k)\quad e_2(k))^{\mathrm{T}}$。

合并上述方程产生所需方程：

$$
\boldsymbol{v}(k+1)=[\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1]\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}(k) \tag{5-31}
$$

现举一个例子。

例 5.6 以例 5.5 的系统为例。系统中，$e_1(k)=r(k)-y(k)=r(k)-v_4(k)$、$e_2(k)=v_1(k)-v_3(k)$，可将 $e(k)$ 的方程写成：

$$
\begin{pmatrix}e_1(k)\\ e_2(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{v}(k)+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\boldsymbol{r}(k)=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}(k)
$$

在式(5-31)中，有：

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}0.00484 & 0\\ 0.0952 & 0\\ 0 & 0.0686\\ 0 & 0.181\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -0.00484\\ 0 & 0 & 0 & -0.0952\\ 0.0686 & 0 & -0.0686 & 0\\ 0.181 & 0 & -0.181 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}1 & 0.0952 & 0 & 0\\ 0 & 0.905 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.386 & 0.563\\ 0 & 0 & 0 & 0.819\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -0.00484\\ 0 & 0 & 0 & -0.0952\\ 0.0686 & 0 & -0.0686 & 0\\ 0.181 & 0 & -0.181 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.0952 & 0 & -0.00484\\ 0 & 0.905 & 0 & -0.0952\\ 0.0686 & 0 & 0.2994 & 0.563\\ 0.181 & 0 & -0.181 & 0.819\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}0.00484 & 0\\ 0.0952 & 0\\ 0 & 0.0686\\ 0 & 0.181\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.00484\\ 0.0952\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

我们获得了与例5.5一致的结果，且不易出错。本例中矩阵的求解过程同样可以靠数字计算机来实现。◀

最后一点，我们注意到每个系统的输入在作用于系统的模拟部分之前必须经历采样。如果不是如此，则无法将式(5-30)写成 $r(k)$ 的函数，也就不能得到离散模型。如果未经采样的输入在一个采样周期内缓慢变化(仅输入信号低频变化)，则通常设定该输入历经了采样，即使所得到的离散模型有些轻微错误。

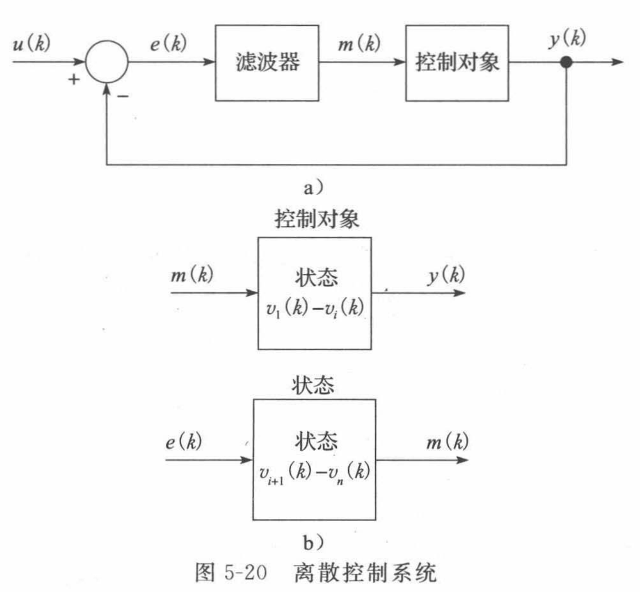


图 5-20　离散控制系统

包含数字控制器　含有数字控制器的系统，其状态方程较难于推导。图5-20a给出的是单环数字控制系统，为得到它的状态方程，我们将数字滤波器和控制对象分开，并单独写出这两部分的状态方程。将状态 $v_1(k)$ 通过 $v_i(k)$ 分配给控制对象，i 是控制对象的阶数；再将状态 $v_{i+1}(k)$ 通过 $v_n(k)$ 分配给滤波器，$n-i$ 是滤波器的阶数。于是，因5-20b所示系统中 $e(k)$ 和 $m(k)$ 均为输入，便可把状态方程写成：

$$\boldsymbol{v}(k+1)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{m}(k)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{e}(k) \tag{5-32}$$

把滤波器表示为：

$$\boldsymbol{m}(k)=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{e}(k) \tag{5-33}$$

把控制对象表示成：

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}(k) \tag{5-34}$$

对于反馈通路，根据式(5-34)，有：

$$\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}(k) \tag{5-35}$$

用式(5-32)、式(5-33)和式(5-35)消除 $e(k)$ 和 $m(k)$ 即可获得系统的状态方程。首先，据式(5-33)和式(5-35)，有：

$$\boldsymbol{m}(k)=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{D}_1[\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}(k)]=[\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}]\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(k) \tag{5-36}$$

而后将式(5-35)和式(5-36)代入式(5-32)，得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(k+1)&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{B}_1[(\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C})\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(k)]\\&\quad+\boldsymbol{B}_2[\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}(k)]\\&=[\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1+(-\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{v}(k)+[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{B}_2]\boldsymbol{u}(k)\end{aligned} \tag{5-37}$$

将符号标准化

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(k+1)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1+(-\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{B}_2\end{aligned} \tag{5-38}$$

举例如下。

例 5.7 本例讨论例 4.13(见图 5-21a)系统的状态方程。根据例 4.13，控制对象的状态方程为：

$$\begin{bmatrix}v_1(k+1)\\v_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\0 & 0.905\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1(k)\\v_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0484\\0.952\end{bmatrix}\boldsymbol{m}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\begin{bmatrix}v_1(k)\\v_2(k)\end{bmatrix}$$

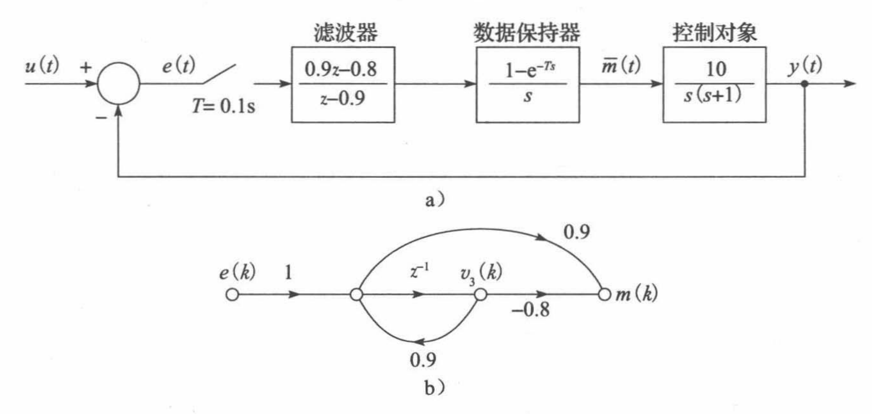


图 5-21 例 5.7 系统

图 5-21b 给出了滤波器模型，它的状态方程为：

$$v_3(k+1)=0.9v_3(k)+e(k)$$

$$m(k)=(0.81-0.8)v_3(k)+0.9e(k)=0.01v_3(k)+0.9e(k)$$

合并 $v(k)$ 的状态方程，得：

$$\begin{bmatrix}v_1(k+1)\\v_2(k+1)\\v_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.0952 & 0\\0 & 0.905 & 0\\0 & 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1(k)\\v_2(k)\\v_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0484\\0.952\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{m}(k)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{e}(k)$$

再根据图 5-21，由于 $e(t)=u(t)-y(t)$，使

$$\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{u}(k)-(1\quad 0\quad 0)\boldsymbol{v}(k)$$

从上可得：

$$\boldsymbol{m}(k)=(0\quad 0\quad 0.01)\boldsymbol{v}(k)+0.9\boldsymbol{e}(k)$$

对比式(5-32)中的方程 $\boldsymbol{v}(k)$ 可得：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 0.0952 & 0\\ 0 & 0.905 & 0\\ 0 & 0 & 0.9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0.0484\\ 0.952\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

根据上面 $\boldsymbol{m}(k)$ 的等式和式(5-33)，可得：

$$\boldsymbol{C}_1=(0\quad 0\quad 0.01),\quad D_1=0.9$$

根据上面 $e(t)$ 等式和式(5-35)，可得：

$$\boldsymbol{C}=(1\quad 0\quad 0)$$

那么，式(5-37)中：

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}0.0484\\ 0.952\\ 0\end{pmatrix}(0\quad 0\quad 0.01)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.000\,484\\ 0 & 0 & 0.009\,52\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$(-\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & -0.9\times(0.0484)\\ 0 & -0.9\times(0.952)\\ -1 & -0.9\times(0)\end{pmatrix}(1\quad 0\quad 0)=\begin{pmatrix}-0.043\,56 & 0 & 0\\ -0.8568 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1+(-\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0.9546 & 0.0952 & 0.000\,484\\ -0.8568 & 0.905 & 0.009\,52\\ -1 & 0 & 0.9\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0.043\,56 & +0\\ 0.8568 & +0\\ 0 & +1\end{pmatrix}$$

根据式(5-37)和式(5-34)，得该例系统的状态方程

$$\boldsymbol{v}(k+1)=\begin{pmatrix}0.9564 & 0.0952 & 0.000\,484\\ -0.8568 & 0.905 & 0.009\,52\\ -1 & 0 & 0.9\end{pmatrix}\boldsymbol{v}(k)+\begin{pmatrix}0.043\,56\\ 0.8568\\ 1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0\quad 0)\boldsymbol{v}(k)$$

可执行如下MATLAB程序来实现上述计算：

```
>> % Use (5-38) to close the loop
A1=[1 0.0952 0;0 0.905 0;0 0 0.9];
B1=[0.0484;0.952;0]; B2=[0;0;1];
C1=[0 0 0.01]; C=[1 0 0]; D1=0.9; T=0.1;
A=A1+B1*C1+(-B2-D1*B1)*C % Closed-loop A matrix
B=D1*B1+B2    % Closed-loop B matrix
C=C   % Closed-loop C matrix
D=0   % Closed-loop D matrix

A =
     0.9564    0.0952    0.0005
    -0.8568    0.9050    0.0095
    -1.0000         0    0.9000
B =
    0.0436
```

```
     0.8568
     1.0000
C =
     1    0  0
D =
     0
```

接下来就是求闭环系统的传递函数 $T(z)$，并通过传递函数分析验证之。

求 $T(z)$的 MATLAB 程序如下：

```
>> % Continuing the program, find T(z) using the closed-loop
state matrices A, B, C, and D
T=0.1; [num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1);
Tz=tf(num,den,T)
% Check the result by computing T(z) using G(z) and D(z)
Gp=tf([10],[1 1 0]);
Gz=c2d(Gp,T);
Dz=tf([0.9 -0.8],[1 -0.9],T);
Tz_check=feedback(Dz*Gz,1)

Tz =
     0.04356 z^2 + 0.003426 z - 0.03746
     ----------------------------------
     z^3 - 2.761 z^2 + 2.623 z - 0.852

Tz_check =
     0.04354 z^2 + 0.00341 z - 0.03743
     ----------------------------------
     z^3 - 2.761 z^2 + 2.623 z - 0.8518
```

◀

例 5.6 和例 5.7 对数字控制系统离散状态方程的推导进行了说明。当然，有些系统要远比示例的系统复杂。不过用于推导式(5-38)状态方程的方法仍可用于较复杂的系统。例如，如果式(5-34)中的 $y(k)$也是 $m(k)$的函数，则推导过程就会复杂一些(参见习题 5.4-11)。

5.5 小结

本章介绍了求解闭环离散时间系统输出量拉普拉斯变换和 z 变换的方法。该方法假设可以使用离散时间系统的方框图或信号流图，鉴于此，可推导出采样信号流图，离散系统输出量的拉普拉斯变换或 z 变换就是利用采样信号流图确定的。另外还讨论了确定闭环离散时间系统状态变量模型的方法，该系统的所有输入均经采样。下一章会利用这些方法展开对闭环离散时间系统的分析和设计。

参考文献

[1] B. C. Kuo, *Digital Control Systems,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1995.

[2] C. L. Phillips and S. M. Seltzer, "Design of Advanced Sampled-Data Control Systems," Contract DAAHO1-72-C-0901, Auburn University, Auburn, AL, July 1973.

[3] J. A. Cadzow and H. R. Martens, *Discrete-Time and Computer Control Systems.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1970.

[4] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems,* 3rd ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

[5] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1973.

[6] E. I. Jury, "Sampled-Data Systems Revisited: Reflections, Recollections, and Reassessments." ASME *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control,* 102(4), pp. 208-217, 1980.

习题

5.3-1 对图 P5.3-1 示出的每个系统，将 $C(z)$表示成输入和传递函数的函数。

5.3-2 对图 P5.3-2 示出的每个系统，将 $C(z)$表示成输入和传递函数的函数。

5.3-3 (1) 推导图 P5.3-1b 所示系统的传递函数 $C(z)/R(z)$。

(2) 推导图 P5.3-1c 所示系统的传递函数 $C(z)/R(z)$。

(3) 即使两个系统不同，但传递函数相同。请解释为何以如此。提示：考虑误差信号。

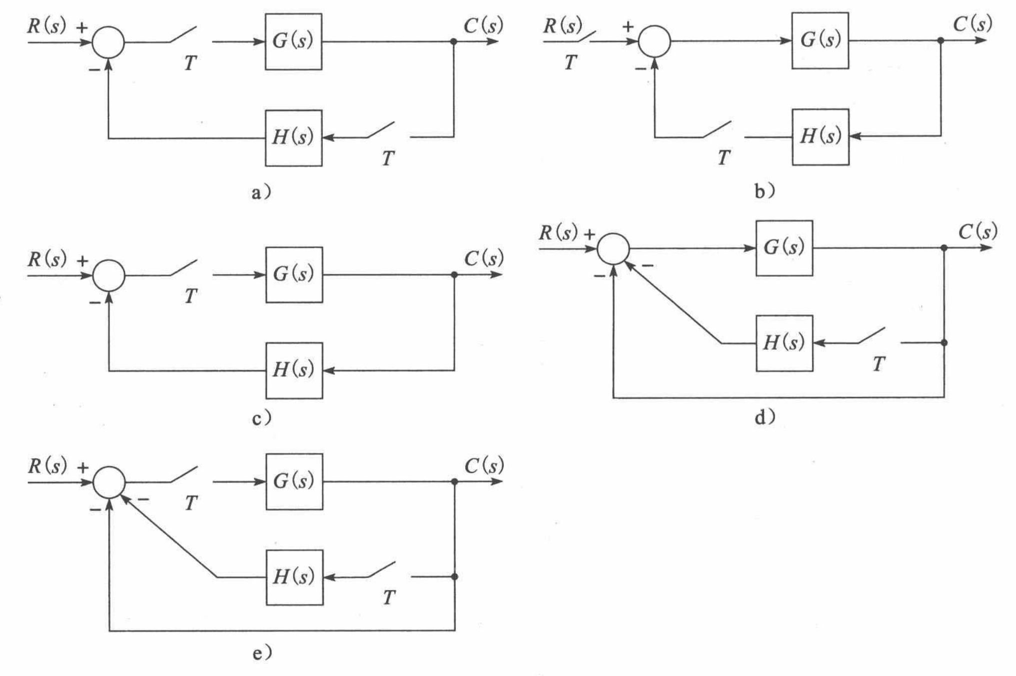


图 P5.3-1　习题 5.3-1 系统

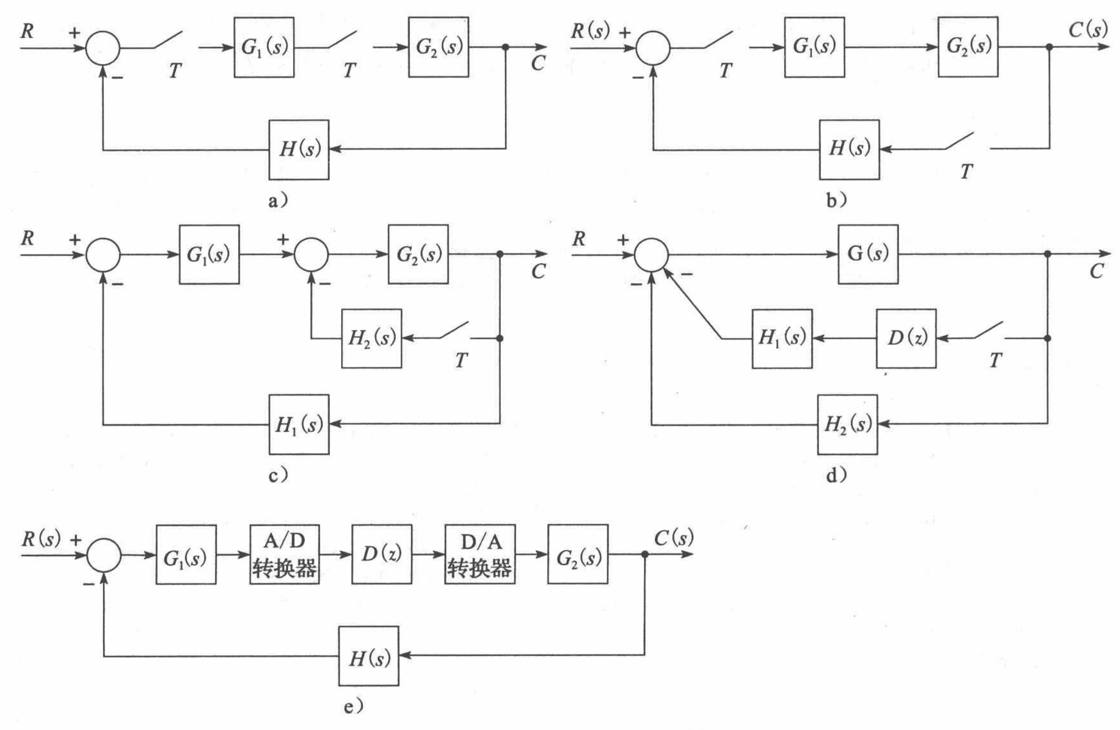


图 P5.3-2　习题 5.3-2 系统

5.3-4　对图 P5.3-4 所示系统：

(1) 将 $G_2(s)$ 从中间的求和节点处断开，求系统对 $G_2(s)$ 送出信号的输出 $C(z)$。

(2) 将 $G_2(s)$ 从后部的求和节点处断开，求系统对 $G_2(s)$ 送出信号的输出 $C(z)$。

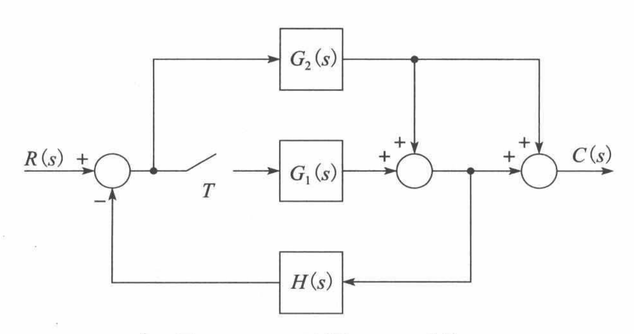


图 P5. 3-4　习题 5. 3-4 系统

(3) 求所示系统的输出 $C(z)$。

5. 3-5　控制系统如图 P5. 3-1a 所示，设位于其前馈通路上的采样器的采样点为 $t=0$，T，$2T$，…，位于反馈通路上的采样点为 $t=T/2$，$3T/2$，$5T/2$，…。

(1) 求系统的传递函数 $C(z)/R(z)$

(2) 设两采样器的采样点均为 $t=T/2$，$3T/2$，$5T/2$，…，写出 $C(z)$的最简形式。

5. 3-6　在图 P5. 3-6 所示系统中，有一个传递函数为 $D(z)$的数字滤波器。请将 $\Phi_m(z)$表示为输入函数的函数。珀欣(Pershing)导弹滚轴控制系统即采用了此配置[2]。

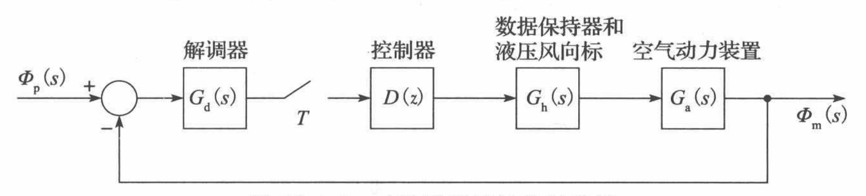


图 P5. 3-6　珀欣导弹滚轴控制系统

5. 3-7　双闭环控制系统如图 P5. 3-7 所示。增益 K 使内环呈现指定的特征。控制器 $D(z)$对整个系统实施补偿。输入信号 $R(z)$由计算机产生，于是系统中不存在连续信号。求 $C(z)$。

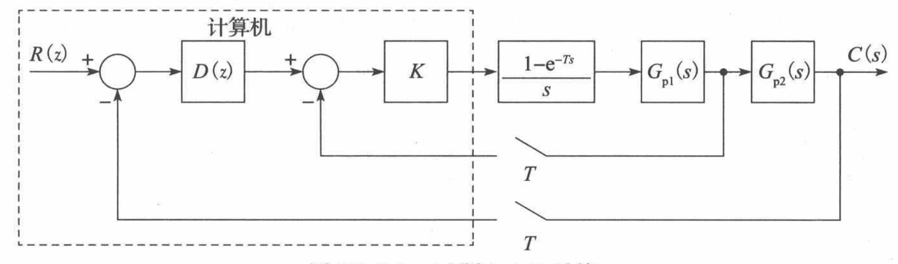


图 P5. 3-7　习题 5. 3-7 系统

5. 3-8　与例 5. 1 系统相比，图 P5. 3-8 所示系统的采样器被移至反馈通路，其他不变。导致此变化的原因有二：①传感器输出已经历采样；②计算机更便于生成输入函数。

(1) 求图 P5. 3-8 所示系统的 $C(s)$和 $C(z)$。注意 $C(s)$不能包含变量 z。

(2) (1)问系统的结构与例 5. 1 系统结构并不一致，但两者的输出函数相同。请问为什么？

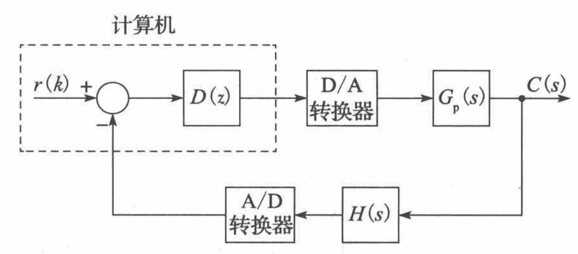


图 P5. 3-8　习题 5. 3-8 系统

5. 3-9　对图 P5. 3-1 示出的各系统，请列出含零阶保持器的传递函数。

5. 3-10　对图 P5. 3-2 示出的各系统，请列出含零阶保持器的传递函数。

5. 3-11　图 P5. 3-11 所示系统中，理想时间延迟表示计算机执行计算程序所需的时间。

(1) 推导该系统的输出函数 $C(z)$。

(2) 设与理想延迟相关的是传感器而非计算机，$H(s)$与理想延迟进行位置互换，再求 $C(z)$。

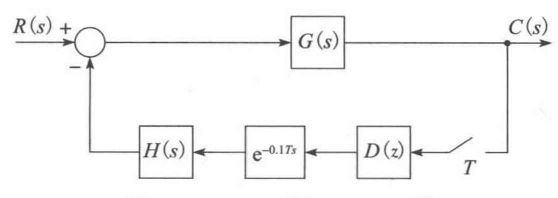


图 P5.3-11 习题 5.3-11 系统

5.3-12 大型测试室的温度控制系统框图如图 P5.3-12 所示，该系统在习题 1.6-1 中有所陈述。扰动模型反映打开测试室门的效应。系统环节的传递函数定义如下：

$$G(s)=\frac{2(1-e^{-Ts})}{s(s+0.5)},G_d(s)=\frac{2.5}{s+0.5},H_k=0.04$$

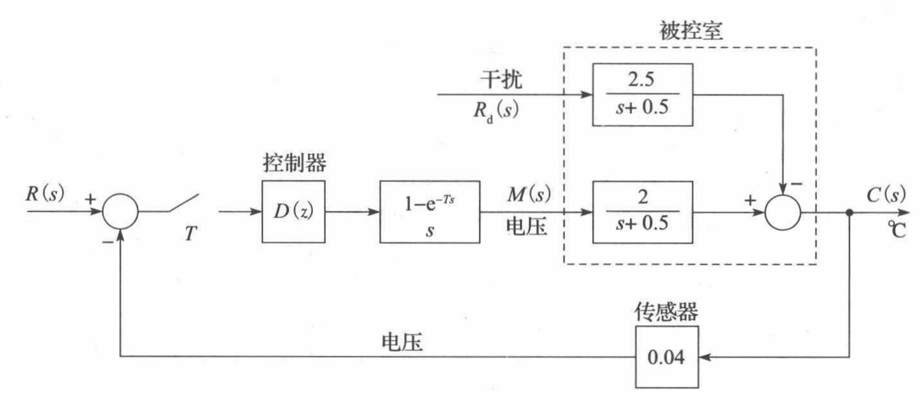


图 P5.3-12 室内温度控制系统

(1) 由上述定义的传递函数推导传递函数 $C(z)/R(z)$。

(2) 设 $r(t)=0$，根据扰动输入及上述定义的传递函数求输出函数 $C(s)$。

(3) 利用叠加原理，求基于(1)问和(2)问结果的 $C(z)$的完整表达式。

5.3-13 机器人手臂关节控制系统如图 P5.3-13 所示，该系统在习题 1.5-4 中有所陈述说明。

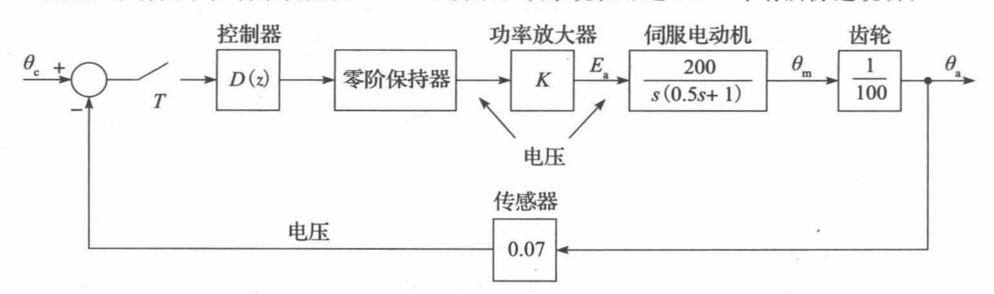


图 P5.3-13 机器人手臂关节控制系统

(1) 传感器输入为 θ_a(单位为(°))、输出单位为 V。如果机器人关节的机械运动限度为±135°，试求该传感器输出电压的范围，A/D 转换器输入电压的范围又为何?

(2) 令伺服电动机和齿轮的传递函数为 $G_p(s)$，传感器增益 $H_k=0.07$。求系统的传递函数，该传递函数是 K、$G_p(s)$等的函数。

(3) 设 $K=2.4$、$T=0.1$s 及 $D(z)=1$，求该系统的传递函数。

5.3-14 卫星控制系统如图 P5.3-14 所示。空间方位角 $\theta(t)$的单位为(°)，在 0～360(°)之间变化。传感器增益 $H_k=0.02$。

(1) 设可选用的 A/D 转换器的输入范围有 0～5V，0～10V，0～20V，±5V，±10V 和±20V。请问应选择哪个范围下的 A/D 转换器? 并请说明理由。

(2) $r(t)$为输入电压信号，求当卫星的空间方位角 $\theta(t)$为 70°时 $r(k)$的值。

(3) 设 $\theta(t)$的变化范围为±180°，重做(1)问和(2)问。

(4) 令卫星传递函数 $G_p(s)=1/(Js^2)$，求系统的传递函数，该传递函数是 $D(z)$、K 等的函数。

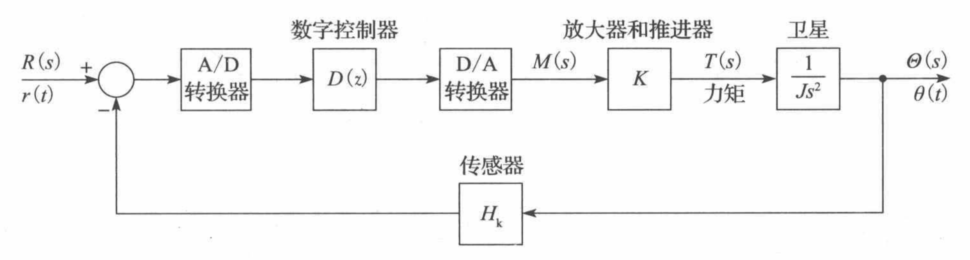


图 P5.3-14 卫星控制系统框图

(5) 设 $D(z)=1$、$T=1\text{s}$、$K=20$ 及 $J=0.1$，求系统传递函数。

5.3-15 天线控制系统如图 P5.3-15 所示，天线角度 $\theta(t)$ 的单位为(°)，在±45°之间变化。

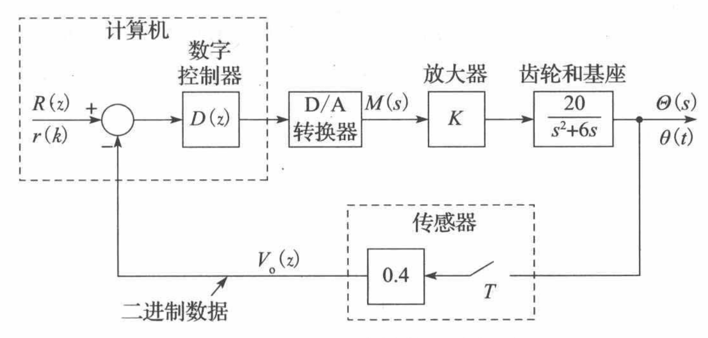


图 P5.3-15 天线控制系统框图

(1) 输入信号 $r(k)$ 由计算机产生。求卫星空间方位角 $\theta(t)$ 为 30°和−30°时 $r(k)$ 的值。

(2) 设电动机、齿轮和基座的传递函数 $G_p(s)=20/(s^2+6s)$。求系统的传递函数，该传递函数是 $D(z)$、K 等的函数。

(3) 设 $D(z)=1$、$T=0.05\text{s}$ 及 $K=20$，求系统传递函数。

(4) 用 MATLAB 程序验证(3)问的结果。

5.4-1 已知一闭环系统的传递函数如下：

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{z^2+0.3z+0.2}{z^2-z+0.9}$$

(1) 将 $c(k)$ 表示成 $r(k)$ 的函数，这个函数应该是一个独立的微分方程。

(2) 写出该系统的一组状态方程。

(3) 再由(2)问求传递函数，以验证(2)问的结果。

(4) 用 MATLAB 程序验证(3)问的结果。

5.4-2 对如下传递函数重复习题 5.4-1 的要求。

(1) $\dfrac{C(z)}{R(z)}=\dfrac{0.1z}{z-0.9}$　　(2) $\dfrac{C(z)}{R(z)}=\dfrac{0.1}{z-0.9}$

(3) $\dfrac{C(z)}{R(z)}=\dfrac{0.2z-0.05}{z-0.9}$　　(4) $\dfrac{C(z)}{R(z)}=\dfrac{0.8z+0.7}{z^2-1.6z+0.8}$

5.4-3 设图 P5.3-1a 系统的 $T=0.1\text{s}$ 及

$$G(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s^2},H(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s^2+s}$$

(1) 求 $G(z)$ 和 $H(z)$。

(2) 画出 $G(z)$ 和 $H(z)$ 的仿真图，对它们进行互连以形成图 P5.3-1a 所示的控制系统。

(3) 写出(2)问中的离散状态方程。

(4) 用(1)问的传递函数求系统的特征方程。

(5) 证明：(3)问状态模型的特征方程与(4)问的特征方程相同。

5.4-4 设图 P5.4-4 所示系统的 $T=0.1\text{s}$，分别用下列微分方程描述控制对象，推导出该闭环系统的离散状态方程。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=3\overline{m}(t)$，将 $y(kT)$ 选为状态变量。

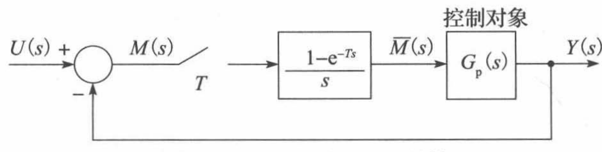


图 P5.4-4　习题 5.4-4 系统

(2) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=6\overline{m}(t)$，将 $y(kT)$ 和 $dy(t)/dt\big|_{t=kt}$ 选为状态变量。

5.4-5　设图 P5.4-4 所示系统的控制对象具有如下离散状态模型：

$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{m}(k)$

$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{m}(k)$

根据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 推导这个闭环系统的状态模型。

5.4-6　设闭环系统如图 P5.4-4 所示，其控制对象的离散状态模型如下，请分别建立该系统的离散状态变量模型。

(1) $x(k+1)=0.7x(k)+0.3m(k)$

$y(k)=0.2x(k)+0.5m(k)$

(2) $\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -0.9 & 1.3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.1\\ 0.05\end{pmatrix}\boldsymbol{m}(k)$

$\boldsymbol{y}(k)=(1.2\quad -0.7)\boldsymbol{x}(k)$

(3) $\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.9 & 1\\ -1 & 0 & 0.9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\boldsymbol{m}(k)$

$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$

5.4-7　习题 5.3-12 的温度控制系统如图 P5.3-12 所示，设系统中的数字滤波器是一个 PI(比例-积分)控制器，其传递函数为：

$$D(z)=1.1+\frac{0.02z}{z-1}$$

设 $T=0.6\text{s}$，忽略干扰输入，即令 $R_d(s)=0$。

(1) 用系统的闭环传递函数推导其离散状态模型。

(2) 根据控制对象的传递函数推导其离散状态模型。在控制对象的流程图中加入滤波器和反馈路径形成闭环控制系统，推导该闭环系统的状态模型。

(3) 根据(2)问的状态模型求系统传递函数，以验证(2)问的结果。

(4) (1)问状态和(2)问状态的相关性如何？注意，不用写出确切的相关关系。

5.4-8　习题 5.3-14 的卫星控制系统如图 P5.3-14 所示，设系统中的 $D(z)=1$、$T=1\text{s}$、$K=2$ 及 $J=0.1$ 和 $H_k=0.02$。

(1) 用闭环传递函数推导出该系统的离散状态模型。

(2) 根据控制对象的传递函数推导其离散状态模型。在控制对象的流程图中加入反馈路径和系统输入形成闭环控制系统，推导该闭环系统的状态模型。

(3) 根据(2)问求得的状态模型求系统传递函数，以验证(2)问的结果。

(4) 用 MATLAB 程序验证(3)问的结果。

5.4-9　习题 5.3-15 的天线控制系统如图 P5.3-15 所示，设 $D(z)=1$，$T=0.05\text{s}$ 及 $K=20$。

(1) 用闭环传递函数推导出该系统的离散状态模型，要求给出离散状态模型的标准形式。

(2) 根据控制对象的传递函数推导其离散状态模型，在控制对象的流程图中加入反馈路径和系统输入形成闭环控制系统，推导该闭环系统的状态模型。

(3) 根据(2)问求得的状态模型求系统传递函数，以验证(2)问的结果。

(4) 用 MATLAB 程序验证(3)问的结果。

5.4-10　习题 5.3-13 的机器人手臂关节控制系统如图 P5.3-13 所示，设 $D(z)=1$，$T=0.1\text{s}$ 和 $K=2.4$。

(1) 用闭环传递函数推导出该系统的离散状态模型。

(2) 根据控制对象的传递函数推导其离散状态模型，在控制对象的流程图中加入反馈路径和系统输入形成闭环控制系统，推导该闭环系统的状态模型。

(3) 根据(2)问求得的状态模型求系统传递函数，以验证(2)问的结果。

5.4-11 设图 5-20 所示系统的输出表示为：

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}(k)+d_2\boldsymbol{m}(k)$$

(1) 推导此情况下式(5-37)的状态模型。

(2) 该系统有一个代数回路，请指出之。

(3) 代数环路的增益为$-d_1d_2$。若$d_1d_2=-1$，则会对系统方程产生什么影响？

(4) 信号传输过程中总会存在时间延迟，因此可以说，这种时间的延迟使物理系统不会出现代数环。但此延迟通常被忽略掉。请问：在何种情况下，不能忽略系统中的这种延迟？

5.4-12 习题 5.3-14 的卫星控制系统如图 P5.3-14 所示，设 $D(z)=(z-1)/(z-0.5)$、$T=1\text{s}$、$K=2$、$J=0.1$及 $H_k=0.02$。用 Matlab 程序实现如下要求。

(1) 用闭环传递函数得到系统的离散状态模型。

(2) 根据控制对象的传递函数推导其离散状态模型，在控制对象的流程图中加入反馈路径和系统输入形成闭环控制系统，推导该闭环系统的状态模型。

(3) 根据(2)问求得的状态模型求系统传递函数，并与(1)问的结果进行对比，以验证(2)问的结果。

5.4-13 习题 5.3-15 的天线控制系统如图 P5.3-15 所示，设 $D(z)=(4z-3)/(z-0.5)$、$T=0.05\text{s}$及$K=20$。

(1) 用闭环传递函数得到系统的离散状态模型。

(2) 根据控制对象的传递函数推导其离散状态模型，在控制对象的流程图中加入 $D(z)$、反馈路径和系统输入形成闭环控制系统，推导该闭环系统的状态模型。

(3) 根据(2)问求得的状态模型求系统传递函数，并与(1)问的结果进行对比，以验证(2)问的结果。

5.4-14 习题 5.3-13 的机器人手臂关节控制系统如图 P5.3-13 所示，设 $D(z)=(24z-21)/(z-0.5)$、$T=0.1\text{s}$ 及 $K=2.4$。

(1) 用闭环传递函数得到系统的离散状态模型。

(2) 根据控制对象的传递函数推导其离散状态模型，在控制对象的流程图中加入 $D(z)$、反馈路径和系统输入形成闭环控制系统，推导该闭环系统的状态模型。

(3) 根据(2)问求得的状态模型求系统传递函数，并与(1)问的结果进行对比，以验证(2)问的结果。

第6章 系统的时间响应特性

6.1 引言

本章重点介绍五个方面的内容。第一，研究离散时间系统的时间响应；第二，将 s 域映射到 z 域；第三，利用两个域的相关性，探讨闭环 z 域极点对系统瞬时响应的影响；第四，研究系统传递函数特性对系统稳态误差的影响；最后，介绍模拟系统和离散时间系统的仿真方法。

6.2 系统的时间响应

下面，我们通过一些示例来讲解离散时间系统的时间响应，这些示例会同时给出求解系统时间响应的方法。

例 6.1 某一阶系统如图 6-1a 所示，求该系统的单位阶跃响应。

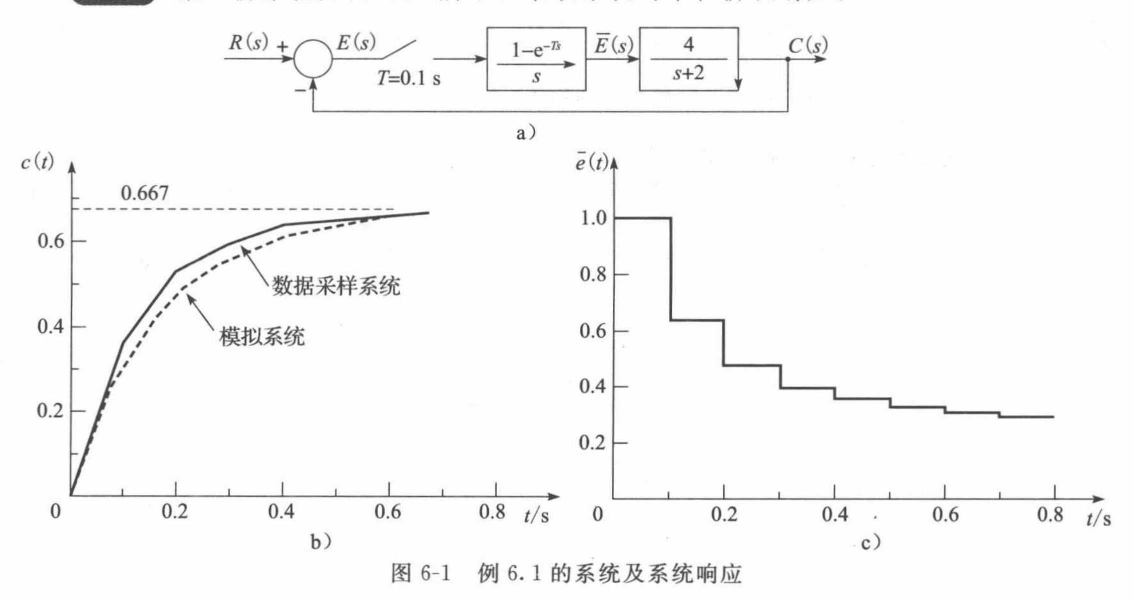


图 6-1 例 6.1 的系统及系统响应

在温度控制系统中，其控制对象的模型通常就是一个一阶系统，因此，图示系统可以作为温度控制系统的基本模型(见 1.6 节)。利用第 5 章所述方法，可将该系统的输出表示为：

$$C(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}R(z)$$

根据定义即附录Ⅵ的变换表，上式中的 $G(z)$ 为：

$$G(z) = \mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\frac{4}{s+2}\right] = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\frac{4}{s(s+2)}\right]$$

$$= \frac{z-1}{z}\frac{2(1-\mathrm{e}^{-2T})z}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-2T})} = \frac{0.3625}{z-0.8187}, T = 0.1\mathrm{s}$$

闭环传递函数 $T(z)$ 为：

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.3625}{z-0.4562}$$

因为是单位阶跃输入，因此 $R(z)=\mathscr{Z}[1/s]=z/(z-1)$，致使

$$C(z)=\frac{0.3625z}{(z-1)(z-0.4562)}=\frac{0.667z}{z-1}+\frac{-0.667z}{z-0.4562}$$

对上式进行 z 反变换，得到系统于采样瞬间的时间响应：

$$c(kT)=0.667[1-(0.4562)^{k}]$$

基于上式的响应序列如表 6.1 所示。由该表数据可知，本例系统的稳态响应值为 0.667。上述计算也可以通过执行如下 MATLAB 程序来实现。

MATLAB 程序如下：

```
>> T = 0.1; Gs = tf([4],[1 2]); Gz = c2d(Gs,T);
Tz = feedback(Gz,1); Rz = tf([1 0],[1 -1],T);
Cz = zpk(Rz*Tz)

Cz =
 0.3625 z
 -----------------
 (z-1) (z-0.4562)

>> % Partial fraction expansion of C(z)/z
 [r,p,k]=residue([0.3625],[1 -1.4562 0.4562])

r =
 0.6666
 -0.6666

p =
 1.0000
 0.4562

k =
 []
```

◀

例 6.2 本例是例 6.1 的延续。为了突出系统响应的采样效果，我们将上例中的采样器和零阶保持器去除，求解这个模拟系统的单位阶跃响应。首先，该系统的闭环传递函数 $T_a(s)$为：

$$T_a(s)=\frac{G_p(s)}{1+G_p(s)}=\frac{4}{s+6}$$

式中：$G_p(s)=4/(s+2)$是控制对象的传递函数。

因此，该模拟系统的单位阶跃响应为：

$$C_a(s)=\frac{4}{s(s+6)}=\frac{0.667}{s}+\frac{-0.667}{s+6}$$

且

$$c_a(t)=0.667\times(1-\mathrm{e}^{-6t})$$

基于上式的响应序列也如表 6-1 所示。图 6-1b 给出了本例及上例的阶跃响应曲线。

表 6-1　例 6.1 响应

kT	$c(kT)$	$c_a(t)$
0	0	0
0.1	0.363	0.300
0.2	0.528	0.466
0.3	0.603	0.557
0.4	0.639	0.606
0.5	0.654	0.634
0.6	0.661	0.648
⋮	⋮	⋮
1.0	0.666	0.665

我们也可以算出数据采样系统在所有瞬间的响应，这实际上是要得到图 6-1a 所示系统的连续输出，可由下式给出：

$$C(s)=G(s)E^*(s)=G(s)\left[\frac{R^*(s)}{1+G^*(s)}\right]=G(s)\left[\frac{R(z)}{1+G(z)}\right]_{z=e^{Ts}}$$

$$=\frac{4(1-e^{-Ts})}{s(s+2)}\left[\frac{\dfrac{z}{z-1}}{1+G(z)}\right]_{z=e^{Ts}}=\frac{4}{s(s+2)}\left[\frac{1}{1+G(z)}\right]_{z=e^{Ts}}$$

式中：

$$\frac{1}{1+G(z)}=\frac{1}{1+\dfrac{0.3625}{z-0.8187}}=\frac{z-0.8187}{z-0.4562}=1-0.363z^{-1}-0.165z^{-2}-\cdots$$

再将 $C(s)$ 的第一项记为 $C_1(s)$，即

$$C_1(s)=\frac{4}{s(s+2)}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+2}$$

于是

$$c_1(t)=2(1-e^{-2t})$$

输出 $C(s)$ 和 $c(t)$ 分别为

$$C(s)=C_1(s)[1-0.363e^{-Ts}-0.165e^{-2Ts}-\cdots]$$

$$c(t)=2(1-e^{-2t})-0.363\times 2\times(1-e^{-2(t-T)})u(t-T)$$

$$-0.165\times 2\times(1-e^{-2(t-2T)})u(t-2T)-\cdots$$

代入 $T=0.1\text{s}$，可逐项验证靠 z 变换方法得到的表 6-1 中的数据，例如

$$c(3T)=c(0.3)=2\times(1-e^{-0.6})-0.363\times 2\times(1-e^{-0.4})$$

$$-0.165\times 2\times(1-e^{-0.2})=0.603$$

我们会发现图 6-1b 所示响应中的 $c(t)$ 呈现出非常规形状的原因。此响应是一系列开环系统的延迟阶跃响应的重叠，而这些阶跃波是采样器和零阶保持器给出的结果。例如，在 $0\leqslant t<0.1\text{s}$ 期间

$$c(t)=2\times(1-e^{-2t})$$

我们注意到，具有图 6-1a 所示结构的数据采样系统，无论其输入具有怎样的函数形式，系统对它的时间响应总是一系列阶跃响应的叠加。而输入到控制对象的那些阶跃信号就是绘制于图 6-1c 所示响应中的零阶保持器的输出 $\bar{e}(t)$。◀

需要注意的是，与计算 $c(kT)$ 相比，计算连续输出量 $c(t)$ 存在一定的困难。基于此，我们很少计算连续的输出；如果一定需要 $c(t)$，可以启用仿真法。一般来讲，仿真是一种可以算出所有时间点响应实用方法。仿真法的介绍安排在 6.6 节。

例 6.3 继续讨论例 6.1 和例 6.2 的系统。回顾前面的内容，一阶模拟系统的响应有一个瞬态响应项 $ke^{-t/\tau}$，其中 τ 为时间常数；接着我们发现，图 6-1a 所示的模拟系统的时间常数为 0.167s。如何选择采样率呢？有一个经验型法则，即是在一个时间常数的时间内至少获得 5 个采样样本，如此采样率视为首选方案(系统模型和实际物理系统的实验结果表明需要不同的速率)。对于本系统，我们期望用缩短采样周期的办法来减弱采样所造成的影响，进而使数据采样系统的特性更接近模拟系统。实际上，如果将 T 定为 0.04s，例 6.1 的数据采样系统的单位阶跃响应便会与模拟系统几乎一致。这一点我们将通过下例进一步说明之。

另外，数据采样系统的阶跃响应的终值可使用 z 变换的终值定理计算出来，即

$$\lim_{n\to+\infty}c(nT)=[(z-1)C(z)]\big|_{z=1}=\left[(z-1)\frac{G(z)}{1+G(z)}R(z)\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$=\left[(z-1)\frac{G(z)}{1+G(z)}\frac{z}{z-1}\right]\Bigg|_{z=1}=\frac{zG(z)}{1+G(z)}\Bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{G(1)}{1+G(1)}=\frac{2}{1+2}=0.667$$

以上结果可在表 6-1 所示响应中得以验证。注意上述推导是具有普适性的。由于系统输入为恒定的单位 1，则从推导过程可知，一个稳定的数据采样系统，其直流增益就是闭环传递函数在 $z=1$ 的值(见 4.3 节)。

本例关注的最后一点：对于输出为下式的连续时间系统：

$$C(s)=G_{\mathrm{p}}(s)E(s)$$

其直流增益为(见 4.3 节)：

$$\text{dc gain}=\lim_{s\to 0}G_{\mathrm{p}}(s)$$

如果在常数输入下 $c(t)$ 具有终值，则直流增益即为 $G_{\mathrm{p}}(0)$。对于图 6-1a 所示系统来说，如果采样器的输入为常数，那么零阶保持器的输出也是常数，并与采样器的输入相等，这时，采样器和数据保持器的存在与否不对系统产生影响，因而可将它们去除。去除采样器和数据保持器的系统变成了连续时间系统。对于稳定的数据采样系统来说，除去采样器和数据保持器，然后用系统传递函数在 $s=0$ 时的取值，可求得系统的直流增益。本例中，开环系统的直流增益为：

$$G_{\mathrm{p}}(s)\big|_{s=0}=\frac{4}{s+2}\bigg|_{s=0}=2$$

于是得闭环系统直流增益 $2/(1+2)=0.667$，这个结果与 z 变换方法所得结果一致。◀

就常数输入下数据采样系统稳态增益的计算问题(如直流增益的计算)，例 6.3 给出了两个重要方法。第一，对于常数输入下的稳定系统，随着时间的推移，系统输出将逼近一个常数。传递函数在 $z=1$ 时的取值就是直流增益。第二，去除了采样器和零阶保持器的模拟系统，其传递函数在 $s=0$ 时的取值也是直流增益。两种方法下的计算结果相同，第两种方法在采样器的输入为常数的情况下有效。

例 6.4 本例系统如图 6-2 所示，该系统也会出现在接下来的例子中。如同例 6.1 那样，我们来求该系统的单位阶跃响应。由第 5 章可知，系统输出为：

$$C(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}R(z)$$

图 6-2　例 6.4 系统

根据附录Ⅵ给出的变换表，有：

$$G(z)=\left(\frac{z-1}{z}\right)\mathscr{z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]_{T=1}=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z[(1-1+\mathrm{e}^{-1})z+(1-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1})]}{(z-1)^2(z-\mathrm{e}^{-1})}\right]$$

$$=\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}$$

于是

$$\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

由于

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

则

$$\begin{aligned}C(z)=&\frac{z(0.368z+0.264)}{(z-1)(z^2-z+0.632)}=0.368z^{-1}+1.00z^{-2}+1.40z^{-3}\\&+1.40z^{-4}+1.15z^{-5}+0.90z^{-6}+0.80z^{-7}+0.87z^{-8}\\&+0.99z^{-9}+1.08z^{-10}+1.08z^{-11}+1.03z^{-12}+0.98z^{-13}\\&+\cdots\end{aligned}\tag{6-1}$$

由终值定理得 $c(nT)$ 的终值：

$$\lim_{n\to+\infty} c(nT) = \lim_{z\to 1}((z-1)c(z)) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z(0.368z+0.264)}{(z-1)(z^2-z+0.632)}\right] = \frac{0.632}{0.632} = 1$$

该系统的阶跃响应绘于图 6-3 中。图中，采样点之间的响应通过对系统的仿真获得，采样点上的响应源自式(6-1)。图 6-3 给出的另一条曲线是去除采样器和数据保持器之后的系统响应，这个连续时间系统传递函数的标准形式为[1]：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

可以看出，$\omega_n=1$，阻尼系数 $\zeta=0.5$，因此获得接近 18%的系统超调(见图 6-4)。由图 6-3 可见，采样会对系统的稳定性造成影响。一般地，我们总是期望采样所造成的影响微不足道，即连续系统的响应与离散系统的响应近乎相等。对本例系统来说，采样周期等于控制对象的时间常数，这样的采样频率过低，应该在硬件的允许范围内提高采样频率。这些将在稍后详细讨论。

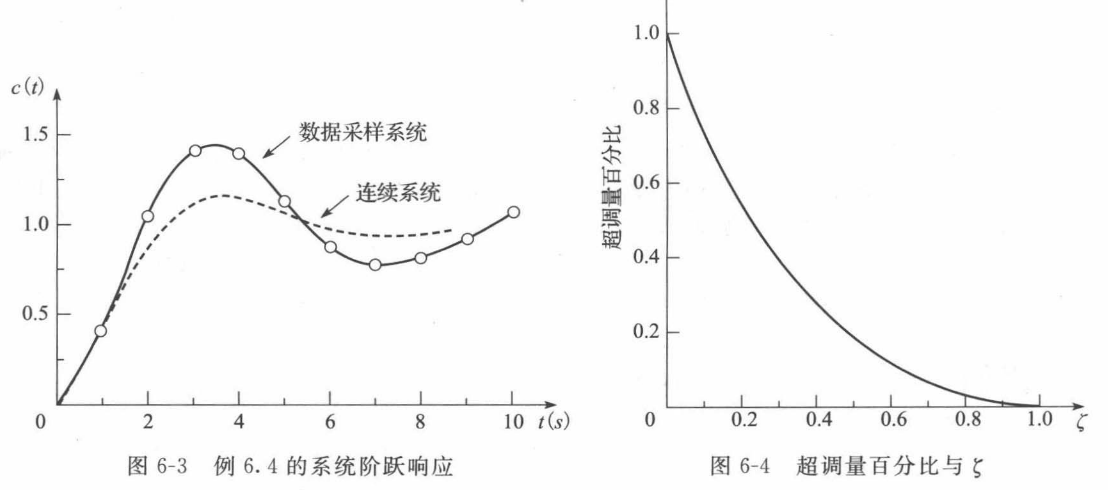


图 6-3　例 6.4 的系统阶跃响应　　　图 6-4　超调量百分比与 ζ

系统的时间响应还可以用差分方程的方法计算出来。本例闭环系统传递函数的表达式为：

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.368z^{-1}+0.264z^{-2}}{1-z^{-1}+0.632z^{-2}} \tag{6-2}$$

或

$$C(z)[1-z^{-1}+0.632z^{-2}] = R(z)[0.368z^{-1}+0.264z^{-2}] \tag{6-3}$$

对式(6-3)进行 z 反变换，得到微分方程为：

$$\begin{aligned} c(kT) = &0.368r(kT-T)+0.264r(kT-2T) \\ &+c(kT-T)-0.632c(kT-2T) \end{aligned} \tag{6-4}$$

$k<0$ 时，$c(kT)$ 和 $r(kT)$ 均等于 0，根据式(6-4)，$c(0)=0$，且 $c(1)=0.368$；$k\geqslant 2$ 时，式(6-4)变成：

$$c(kT) = 0.632+c(kT-T)-0.632c(kT-2T)$$

由式(6-4)解出的 $c(kT)$ 与由式(6-1)求得的结果相同。下面是用式(6-4)算出 $c(kT)$ 前 14 个值的 MATLAB 程序，请留意将其与式(6-1)的结果进行对比：

```
>> % Note that r=r(kT), rm1=r(kT-T), rm2=r(kT-2T), etc.
rm1=0; rm2=0; cm1=0; cm2=0;
for kk=1:14
  k=kk-1;
  r=1;
  c=0.368*rm1+0.264*rm2+cm1-0.632*cm2;
```

```
  [k,c]
  cm2=cm1; cm1=c; rm2=rm1; rm1=r; %Time delay
end

ans =
0 0
1.0000 0.3680
2 1
.
.
.
11.0000 1.0809
12.0000 1.0323
13.0000 0.9812
```

由例 6.4 还可看出一点，就是传递函数中的阻尼系数 ζ 是复数极点的重要指标。对于二阶系统来讲，其传递函数的标准形式为：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

式中：ω_n 是系统的固有频率。

阶跃响应的超调量百分比为：

$$\text{超调量百分比}=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\times 100$$

图 6-4 绘出了上式的关系曲线。该曲线图可以为具有复数极点，但又没有采用标准形式的传递函数的系统提供一个信息，就是该系统的响应会出现过冲现象。

在这一节，我们用 z 变换方法分别求出了两种数据采样系统的时间响应。还用拉普拉斯变换方法给出了例 6.1 的连续输出，考虑到计算复杂度问题，人们一般不去计算连续的输出。实际上，人们通常通过数字仿真或混合仿真来确定系统的响应，而不是用传递函数算出系统的响应。对于高阶系统，仿真则是计算时间响应的唯一的实际技术手段。

以上列举的许多例子中，刻意选用了较低的采样频率。原因有二，其一，通常选用的 1 秒的采样周期会使数值计算简单些；其二，如果采样周期长，则仅需用 $C(z)$的展开式的前几项便可获得良好的响应特性指标。在例 6.4 中，如果 $T=0.1\text{s}$，数据采样系统的响应会与连续时间系统的响应十分接近，但是，需要用到 $C(z)$序列的 21 项方能获得 0～2s 的系统响应。因此，计算这个系统的系统响应的唯一可行的方法是仿真(这是通常的做法)。

6.3　系统特征方程

我们来讨论图 6-5 所示的单环数据采样系统。该系统的传递函数为：

$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+\overline{GH}(z)}=\frac{K\prod^{m}(z-z_i)}{\prod^{m}(z-p_i)}R(z)$$

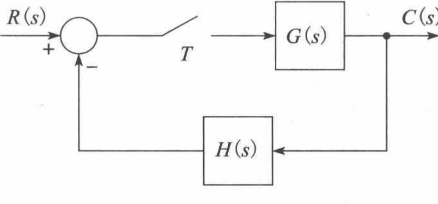


图 6-5　单环数据采样系统

将上式用部分分式展开，得

$$C(z)=\frac{k_1 z}{z-p_1}+\cdots+\frac{k_n z}{z-p_n}+C_R(z)\quad(6\text{-}5)$$

式中：$C_R(z)$包含源于 $R(z)$极点的那些项。

式(6-5)的前 n 项是 $C(z)$的自然响应项[即总是存在于 $C(z)$中的那些项]，这些项将构成稳定系统的瞬时响应。其中第 i 项的 z 反变换为：

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{k_i z}{z-p_i}\right]=k_i\,(p_i)^k$$

由此可见，这些项决定了系统自然响应的特性或自然属性。鉴于 p_i 是如下方程的根：

$$1+\overline{GH}(z)=0$$

故称此方程为系统特征方程。特征方程的根即为闭环传递函数的极点。如果无法写出传递函数，则特征方程的根是 $C(z)$ 中与输入函数无关的那些极点。

6.4 s 域到 z 域的映射

在研究模拟系统的特性时，可以将时间响应特性归因于闭环系统的极点位置(特征方程零点的位置)[1]。此方法同样适用于数据采样系统，本节就讨论这个问题。

我们用函数 $e(t)$ 引出这个话题。此函数 $e(t)$ 因被采样从而引发星形变换 $E^*(s)$。在采样瞬间，采样信号与连续信号取值相同。例如，如果 $e(t)$ 是指数函数，则其采样信号在采样瞬间也是指数的，幅度和时间常数与连续函数的相同。设 $e(t)=\mathrm{e}^{-at}$，则有：

$$E(s)=\frac{1}{s+a}, E^*(s)=\frac{\mathrm{e}^{Ts}}{\mathrm{e}^{Ts}-\mathrm{e}^{aT}}, E(z)=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$$

可见，s 平面上的极点 $s=-a$ 映射到 z 平面后成为 $z=\mathrm{e}^{-aT}$。一般地，从附录Ⅵ的 Z 变换表可知，$E(s)$ 在 $s=s_1$ 的极点可映射为 $E(z)$ 在 z 平面 $z_1=\mathrm{e}^{s_1T}$ 的极点。该性质已在 3.6 节和式(4-4)星形变换的性质 2 中给出证明。下面我们反过来使用这个性质，即 z 平面上的极点 $z=z_1$ 在采样瞬间导致的瞬间响应与 s 平面极点 s_1 产生的响应等效，s_1 和 z_1 具有关系 $z_1=\mathrm{e}^{s_1T}$。

首先来看看图 6-6 所示的左半平面主带区域到 z 平面的映射。沿 jω 轴，有：

$$z=\mathrm{e}^{sT}=\mathrm{e}^{\sigma T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}=\cos(\omega T)+\mathrm{j}\sin(\omega T)=1\angle\omega T$$

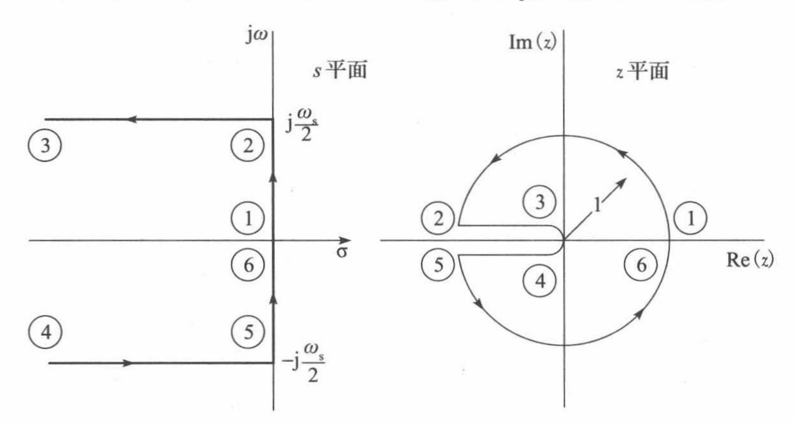


图 6-6 主带区域到 z 平面的映射

因此位于 z 平面单位圆上的极点与位于 s 平面虚轴上的极点等效，因此，z 平面单位圆上的极点预示着系统在其自然响应中存在稳态振荡。从上述方程可知，这个振荡频率等于极角除以 T。

对于 $\omega=\omega_s/2$，ωT 等于 π，因此 jω 轴上 $-\mathrm{j}\omega_s/2$ 和 $+\mathrm{j}\omega_s/2$ 之间的一段区间可映射为 z 平面的单位圆。实际上，jω 轴上长度为 ω_s 的任意区间段均可映射为 z 平面的单位圆，那个主带的右半平面部分映射到 z 平面单位圆的外部，左半平面部分则映射到 z 平面单位圆的内部。由于稳态区域位于 s 平面的左半平面，因此 z 平面的稳态区域便在单位圆的内部。稳态信息的细节将安排在第 7 章讨论。

如图 6-7，s 平面的常数阻尼轨迹(即 σ 为常数的直线)映射为 z 平面上的圆，映射关系如下：

$$z=\mathrm{e}^{\sigma_1T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}=\mathrm{e}^{\sigma_1T}\angle\omega T$$

如图 6-8 所示，s 平面恒定频率的轨迹线映射为 z 平面上的射线。

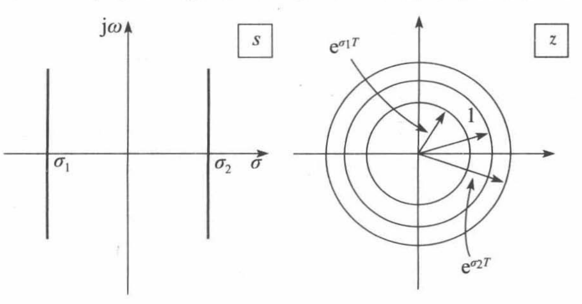


图 6-7 阻尼 σ 为常数的直线到 z 平面的映射

对于恒定的阻尼比率轨迹，给出 σ 和 ω 的如下关系：

$$\frac{\omega}{\sigma} = \tan\beta$$

式中：β 为常数。

则有：

$$z = \mathrm{e}^{sT} = \mathrm{e}^{\sigma T} \angle(\sigma T \tan\beta) \quad (6\text{-}6)$$

在 s 平面上的第 2 象限和第 3 象限，σ 是负数，因此式(6-6)描述的是一对数螺旋，其幅值会随 σ 的绝对值的增加而减少，如图 6-9 所示。

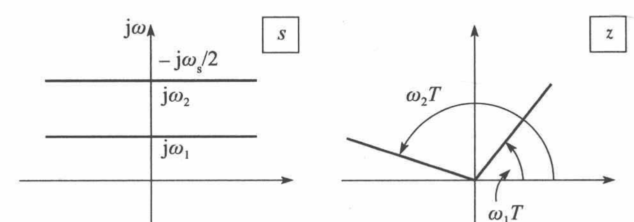


图 6-8　频率 ω 为常数的直线到 z 平面的映射

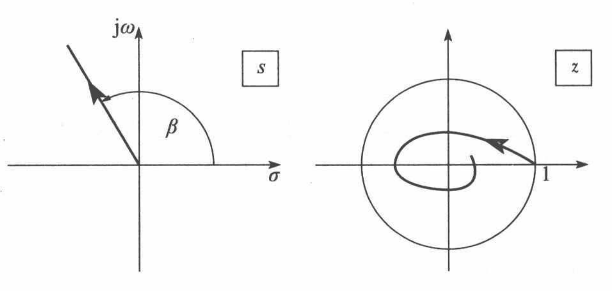


图 6-9　恒定的阻尼比轨迹到 z 平面的映射

如上所述，在采样瞬间，采样时间函数的特性与采样前时间函数的特性无异。于是，可借助图 6-6～图 6-9 给出的映射说明，将时间响应特性与特征方程于 z 平面上零点的位置对应起来。图 6-10列举了一些 s 平面极点和 z 平面极点对应关系的例子，图 6-11 给出了 z 平面那些位置上的极点对应的时间响应特性。因为

$$z = \mathrm{e}^{sT} = \mathrm{e}^{\sigma T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}$$

所以，其时间响应特性不仅是 s 的函数，也是 T 的函数。

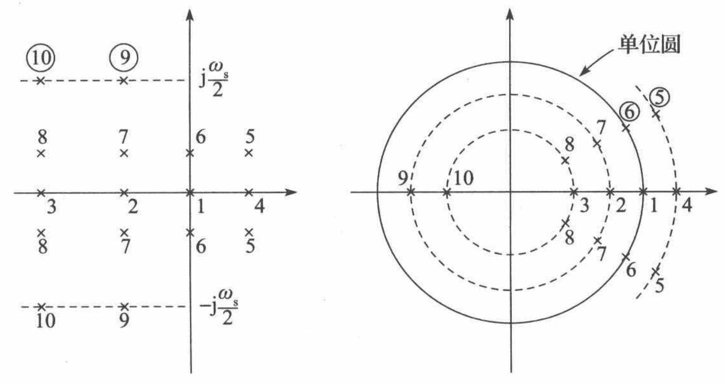


图 6-10　s 平面极点和 z 平面极点的位置关系

先来看看图 6-10 所示关系中 s 平面上 $s=\sigma\pm\mathrm{j}\omega$ 处的极点。这两个极点导致 $A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$形式的系统瞬态响应分量。一旦实施采样，$s$ 平面的这两个极点就映射为 z 平面的如下极点：

$$z = \mathrm{e}^{sT}\big|_{s=\sigma\pm\mathrm{j}\omega} = \mathrm{e}^{\sigma T}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega T} = \mathrm{e}^{\sigma T}\angle(\pm\omega T)$$
$$= r\angle(\pm\theta) \quad (6\text{-}7)$$

这一对出现在 $z=r\angle(\pm\theta)$的特性方程的根将导致如下形式的瞬态响应分量：

$$A\mathrm{e}^{\sigma kT}\cos(\omega kT+\phi) = A(r)^k\cos(\theta k+\phi)$$

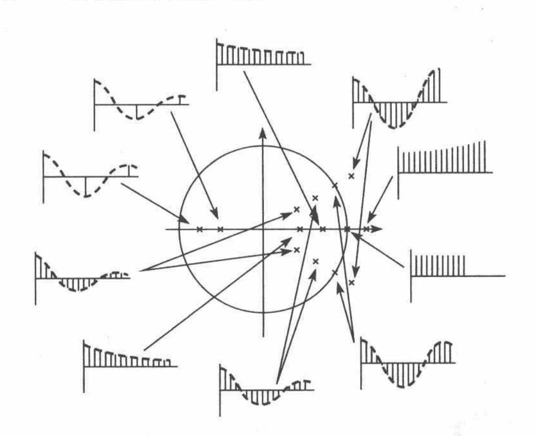


图 6-11　z 平面极点位置与瞬态响应特性

例 6.5　本例将对示例 6.1 的一阶采样系统瞬态响应中的时间常数进行计算。该系统的闭环传递函数为：

$$\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.3625}{z-0.4562}$$

因此其闭环特性方程为：

$$z-0.4562=0$$

由图 6-10 可知，极点 $z=0.4562$ 与 s 平面负实轴上的极点 s_1 相对应，两者满足如下关系：

$$z_1=0.4562=e^{s_1 T}=e^{0.1 s_1}$$

于是，$s_1=\ln(0.4562)/0.1$，即 $s_1=-7.848$。根据时间常数是 s 平面实数极点绝对坐标值的倒数，得该闭环系统的时间常数 $\tau=0.127\text{s}$(由例 6.3 可知，该系统移除采样后的时间常数为 0.167s)。鉴于瞬态响应在历经差不多 4 个时间常数的时间后会稳定下来，可知该系统的瞬态响应时间约为 0.5s。这个性质可参见图 6-1b 给出的阶跃响应。◀

在上述的讨论中，我们采用了一般性的方法得到 s 平面极点位置和 z 平面极点位置的对应关系。下面，我们再用数学的方法来讨论这两者的关系。首先，我们将二阶系统 s 域传递函数的表示为如下标准形式：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

则其极点为：

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

式中：ζ 是阻尼系数；ω_n 是固有频率。

在 z 平面，与这两个极点等价的极点出现在

$$z=e^{sT}\big|_{s=s_{1,2}}=e^{-\zeta\omega_n T}\angle(\pm\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2})=\angle r(\pm\theta)$$

处，因此

$$e^{-\zeta\omega_n T}=r$$

即

$$\zeta\omega_n T=-\ln r$$

同样

$$\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}=\theta$$

上面两个式子相除可得：

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{-\ln r}{\theta}$$

求解方程，针对 ζ，得：

$$\zeta=\frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2+\theta^2}} \tag{6-8}$$

然后解得 ω_n 为：

$$\omega_n=\frac{1}{T}\sqrt{(\ln r)^2+\theta^2} \tag{6-9}$$

因而得到该极点的时间常数为：

$$\tau=\frac{1}{\zeta\omega_n}=\frac{-T}{\ln r} \tag{6-10}$$

也可将上式表示为：

$$r=e^{-T/\tau}$$

因此可以说，我们一旦获知了 z 平面复数极点的位置，便可直接根据式(6-8)、式(6-9)、式(6-10)分别算出 s 平面极点的阻尼系数、固有频率和时间常数。

例 6.6 本例沿用例 6.4 的系统。该系统的闭环传递函数为：

$$\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632},\quad T=1\text{s}$$

由此得到特征方程

$$z^2 - z + 0.632 = (z - 0.5 - \mathrm{j}0.618)(z - 0.5 + \mathrm{j}0.618) = 0$$

可见有一对复数极点出现在 z 平面的如下位置：

$$z = 0.5 \pm \mathrm{j}0.618 = 0.795\angle(\pm 51.0^\circ) = 0.795\angle(\pm 0.890\mathrm{rad})$$

在式(6-8)，式(6-9)，式(6-10)中，有：

$$z = \mathrm{e}^{\sigma T}\angle(\pm \omega T) = r\angle(\pm \omega T) = 0.795\angle(\pm 0.890\mathrm{rad})$$

于是得：

$$\zeta = \frac{-\ln 0.795}{[(\ln 0.795)^2 + (0.890)^2]^{1/2}} = 0.250$$

$$\omega_{\mathrm{n}} = \frac{1}{1}[(\ln 0.795)^2 + (0.890)^2]^{1/2} = 0.9191\mathrm{rad/s}$$

$$\tau = \frac{-1}{\ln 0.795} = 4.36\mathrm{s}$$

对照上述求解的结果，例 6.4 中，移除采样器和数据保持器的闭环模拟系统的 $\zeta=0.50$、$\omega_{\mathrm{n}}=1\mathrm{rad/s}$、$\tau=1/(\zeta\omega_{\mathrm{n}})=2\mathrm{s}$。可见采样会造成使该系统的稳定性变差的影响。我们再令 $T=0.1\mathrm{s}$，通过习题 6-4.3 可求得此时的参数分别为 $\zeta=0.475$、$\omega_{\mathrm{n}}=0.998\mathrm{rad/s}$ 和 $\tau=2.11\mathrm{s}$，可见，此时因采样造成的影响又微乎其微。◀

关注特性方程零点的可能分布是重要的。请见如下 s 平面传递函数的极点到 z 平面极点的变换：

$$s + 1/\tau \to z - \mathrm{e}^{-T/\tau}$$

$$(s + 1/\tau)^2 + \omega^2 \to z^2 - 2z\mathrm{e}^{-T/t}\cos(\omega T) + \mathrm{e}^{-2T/\tau} = (z - z_1)(z - \overline{z}_1)$$

式中：

$$z_1 = \mathrm{e}^{-T/\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} = \mathrm{e}^{-T/\tau}\angle\omega T = r\angle\theta$$

在 s 平面，实数极点的时间常数为 τ。为使采样所造成的影响小到可忽略不计，T 必须小于 τ。对于实数极点，因为 T/τ 必须远小于 1，所以 z 平面极点应位于 $z=1$ 的附近。对于复数极点，应增加一个要求，即是在正弦波的一个周期内应获得多个采样样本，即 $\omega T<1$。于是再次强调应使 $T\ll\tau$，以及因 $z\overline{z}_1=\mathrm{e}^{-2T/\tau}$ 使 $|z_1|=\mathrm{e}^{-T/\tau}$，再次说明，$z$ 平面极点应位于在 $z=1$ 的附近。一般情况下，如果强制要求系统选用足够高的采样率，则离散时间控制系统传递函数的极点(特征方程零点)就位于 $z=1$ 的附近。

前文所述思想可用数学方法进行表述。据式(6-10)可知，

$$\frac{\tau}{T} = -\frac{1}{\ln r} \tag{6-11}$$

可见，比值 τ/T 不过是一个时间常数的时间内采样样本的数量。例如，设 $\tau=1$、$T=0.25\mathrm{s}$，则在一个时间常数的时间内得到 4 个采样样本。给定 r 值，再通过式(6-11)算出左侧比例值，用所得数据形成表 6-2。

表 6-2　式(6-11)和式(6-12)数值对照表

每时间常数的时间内所得样本数		每周期的样本数	
r	τ/T	θ°	T_{d}/T
0.999	999.5	10°	36
0.99	99.5	20°	18
0.95	19.5	30°	12
0.9	9.5	45°	8
0.8	4.48	60°	6
0.7	2.80	90°	4
0.6	1.96	120°	3
0.4	1.09	180°	2
0.2	0.62		

用类似的方法，通过 $\omega T=\theta$ 获得正弦波一个信号周期的样本数，即

$$\omega T = \frac{2\pi}{T_d}T = \theta$$

式中：T_d 是正弦函数周期；θ 以 rad 度量。

因此

$$\frac{T_d}{T} = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \tag{6-12}$$

式中：用 θ°以(°)为单位表示 θ。

给定 θ 值，再通过式(6-12)算出左侧比例值，将所得数据填入表 6-2 中。

6.5 稳态精度

能够以最小误差实现对给定输入的追踪是控制系统的一种重要性质。设计者总是力图使控制系统在一定的预期输入下误差最小。本节中将组织讨论系统传递特性对系统稳态误差的影响。

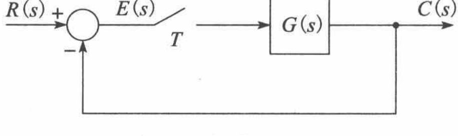


图 6-12 离散时间系统

我们来看图 6-12 所示系统，令 $G(z)=\mathscr{Z}[G(s)]$，得其传递函数为：

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} \tag{6-13}$$

将控制对象的传递函数表示为：

$$G(z) = \frac{K\prod^{m}(z-z_i)}{(z-1)^N\prod^{p}(z-z_j)}, z_i \neq 1, z_j \neq 1 \tag{6-14}$$

称式中的 N 值为系统类型，在后续的讨论中会发现 N 值意义重大。为方便起见，定义

$$K_{dc} = \left.\frac{K\prod^{m}(z-z_i)}{\prod^{p}(z-z_j)}\right|_{z=1} \tag{6-15}$$

K_{dc}表示开环控制对象所有 $z=1$ 极点以外的直流增益。

对于图 6-12 所示系统，定义输入与输出之间的差为系统误差 $e(t)$，即

$$E(z) = \mathscr{Z}[e(t)] = R(z) - C(z) \tag{6-16}$$

根据式(6-13)和式(6-16)，有：

$$E(z) = R(z) - \frac{G(z)}{1+G(z)}R(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)}$$

下面推导位置(阶跃)和速度(斜率)两种常规输入下的稳态误差。首先，对于单位阶跃输入

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

设 $e_{ss}(kT)$存在终值，则根据终值定理，得稳态误差为：

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{1+G(z)} \tag{6-17}$$

于是

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}\frac{z}{1+G(z)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{z\to 1}G(z)}$$

定义位置误差常数为：

$$K_p = \lim_{z\to 1}G(z) \tag{6-18}$$

那么，如果式(6-14)的 $N=0$[即 $G(z)$在 $z=1$ 处没有极点]，则 $K_p=K_{dc}$，以及

$$e_{ss}(kT)=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+K_{dc}} \tag{6-19}$$

当 $N\geqslant 1$(1 型及以上系统)时，$K_p=+\infty$ 且稳态误差为 0。

接下来讨论单位速率输入的情况。这时，$r(t)=t$，据附录Ⅵ可知，

$$R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

再据式(6-17)，有

$$e_{ss}(kT)=\lim_{z\to 1}\frac{Tz}{(z-1)+(z-1)G(z)}=\frac{T}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)}$$

定义速率误差常数为：

$$K_v=\lim_{z\to 1}\frac{1}{T}(z-1)G(z) \tag{6-20}$$

那么，如果 $N=0$，则 $K_v=0$ 及 $e_{ss}(kT)=+\infty$。$N=1$ 时，$K_v=K_{dc}/T$ 及

$$e_{ss}(kT)=\frac{1}{K_v}=\frac{T}{K_{dc}} \tag{6-21}$$

当 $N\geqslant 2$(2 型及以上系统)时，$K_v=+\infty$、$e_{ss}(kT)$ 为 0。

上述推导说明，一般情况下，增加系统增益和(或)在开环前向传递函数中增加 $z=1$ 的极点可减小系统的稳态误差。不过另一方面，大的增益和 $G(z)$ 在 $z=1$ 处的极点，两者也会对系统的稳定性形成影响，这一点将在第 7 章谈及。一般而言，在小的稳态误差和系统足够的稳定性(或可接受的系统瞬态响应)之间存在着平衡问题。

例 6.7 计算图 6-12 所示系统的稳态误差。

图 6-12 所示系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]$$

则

$$\begin{aligned}G(z)&=K\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s^2(s+1)}\right]=\frac{K(z-1)}{z}\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]\\&=\frac{K(z-1)}{z}\frac{z[(e^{-T}+T-1)z+(1-e^{-T}-Te^{-T})]}{(z-1)^2(z-e^{-T})}\\&=\frac{K[(e^{-T}+T-1)z+(1-e^{-T}-Te^{-T})]}{(z-1)(z-e^{-T})}\end{aligned}$$

根据式(6-14)和式(6-20)，这是一个 1 型系统，且

$$K_v=\frac{K_{dc}}{T}=\frac{K[(e^{-T}+T-1)+(1-e^{-T}-Te^{-T})]}{T(1-e^{-T})}=K$$

设该系统是稳定的，由于 $G(z)$ 在 $z=1$ 处有一个极点，则其阶跃输入下的稳态误差为 0，而据式(6-21)，其速率输入下的稳态误差为：

$$e_{ss}(kT)=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{K}$$

稳定性的问题安排在第 7 章讨论。◀

例 6.8 本例同样使用图 6-12 所示的系统，其前向通路传递函数为：

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\right]=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

设本系统设计要求为：单位速率输入下的稳态误差小于 0.01。据式(6-20)可推知，开环系统必须是 1 型或 1 型以上的，其开环传递函数在 $z=1$ 处至少有一个极点。由于控制对象并不具备 $z=1$ 这个极

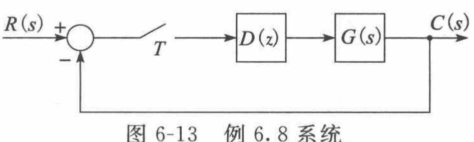


图 6-13　例 6.8 系统

点，因此应该增加一个数字补偿器如图 6-13 所示，该数字补偿器传递函数应为如下形式：

$$D(z) = \frac{K_I z}{z-1} + K_P$$

上述补偿器称为 PI 即比例-积分补偿器（将在第 8 章讨论），常用于降低稳态误差。加入 PI 补偿器之后，式(6-20)变为：

$$K_v = \lim_{z \to 1} \frac{1}{T}(z-1)D(z)G(z)$$

将 $D(z)$ 和 $G(z)$ 代入上式，得：

$$K_v = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{(K_I + K_P)z - K_P}{T(z-1)}\left[\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right] = \frac{K_I}{T}$$

设系统是稳定的，则对所需稳态误差，K_I 等于 $100T$。系统是稳定的这一点尤为重要，因为只有担保系统是稳定的，这个误差分析方有意义。第 7 章将介绍系统稳定性的若干种分析方法。例 7.6 也将延续本例系统的讨论。◀

6.6 仿真

至此，我们讨论的求解系统时间响应的方法借助的是系统的传递函数。在例 6.1 中，我们用 z 域传递函数得到采样瞬间的系统响应，用 s 域传递函数得到系统全时间域的响应。

计算系统响应的另一种方法是仿真方法。连续时间(模拟)系统的仿真可通过电子电路对系统微分方程的积分来实现，我们可以设计一台模拟计算机实现此功能。将数字计算机与模拟计算机互连的系统称为混合系统。混合系统中，控制系统的模拟部分在模拟计算机上实现仿真，数字控制器在数字计算机上实现仿真。如果用数值算法在数字计算机上实现对模拟系统微分方程的积分，便可以将模拟计算机移除进而完成对整个系统的数字仿真，这种仿真类型是我们要在这里讨论的。

首先，我们借助图 6.14 所示的矩形规则来说明对时间函数的数值积分问题。设下式的 $x(t)$ 是我们期待求解的，即我们期望对 $y(t)$ 进行数值积分：

$$x(t) = \int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau + x(0) \tag{6-22}$$

设已知 $x[(k-1)H]$，并希望算出 $x(kH)$，其中，H 为数值积分增量和算法步长。这种要求下的或许最简单的数值积分算法是这样做的：设 $y(t)$ 在 $(k-1)H \leqslant t < kH$ 时间段上不变且等于 $y[(k-1)H]$，则

$$x(kH) = x[(k-1)H] + Hy[(k-1)H] \tag{6-23}$$

当然，式(6-23)中 $x(kH)$ 仅是式(6-22)中 $x(t)$ 在 $t=kH$ 处的近似。来看图 6.14 所示曲线，上述这个计算实际上是用图中的那个矩形面积近似 $(k-1)H \leqslant t < kH$ 区间上曲线 $y(t)$ 下侧的面积。基于此，称这种数值积分算法为矩形规则，也称欧拉法。

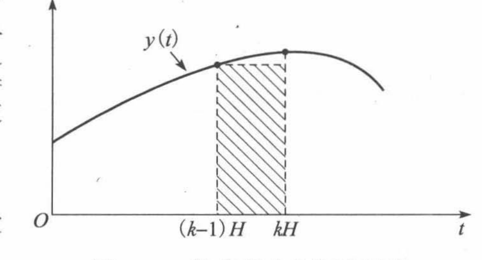


图 6-14　数值积分的矩形规则

我们更感兴趣的是对微分方程的积分（即式(6-22)中的 $y(t)=\dot{x}(t)$）。举一个简单的例子，设待解微分方程如下：

$$\dot{x}(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 1 \tag{6-24}$$

其解显然是：

$$x(t) = e^{-t}$$

如果采用数值积分的方法，据式(6-24)，有如下微分方程：

$$y(t) = \dot{x}(t) = -x(t)$$

所以式(6-23)变为：

$$x(kH) = x[(k-1)H] + H[-x[(k-1)H]] \tag{6-25}$$

设 $H=0.1\text{s}$，已知 $x(0)$，从 $k=1$ 开始迭代，以求解式(6-25)：

$$x(0.1)=x(0)-Hx(0)=1.0-(0.1\times 0.1)=0.9$$
$$x(0.2)=x(0.1)-Hx(0.1)=0.9-0.09=0.81$$
$$\vdots$$
$$x(1.0)=x(0.9)-Hx(0.9)=0.3487$$

对于本例，因为我们已知其确切解，利用这个解，可算出 $x(t)$在 $t=1.0s$ 时的值为：

$$x(1.0)=\mathrm{e}^{-1.0}=0.3678$$

于是可获知数值积分带来的误差。

上例中，如果增大 H，则误差也会增大。但数值计算的舍入误差会造成随 H 的增大而减小，误差减小至最小值后再转而上升。例如，$H=0.1\text{s}$ 时，需要 10 次迭代算出 $x(1)$，若 $H=0.001\text{s}$，则需要 1000 次迭代算出 $x(1)$，后者更多的计算步数，使计算机的舍入误差变大。如果 H 足够的小，舍入误差便将十分突出。

接下来，讨论对模拟系统的仿真。设系统的状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t) \tag{6-26}$$

于是式(6-22)变为：

$$\boldsymbol{x}(t)=\int_0^t\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{x}(0) \tag{6-27}$$

向量 $x(t)$的矩形规则为：

$$\boldsymbol{x}(kH)=\boldsymbol{x}[(k-1)H]+H\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H] \tag{6-28}$$

据式(6-26)，其中的微分部分为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H]=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}[(k-1)H]+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}[(k-1)H] \tag{6-29}$$

所需数值积分算法如下：

1) 令 $k=1$；
2) 估算式(6-29)的 $\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H]$；
3) 估算式(6-28)的 $\boldsymbol{x}(kH)$；
4) 令 $k=k+1$；
5) 返回步骤 2)。

再回到图 6-14 所示曲线，该图展示了数值积分的矩形规则，除此之外，还有与之不同的数值积分算法，其方法是基于 $\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H]$算出 $\boldsymbol{x}(kH)$。例如，图 6-15 示出的梯形规则，该规则将在$(k-1)H\leqslant t<kH$ 范围内的积分用图中的梯形区域近似，即，在 $x(t)$等于对 $y(t)$积分的同时

$$x(kH)=x[(k-1)H]+H\left[\frac{y[(k-1)H]+y(kH)}{2}\right] \tag{6-30}$$

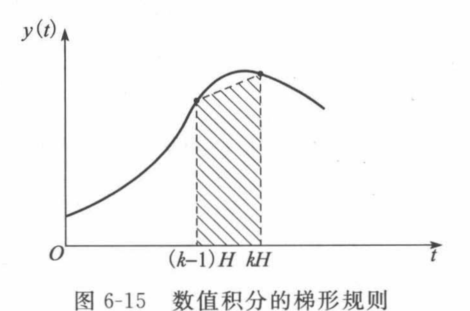


图 6-15　数值积分的梯形规则

由于 $y(t)$等于 $\dot{x}(t)$，则有：

$$x(kH)=x[(k-1)H]+\frac{H}{2}[\dot{x}[(k-1)H]+\dot{x}(kH)] \tag{6-31}$$

由于 $x[(k-1)H]$已知，$\dot{x}[(k-1)H]$可通过待解的微分方程计算出来。然而，因 $x(kH)$未知而无法算出 $\dot{x}(kH)$。下面讨论解决这一问题的方法。

首先，用某一种规则预测 $x(kH)$的值，再计算 $\dot{x}(kH)$的预测值，并将此值代入梯形规则，以使 $x(kH)$得以修正。这是一种预测-修正算法。常用的预测规则是矩形规则。

下面用式(6-26)给出的模拟系统状态模型来说明梯形规则。设已知 $x(kH)$，$k=0$，要求计算 $x(kH)$，$k=1，2，3，\cdots$。使用矩形规则的预测算法由下式给出：

$$\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H]=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}[(k-1)H]+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}[(k-1)H] \tag{6-32}$$

$$\boldsymbol{x}(kH)=\boldsymbol{x}[(k-1)H]+H\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H] \tag{6-33}$$

修正算法由下式给出：

$$\dot{\boldsymbol{x}}[kH]=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}[kH]+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}[kH] \tag{6-34}$$

$$\boldsymbol{x}(kH)=\boldsymbol{x}[(k-1)H]+\frac{H}{2}[\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H]+\dot{\boldsymbol{x}}(kH)] \tag{6-35}$$

式(6-33)给出 $\boldsymbol{x}(kH)$的预测值，然后修正，再用式(6-35)计算 $\boldsymbol{x}(kH)$。该数值积分算法归纳如下：

1）令 $k=1$；
2）用式(6-32)估算 $\dot{\boldsymbol{x}}[(k-1)H]$；
3）用式(6-33)估算 $\boldsymbol{x}(kH)$；
4）用步骤 3 的结果估算式(6-34)中的 $\dot{\boldsymbol{x}}(kH)$；
5）用式(6-35)估算终值 $\boldsymbol{x}(kH)$；
6）令 $k=k+1$；
7）返回步骤 2)。

上述算法在一次迭代循环中所需的计算步数明显多于矩形规则算法。但是，对于指定的求解精度，可以用较大的 H，致使梯形规则下总的计算机执行时间少于矩形规则所需的执行时间。下面举一个使用梯形规则的例子。

例 6.9 再次使用如下微分方程：

$$\dot{x}(t)+x(t)=0, x(0)=1$$

其解为：

$$x(t)=\mathrm{e}^{-t}$$

由于

$$\dot{x}(t)=-x(t)$$

设 $H=0.1\mathrm{s}$，执行梯形规则，得前两个迭代结果：

$K=1$：

$$\begin{aligned}
\dot{x}(0)&=-x(0)=-1\\
x(0.1)&=x(0)+H\dot{x}(0)=1+0.1\times(-1)=0.9\\
\dot{x}(0.1)&=-x(0.1)=-0.9\\
x(0.1)&=x(0)+\frac{1}{2}H[\dot{x}(0)+\dot{x}(0.1)]\\
&=1+0.05\times(-1-0.9)=0.905
\end{aligned}$$

$K=2$：

$$\begin{aligned}
\dot{x}(0.1)&=-x(0.1)=-0.905\\
x(0.2)&=x(0.1)+H\dot{x}(0.1)=0.905-0.0905=0.8145\\
\dot{x}(0.2)&=-x(0.2)=-0.8145\\
x(0.2)&=x(0.1)+\frac{1}{2}H[\dot{x}(0.1)+\dot{x}(0.2)]\\
&=0.905+0.05\times(-0.905-0.8145)=0.8190
\end{aligned}$$

继续此计算可求得 $x(1.0)$为 0.3685。注意 $x(1)$的精确值为 0.3678，而在矩形规则下值为 0.3487。虽然使用梯形规则可以获得比矩形规则更高精度的结果，但是需要更多的计算量。如果 H 增加至 0.333s，则在梯形规则下 $x(1)$为 0.3767。此时精确度仍远高于 $H=0.1\mathrm{s}$ 时的矩形规则，尽管它们的计算量趋于相同。◀

在上面的讨论中，仅涉及多个数值积分规则中的两种。四阶龙格-库塔规则是数字仿

真中使用更普遍的一种[2-4]。感兴趣的读者可以在此领域找很多的资料。

关于仿真问题，还有两点需要注意。第一，在数字仿真中，我们用差分方程近似微分方程，并求解差分方程，因此，连续时间系统被离散时间系统所替代，这个离散时间系统具有与连续系统近似相同的响应。

第二，在非线性系统的仿真中，非线性只出现在已知 $x[(k-1)H]$求解 $\dot{x}[(k-1)H]$ 的过程中。如果这个非线性容易用数学的方法表示出来，则写出仿真程序并不困难。

如前所述，我们讨论的仅仅是对模拟系统的仿真。如果在模拟系统中添加了采样器和零阶保持器，则需要将推理方法加到系统仿真中。逻辑推理在任何采样周期期间都将零阶保持器的输出维持在常数状态，这个常数就是采样器在采样周期开始时刻的输入值。另外，需要加入一个数字控制器，该控制器仅在采样周期的开始时刻求解差分方程，且在整个采样周期期间保持输出那个求解结果。

6.7　控制软件

对于控制系统，有许多商用的分析和设计控制软件包可用，这些软件包具有不同层次的仿真能力。在此介绍 MATLAB 软件。一般而言，通过传递函数或状态方程，将数字控制系统中模拟部分送入控制软件程序。大多数软件包将接受传递函数或状态方程中的任何一者，然后，根据给定，算出另外一者。对于已知的数字控制器，便可以以传递函数的形式送入，或在某些情况下，也可以送入其状态方程。然后，用软件包进行系统仿真。一般地，软件包有若干种可用的数值积分算法，用户必须选择其中的一种算法或接受程序默认的选择。

6.8　小结

本章讨论了离散时间闭环系统的时间响应，包括稳态响应和瞬态响应。为展开闭环离散时间系统的分析和设计，讨论了 s 平面和 z 平面之间的关联性，并以此提供了将连续系统的做法转移到数字系统中去的机制。最后简要介绍了系统的数字仿真。

参考文献

[1] C. L. Phillips and J. Parr, *Feedback Control Systems,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[2] M. L. Dertouzos, M. Athans, R. N. Spann, and S. J. Mason, *Systems, Networks, and Computation: Basic Concepts.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1979.

[3] J. L. Melsa and S. K. Jones, *Computer Programs for Computational Assistance.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

[4] C. F. Gerald, *Applied Numerical Analysis,* 7th ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2007.

[5] J. A. Cadzow and H. R. Martens, *Discrete-Time and Computer Control Systems.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1970.

[6] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems,* 3d ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

[7] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1973.

[8] B. C. Kuo, *Digital Control Systems,* 2d ed. New York: Oxford University Press, 1995.

习题

6.2-1　对于图 P6.2-1 所示闭环系统：

(1) 设 $D(z)=1$，计算并绘制系统于采样瞬间的单位阶跃响应。

(2) 将采样器、数字控制器和数据保持器从系统中去除，计算模拟系统的单位阶跃响应，并将响应曲线与(1)问的结果绘制在同一幅图中。

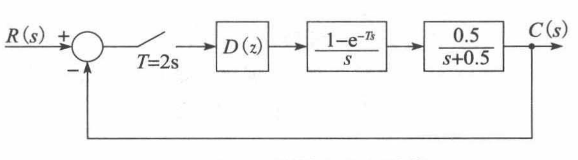


图 P6.2-1　习题 6.2-1 系统

(3) 令图示系统中的 $D(z)=1$、$T=0.4\text{s}$。计算系统的单位阶跃响应，并将响应曲线与(1)问、(2)问的结果绘制在同一幅图中。

(4) 用系统直流增益计算(1)问、(2)问和(3)问系统的稳态响应。请问：为什么求出的各直流增益相等？

6.2-2 图 P6.2-1 所示系统中，设 $D(z)=1$。若有可能，可使用习题 6.2-1 的结果解如下问题。

(1) 设 $T=0.4\text{s}$，求系统的时间常数 τ。

(2) 设 $T=2\text{s}$，求在阶跃输入下系统输出 $c(kT)$ 达到终值的 98%时所需时间，即 4 倍时间常数 (4τ)的时间。

(3) $T=0.4\text{s}$，重做(1)问和(2)问。

(4) 对去除采样器和数据保持器的模拟系统，重做(1)问和(2)问。

6.2-3 在例 6.1 中，我们将采样系统在采样瞬间之间的响应表示为一系列延迟阶跃响应的和。

(1) 用此方法求解图 P6.2-1 所示系统在 $t=1\text{s}$ 时的输出值。

(2) 设 $t=3\text{s}$，重做(1)问。

(3) 就 $c(t)$而言，(1)问的结果和(2)问的结果在 $t=2\text{s}$ 时的取值相同。为什么？提示：考虑模拟控制对象的阶跃响应。

(4) 证明(3)问的陈述是正确的。

6.2-4 某大型实验室的温度控制系统框图如图 P6.2-4 所示，该系统在习题 1.6-1 中有所陈述。忽略习题 1.6-1 中的干扰输入。

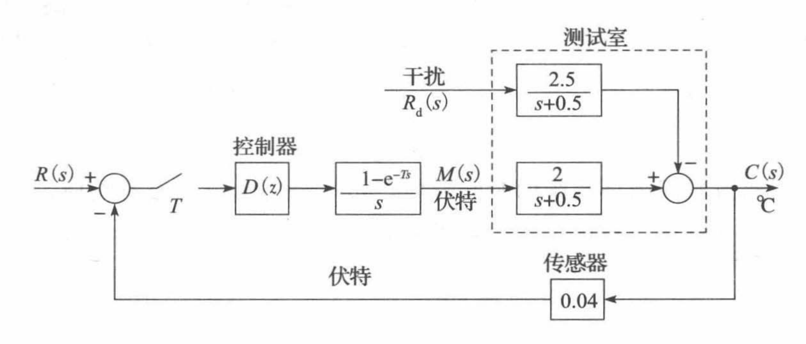


图 P6.2-4 实验室温度控制系统

(1) 若输入使输出获得 10℃的阶跃，则当 $D(z)=1$ 和 $T=0.6\text{s}$ 时，估算并绘制系统响应。需要注意的是，这时，系统的输入必须是幅度为 0.4V 的阶跃函数。为什么？

(2) 用(1)问的结果绘制零阶保持器的输出。

(3) 求(1)问的稳态输出。

(4) 将控制对象的增益 2 替代为可变增益 K。当 K 值很大时，稳态下系统输出接近何值？假定随着 K 的增加系统始终稳定(不切实际的假设)。

6.2-5 对于习题 6.2-4 和图 P6.2-4 示出的温度控制系统

(1) 令 $T=6\text{s}$，$R(s)=0.4\text{s}^{-1}$，求系统响应，并将该响应与习题 6.2-4 的响应绘制在同一幅图中。请注意，控制对象的时间常数为 2s，T 由 0.6s 增加到 6s。

(2) 求 $c(t)$，$0\leqslant t\leqslant 6\text{s}$。此响应可不用 z 变换获得。

6.2-6 图 P6.2-4 所示系统中，$D(z)=1$。若有可能，请使用习题 6.2-4 和习题 6.2-5 的结果。

(1) 设 $T=0.6\text{s}$，求系统的时间常数 τ。

(2) 求系统在阶跃输入下，输出 $c(kT)$达到终值的 98%时所需时间。注意该时间近似等于 4 倍的时间常数(4τ)。

(3) 设 $T=6\text{s}$，重做(1)问和(2)问。

(4) 针对去除采样/数据保持器后的模拟系统，重做(1)问和(2)问。

6.2-7 机器人手臂关节控制系统的框图如图 P6.2-7 所示，该系统已在 1.6 节讨论。令 $T=0.1\text{s}$、$D(z)=1$。

(1) 如果输入使输出出现 20℃的变化，且 $K=10$，估算 $C(z)$。注意，该系统输入必须是幅度为 1.4V 的阶跃函数，为什么？

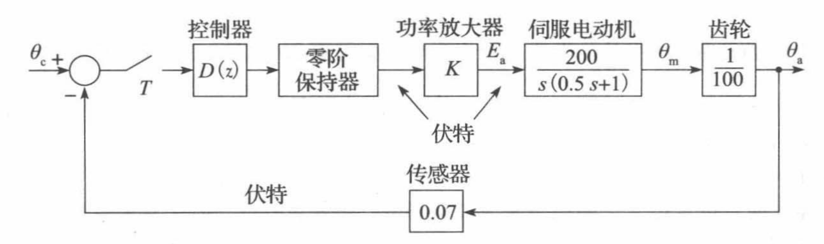


图 P6.2-7　机器人手臂关节控制系统

(2) 假设系统是稳定的，求系统的稳态输出。

(3) 求系统响应达到稳定状态时所需的(近似)时间。

(4) 进行系统仿真，以验证(2)问和(3)问的结果。

6.4-1　对图 P6.2-7 示出的机器人手臂关节控制系统框图，令 $T=0.1\text{s}$，$K=10$ 及 $D(z)=1$。若可以，请使用习题 6.2-7 的结果。

(1) 求其开环系统的阻尼系数 ζ、固有频率 ω_n 和时间常数 τ。如果该系统的特征方程有两个实数零点，求出两个时间常数。这些值通过观察特征方程即可获得。为什么？

(2) 对于闭环系统，重做(1)问。

(3) 对于去除采样器、数字控制器，以及数据保持器的模拟系统，重做(1)问和(2)问。

(4) 用(2)问和(3)问的结果分别求出阶跃响应下采样-数据闭环系统和模拟闭环系统的超调百分比。

6.4-2　卫星姿态控制系统框图如图 P6.4-2 所示，令 $T=1\text{s}$，$K=100$，$J=0.1$，$H_k=0.02$ 及 $D(z)=1$。

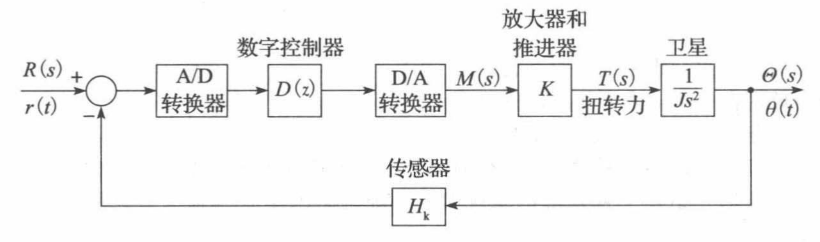


图 P6.4-2　卫星控制系统框图

(1) 求其开环系统的阻尼系数 ζ、固有频率 ω_n 和时间常数 τ。如果该系统特征方程有两个实数零点，求出两个时间常数。这些值通过观察特征方程即可获得。为什么？

(2) 对于闭环系统，重做(1)问。

(3) 对于去除采样器、数字控制器，以及数据保持器的模拟系统，重做(1)问和(2)问。

(4) 该闭环数据采样系统是不稳定的，而其闭环模拟系统临界稳定。如果卫星由这些控制系统分别操作，请描述数据采样系统和模拟系统所产生的运动。

6.4-3　例 6.6 给出图 6-2 所示的系统参数：$\zeta=0.250$，$\omega_n=0.9191$ 及 $\tau=4.36\text{s}$。

(1) 设采样周期 $T=0.5\text{s}$，求 ζ，ω_n 和 τ。

(2) 设 $T=0.1\text{s}$，重做(1)问。

(3) 对于去除采样器和数据保持器的模拟系统，重做(1)问。注意这种情况可看作是采样周期趋近于 0 的极限。

(4) 给出这 3 个参数作为采样频率 $f_s=1/T$ 的函数时的数据列表。说明频率增加时参数的变化。

6.4-4　图 P6.4-4 所示系统称为调节器控制系统，我们期望该系统在出现扰动时，输出 $c(t)$ 保持零值。设该系统的扰动为单位阶跃函数。

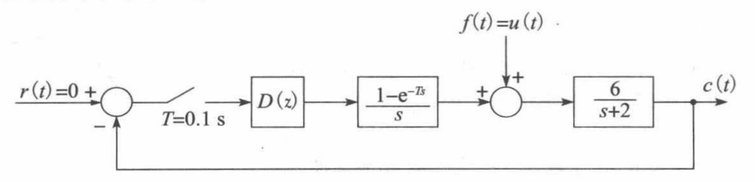


图 P6.4-4　习题 6.4-4 系统

(1) 设 $D(z)=1$(即无补偿)，求 $c(t)$的稳态值。

(2) 若希望 $f(t)$对 $c(kT)$的稳态值不产生影响，则需要 $D(z)$在 $z=1$ 处存在极点。令

$$D(z)=1+\frac{0.1z}{z-1}$$

确定 $c(kT)$的稳态值。

(3) 设 $T=1\text{s}$，重做(1)问和(2)问。

(4) 采样周期对恒定输入下的稳态响应没有影响，为什么?

6.4-5 设数据采样系统具有如下特征方程：

① $z-0.999=0$

② $z-0.99=0$

③ $z-0.9=0$

④ $z+0.9=0$

⑤ $z^2-1.85z+0.854=0$

⑥ $z^2-1=0$

⑦ $z^2-2z+0.99=0$

⑧ $z^2-1.2z+0.7=0$

(1) 设 $T=0.1\text{s}$，求上述各系统的固有响应特性。

(2) 设 $T=1\text{s}$，重做(1)问。

(3) 一个给定的特性方程是 z 的函数，其瞬态响应的哪些参数随采样周期 T 变化，哪些参数与 T 无关?

6.4-6 观察图 P6.2-1 所示系统。假定将 0.2s 的理想时间延迟添加到控制对象中，使其传递函数变为：

$$G_{\text{p}}(s)=\frac{0.5\mathrm{e}^{-0.2T}}{s+0.5}$$

(1) 忽略时间延迟，求系统的时间常数 τ。

(2) 不忽略时间延迟，求系统的时间常数 τ。

(3) 设时间延迟为 1s，重做(2)问。

(4) 将时间延迟添加到控制对象后，会对闭环系统响应的速度产生什么影响?

6.5-1 (1) $D(z)=1$ 时，给定下列系统的系统型，则确定系统型时无需求出它们的脉冲传递函数。为什么?

① 图 P6.2-1 所示系统；

② 图 P6.2-4 所示系统；

③ 图 P6.2-7 所示系统；

④ 图 P6.4-2 所示系统；

⑤ 图 P6.4-4 所示系统。

(2) 我们期望(1)问的系统在常数输入下稳态误差为零，给出各数字控制器的需求特性。

(3) 我们期望(1)问的系统在斜坡输入下稳态误差为零，给出各数字控制器的需求特性。

6.5-2 观察图 P6.5-2 所示系统，其数字滤波器的描述式如下：

$$m(kT)=e(kT)-0.9e[(k-1)T]+m[(k-1)T]$$

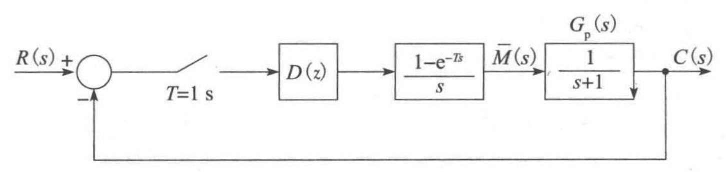


图 P6.5-2 习题 6.5-2 系统

(1) 指出系统型。

(2) 不通过求解 $C(z)$，求出单位阶跃函数输入下的稳态响应。

(3) 求系统达到稳定状态所需的近似时间。

(4) 求系统的单位阶跃响应，验证(2)问和(3)问的结果。

6.5-3 图 P6.5-2 所示系统使用习题 6.5-2 给出的数字滤波器。

(1) 指出系统型。

(2) 不通过求解 $C(z)$，求出单位斜波函数输入下的稳态响应。
(3) 求系统达到稳定状态所需的近似时间。
(4) 求系统的单位斜坡稳态响应，验证(2)问和(3)问的结果。

6.5-4 在习题 6.5-2 的系统中，控制对象的传递函数由下式给出：

$$G_p(s) = \frac{s}{s+1}$$

显然，它的直流增益为零。使用习题 6.5-2 给出的数字滤波器。
(1) 指出系统型。
(2) 不通过求解 $C(z)$，求出单位阶跃输入下的稳态响应。
(3) 求系统达到稳定状态所需的近似时间。
(4) 求 $c(kT)$，验证(2)问和(3)问的结果。

6.5-5 图 6-13 所示系统中，$G_P(s)=20(s+5)/(s(s+4)(s+6))$，$T=0.05\text{s}$，$D(z)$所实现的差分方程如下：

$$m(k) = 10e(k) - 16e(k-1) - 6.3e(k-2) + m(k-1)$$

(1) 指出系统型。
(2) 绘制单位阶跃响应。
(3) 求出上升时间、超调和稳定时间。

6.5-6 设 $T=0.02\text{s}$，重做习题 6.5-5。
(1) 指出系统型。
(2) 绘制单位阶跃响应。
(3) 求出上升时间、超调和稳定时间。
(4) 比较本题和习题 6.5-5 的结果并对它们的不同做出解释。

6.6-1 设图 P6.5-2 所示系统中，$D(z)=1$。
(1) 写出去除采样器和零阶保持器之后的系统微分方程。
(2) 设数值积分增量为 0.25s，用数值积分的矩形规则估算 $0\leqslant t\leqslant 1.5\text{s}$ 范围内的单位阶跃响应。
(3) 设系统中含有采样器和零阶保持器，采样周期 $T=0.5\text{s}$，重做(2)问。
(4) 求解(2)问和(3)问准确的单位阶跃响应，并对这些结果进行对比。

6.6-2 考虑 6.6 节中对微分方程式(6-24)的数值积分。应用矩形规则得到差分方程式(6-25)，即

$$x[(k+1)H] = x(kH) + H[-x(kH)]$$

(1) 用 z 变换求解该方程，使其解是 $x(0)$ 和 H 的函数。
(2) 当 $x(0)=1$、$H=0.1$ 时，利用(1)问的结果证明：6.6 节给出的 $x(1.0)=0.3487$。
(3) 求 $x(0)=1$、$H=0.01$ 时的 $x(1.0)$。
(4) 6.6 节给出了 $x(1.0)$的精确值，对比(2)问和(3)问结果中的误差。

6.6-3 使用矩形规则计算下列微分方程的数值积分：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t) = r(t)$$

(1) 为了对这个微分方程进行数值积分，请建立如式(6-25)的差分方程。
(2) 令 $r(t)=1$，$x(0)=0$，$H=0.1$。用 z 变换求(1)问的差分方程，以得到 $x(1.0)$。
(3) 设 $H=0.01$，重做(2)问小题。
(4) 用拉普拉斯变换求解该微分方程，以获得 $x(1.0)$的精确值。
(5) 比较(2)问和(3)问两结果的误差。

6.6-4 用 6.6 节的预测-修正算法计算下列微分方程的数值积分：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t) = 0$$

其中，预测方法用矩形规则，校正方法用梯形规则。
(1) 为了对给定微分方程进行数值积分，用式(6-32)到式(6-35)建立差分方程。计算结果应该是 $x[(k+1)H]$的一个关于 $x(kH)$的函数的差分方程。
(2) 令 $x(0)=1$、$H=0.1$，用 z 变换求(1)问的差分方程中 $x(1.0)$的值。例 6.9 中指出，该值为 0.3685。
(3) 设 $H=0.333\,33$，重做(2)问。例 6.9 指出，该值为 0.3767。
(4) 用拉氏变换求解该微分方程，以获得 $x(1.0)$的精确值。

(5) 比较(2)问和(3)问两结果的误差。

6.6-5　用6.6节的预测-校正算法计算下列微分方程的数值积分：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)=r(t)$$

其中预测方法用矩形规则，校正方法用梯形规则。

(1) 为了对给定微分方程进行数值积分，用式(6-32)到式(6-35)建立差分方程。计算结果应该是$x(kH)$的一个关于$x[(k-1)H]$和输入$r[(k-1)H]$的函数的差分方程。

(2) 令$r(t)=1$，$x(0)=0$和$H=0.1$。用z变换求(1)问的差分方程中$x(1.0)$的值。

(3) 当$H=0.333\,33$时重做(2)问。

(4) 用拉普拉斯变换解该微分方程，以获得$x(1.0)$的精确值。

(5) 给出(2)问和(3)问两结果的误差。

6.6-6　过程传递函数改为：

$$G(s)=\frac{20}{s(3s+1)}$$

重做习题6.6-1，求解$0\leqslant t\leqslant 1.0\mathrm{s}$时的单位阶跃响应。

第7章 稳定性分析

7.1 引言

本章重点介绍线性时不变离散时间系统的稳定性分析方法。一般来讲，适用于线性时不变(LTI)连续时间系统的稳定性分析方法，经一定修改，也能用于 LTI 离散时间系统的分析。这些方法包括劳斯-赫尔维茨准则、根轨迹法和频率响应法，本章将逐一介绍它们。再介绍一种用于 LTI 离散系统的朱里(Jury)稳定性测试法。

7.2 稳定性

我们用图 7-1 所示系统开始稳定性概念的介绍。图 7-1 所示系统的输出为：

$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+\overline{GH}(z)}=\frac{K\prod^{m}(z-z_i)}{\prod^{n}(z-p_i)}R(z)$$

式中：z_i和p_i分别是该系统传递函数的零点和极点。

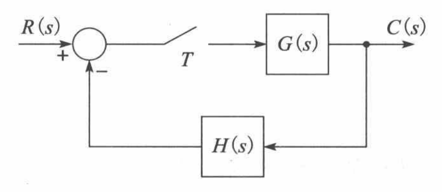


图 7-1　数据采样系统

针对式中的不同极点，经部分分式展开，可将$C(z)$表示为：

$$C(z)=\frac{k_1 z}{z-p_1}+\cdots+\frac{k_n z}{z-p_n}+C_R(z) \quad (7\text{-}1)$$

式中：$C_R(z)$包含属于$R(z)$极点的那些分量。

式(7-1)的前 n 个分量是$C(z)$的自由响应分量，如果这些分量的 z 反变换随时间的推移趋于 0，其系统就是稳定的，因此，我们称这些分量为瞬态响应。第 i 个分量的 z 反变换为：

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{k_i z}{z-p_i}\right]=k_i\,(p_i)^k \quad (7\text{-}2)$$

于是，如果p_i的取值小于 1，则 k 趋于无穷时，该分量趋于 0。请注意，因子$(z-p_i)$源于系统的特征方程：

$$1+\overline{GH}(z)=0 \quad (7\text{-}3)$$

如果式(7-3)的所有根均位于 z 平面上单位圆的内部，这个系统就是稳定的。当然，也可以将式(7-3)表示为：

$$1+\overline{GH}^*(s)=0 \quad (7\text{-}4)$$

由于 z 平面上单位圆的内部与 s 域中的左半平面相对应，因此，稳定系统式(7-4)的根必须位于 s 域的左半平面。系统特征方程既可以是式(7-3)，也可以是式(7-4)。

如果特征方程根的大小为 1(例如，$p_i=1\angle\theta$)，则式(7-2)的大小不随 k 变化而变化，由此在其自由响应分量中有这样一个分量，当 k 区域无穷时，它既不消失，也不向无界变化。如果系统的自由响应趋于一个有界的非零稳定状态，便称这个系统是临界稳定的。因此，对于临界稳定系统来说，其特征方程至少有一个零点位于 z 平面的单位圆上，同时没有位于单位圆外的零点。

上面的讨论基于一个假设，即系统传递函数的极点各不相同(没有相重的极点)。可以证明，如果系统的传递函数具有相同的极点，适用于稳定性的条件与没有重复极点时相同

(见习题 7.2-1)。

我们曾经证明，有些离散时间控制系统的传递函数无法推导出来。下面介绍求这类控制系统特征方程的方法。我们从图 7-2a 所示系统入手推导这种方法，图 7-2a 所示系统在例 5.3 中有所陈述，在那里给出了它的输出表达式为：

$$C(z) = \left[\frac{R}{2+G_2}\right](z) + \frac{\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right](z)}{1+\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right](z)}\left[\frac{(1+G_2)R}{2+G_2}\right](z)$$

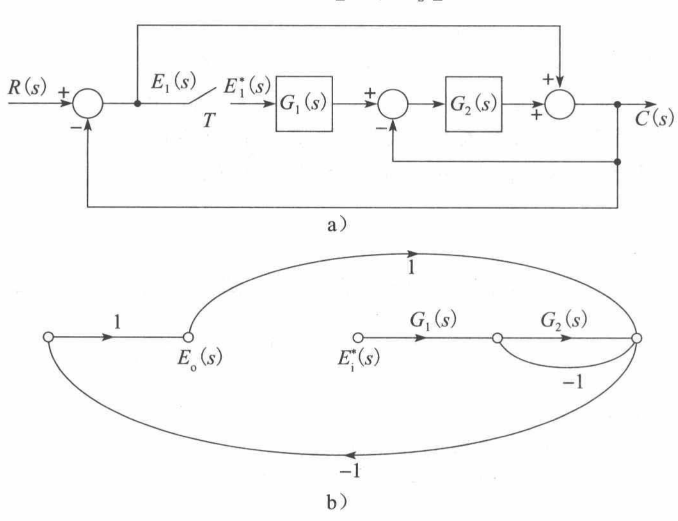


图 7-2 离散时间系统

可以获知，其独立于输入 R 的分母是：

$$1+\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right](z)$$

将这个函数置为 0，即得特征方程。

可以用与例 5.3 不同的方法获得上述特征函数。鉴于线性系统的稳定性与系统输入无关，我们将系统中的输入设为 0，即设 $R(s)=0$，再在采样器前将系统断开，推导传递函数。我们之所以在采样器前侧将系统断开，是因为如果输入信号在送往系统的连续时间单元之前经历了采样，我们总可以写出一个传递函数，而如果在其他点断开系统，我们将无法求出传递函数。将断开处的输入信号标记为$E_i(s)$，输出信号标记为$E_o(s)$。于是，对于图 7-2a 所示系统来说，无信号输入且将系统在采样器之前断开的系统信号流图如图 7-2b 所示。依据梅森增益公式(或其他可行方法)可以写出：

$$E_o(s) = \frac{-G_1G_2}{2+G_2}E_i^*(s)$$

对其进行 z 变换，得：

$$E_o(z) = -\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right](z)E_i(z)$$

于是，可将这个开环系统的传递函数表示为：

$$G_{op}(z) = \frac{E_o(z)}{E_i(z)} = -\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right](z)$$

对于相应的闭环系统，$E_i(z)=E_o(z)$，可得：

$$[1-G_{op}(z)]E_o(z) = 0$$

我们可以通过设置系统的初始条件使$E_o(z)\neq 0$，于是

$$1-G_{op}(z) = 0$$

上式自然就是系统的特征方程。由此获得图 7-2a 所示系统的特征方程如下：

$$1+\left[\frac{G_1G_2}{2+G_2}\right](z)=0$$

至此完成了对例 5.3 结果的检验。下面再举一例。

例 7.1 将例 5.2 系统重画于图 7-3a 中。在系统的第一个采样器前将系统断开，得到的信号流图如图 7-3b 所示，对于第二个采样器，我们用 $E_1(s)$ 表示其输入，用 $E_1^*(s)$ 表示其输出。

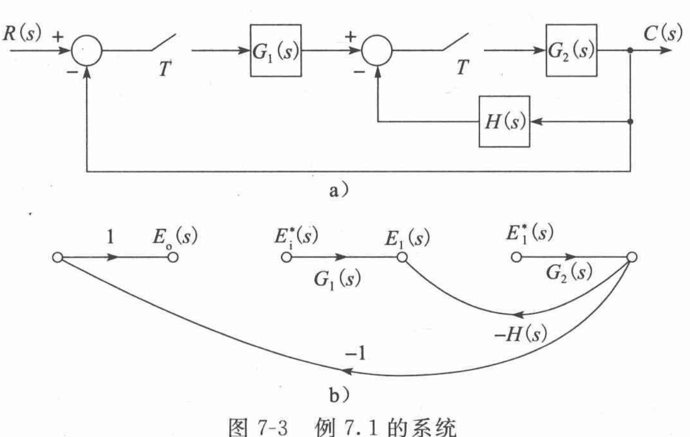


图 7-3　例 7.1 的系统

据图 7-3 所示信号流图，可以写出：

$$E_1=G_1E_i^*-G_2HE_1^*$$
$$E_o=-G_2E_1^*$$

用上述第一个式子解出 E_1^*：

$$E_1^*=\frac{G_1E_i^*}{1+\overline{G_2H}^*}$$

把上述第二个式子代入 E_1^*，得：

$$E_o^*=\frac{-G_1^*G_2^*}{1+\overline{G_2H}^*}E_i^*$$

因为在本例闭环系统中，$E_i(z)=E_o(z)$，有：

$$\left[1+\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+\overline{G_2H}(z)}\right]E_o(z)=0$$

于是得特征方程为：

$$1+G_1(z)G_2(z)+\overline{G_2H}(z)=0$$

这一结果在例 5.2 中得以验证。我们将在系统的第二个采样器前断开系统形成的开环系统上推导出特征方程的练习留给读者(见习题 7.2-2)。◀

根据上面的讨论，离散系统的特征方程一般可以表述为：

$$1+F(z)=1-G_{op}(z)=0 \tag{7-5}$$

式中：$G_{op}(z)$是开环系统的传递函数。

在系统分析和系统设计中，$F(z)$有着重要作用，我们称其为开环函数。对于图 7-1 所示系统来说，开环函数是$\overline{GH}(z)$，开环传递函数是$-\overline{GH}(z)$。

LTI 离散系统的特征方程也可以由状态变量法推导出来。设图 7-1 所示系统的状态变量模型为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}(k)$$

其中，输出采用 $y(k)$而不是 $c(k)$来表示。对上述两个状态方程进行 z 变换并消去 $x(z)$(像

第 2 章那样，见式(2-84))，得该系统的传递函数为：

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

可见，该传递函数的分母是$[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]$，因此得该系统的特征方程为：

$$|z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \tag{7-6}$$

7.3　双线性变换

对于诸如劳斯-赫尔维茨判据、伯德图等许多连续时间 LTI 系统，其分析和设计方法是基于以下性质进行的，即 s 平面的虚轴是系统稳定的界，而这些方法却不能用到 LTI 离散时间系统上，原因是在 z 平面，系统稳定的界是单位圆。然而，经如下变换：

$$z = \frac{1+(T/2)w}{1-(T/2)w} \tag{7-7}$$

解出 w

$$w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{7-8}$$

在 z 平面的单位圆上，$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}$，因此

$$w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\bigg|_{Z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}} = \frac{2}{T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+1} = \frac{2}{T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}} = \mathrm{j}\,\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \tag{7-9}$$

可见，z 平面的单位圆变换成了 w 平面的虚轴。图 7-4 对这种 s 平面上那条带状区域到 z 平面及 w 平面的映射给出了示意。请注意，w 平面的稳定域也是其左半平面。

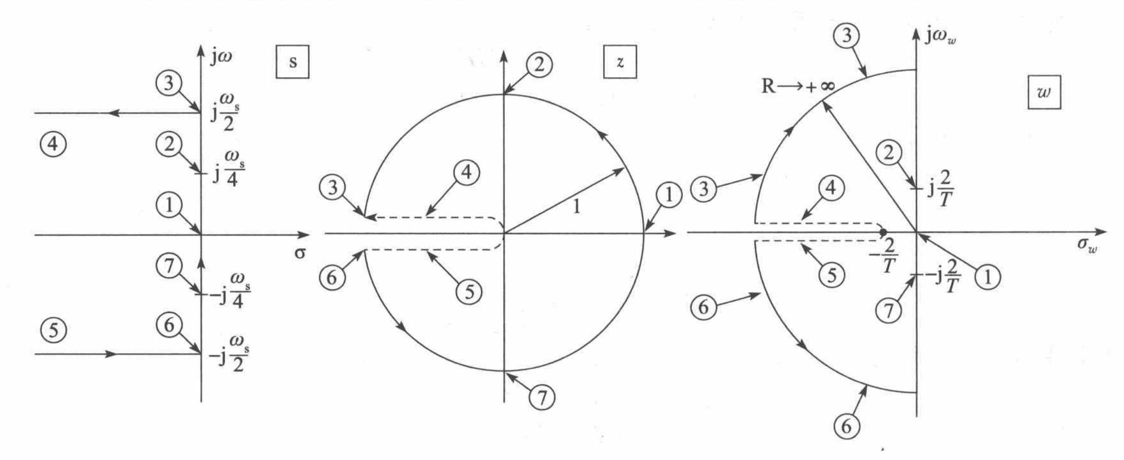


图 7-4　从 s 平面到 z 平面再到 w 平面的映射

用 $\mathrm{j}\omega_w$ 表示 w 平面的虚轴，并称其为 w 域频率，则由式(7-9)，有：

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \tag{7-10}$$

上式给出了 s 域频率与 w 域频率之间的关系。

当 s 域频率(实频)值很小致使 ωT 较小时，可将式(7-10)近似写成：

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \approx \frac{2}{T}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \omega \tag{7-11}$$

这时，w 域频率近似等于 s 域频率，也即 $\tan(\omega T/2) \approx \omega T/2$ 成立时，该近似有效。注意，当

$$\frac{\omega T}{2} \leqslant \frac{\pi}{10},\quad \omega \leqslant \frac{2\pi}{10T} = \frac{\omega_s}{10} \tag{7-12}$$

时，近似式所产生的误差小于 4%。由于零阶保持器会引入相位滞后，通常这样选择采样周期 T：在几乎(不是全部)在系统的通频带范围内，使式(7-12)成立。当 $\omega=\omega_s/10$ 时，零

阶保持器所引入的相位滞后为 18°(见图 3-13)，这是一个敏感的量值，在后文会看到，取该值时，会对系统的稳定性造成较大影响。

7.4　劳斯-赫尔维茨准则

在分析 LTI 连续时间系统时，劳斯-赫尔维茨准则[1]用来确定其特征方程中是否存在位于 s 平面右半平面的根。而对用 z 域传递函数表示的 LTI 离散时间系统来说，如果使用劳斯-赫尔维茨准则，则无法得到关于系统稳定性的可用信息。然而，我们可以将离散时间系统的特征方程表示为双线性变换变量 w 的函数，之后直接运用劳斯-赫尔维茨准则，便可判定出该系统的稳定性

我们假设读者已熟知劳斯-赫尔维茨准则的使用方法，现仅将该方法概括于表 7-1 中，并通过举例说明该方法的使用。

表 7-1　劳斯-赫尔维茨准则基本应用方法

1) 对于具有如下形式的特征方程：

$$F(w)=b_n w^n+b_{n-1}w^{n-1}+\cdots+b_1 w+b_0=0$$

形成如下劳斯阵列：

$$\begin{array}{c|cccc}
w^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots \\
w^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
w^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
w^1 & j_1 & & & \\
w^0 & k_1 & & &
\end{array}$$

2) 劳斯阵列的前两行由特征方程获得，其他行按照下述方法算得：

$$c_1=\frac{b_{n-1}b_{n-2}-b_n b_{n-3}}{b_{n-1}},\quad d_1=\frac{c_1 b_{n-3}-b_{n-1}c_2}{c_1}$$

$$c_2=\frac{b_{n-1}b_{n-4}-b_n b_{n-5}}{b_{n-1}},\quad d_2=\frac{c_1 b_{n-5}-b_{n-1}c_3}{c_1}$$

$$c_3=\frac{b_{n-1}b_{n-6}-b_n b_{n-7}}{b_{n-1}}\qquad\qquad \vdots$$

3) 一旦获得上述阵列，劳斯-赫尔维茨准则告诉我们：特征方程具有正实部根的数量等于阵列的第 1 列系数变号的次数。

4) 设第 w^{i-2}行均为 0 值，第 w^i行的对应系数为 α_1，α_1，…，列写辅助方程：

$$\alpha_1 w^i+\alpha_2 w^{i-2}+\alpha_3 w^{i-4}+\cdots=0$$

该方程是特征方程的一个因式。

例 7.2　例 6.7 的系统如图 7-5 所示，其中，$T=0.1\text{s}$。$K=1$ 时，其开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

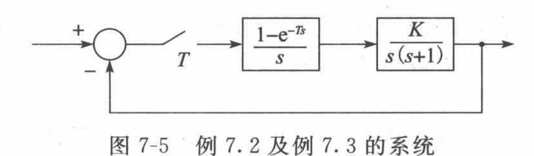


图 7-5　例 7.2 及例 7.3 的系统

查 z 变换表得：

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{(\mathrm{e}^{-T}+T-1)z^2+(1-\mathrm{e}^{-T}-T\mathrm{e}^{-T})z}{(z-1)^2(z-\mathrm{e}^{-T})}\right]$$

$$=\frac{0.004\,84z+0.004\,68}{(z-1)(z-0.905)}$$

利用下式得到 $G(w)$：

$$G(w)=G(z)\big|_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]}=G(z)\big|_{z=(1+0.05w)/(1-0.05w)}$$

即

$$G(w)=\frac{-0.000\,042\,0w^2-0.0491w+1}{w^2+0.997w}$$

上述双线性变换也可以借助 MATLAB 程序得到：

```
>> T=0.1; numz=[0.00484 0.00468]; denz=[1 -1.905 0.905];
Gz=tf(numz,denz,T);
Gw=d2c(Gz,'tustin') %Bilinear transform from discrete to continuous; d2c
returns a function of s, but is w in our notation here

Gw =
 -4.199e-05 s^2 - 0.04913 s + 0.9995
 ----------------------------------
 s^2 + 0.9974 s + 4.429e-15
```

由此得到特征方程如下：

$$1+KG(w)=(1-0.000\,042K)w^2+(0.997-0.0491K)w+K=0$$

由此方程写出劳斯阵列：

$$\begin{array}{c|llll} w^2 & 1-0.000\,042K & 3.81K & \Rightarrow & K<23\,800 \\ w^1 & 0.997-0.491K & & \Rightarrow & K<20.3 \\ w^0 & K & & \Rightarrow & K>0 \end{array}$$

为了使阵列的第 1 列不变号，应满足 $0<K<20.3$，这时系统是稳定的。 ◀

例 7.3 再次讨论例 6.4 的系统(见图 7-5，$T=1\text{s}$)。控制对象的增益为 K 时，其双线性变换可以由如下 MATLAB 程序实现：

```
>> T=1; numz=[0.368 0.264]; denz=[1 -1.368 0.368];
Gz=tf(numz,denz,T)
Gw=d2c(Gz,'tustin') %Bilinear transform; change s to w.
Gw =
 -0.03801 s^2 - 0.386 s + 0.924
 -----------------------------
 s^2 + 0.924 s - 2.052e-16
```

由此得到特征方程为：

$$1+KG(w)=(1-0.038\,01K)w^2+(0.0924-0.386K)w+0.924K=0$$

根据特征方程写出劳斯阵列：

$$\begin{array}{c|llll} w^2 & 1-0.038\,01K & 0.924K & \Rightarrow & K<26.3 \\ w^1 & 0.924-0.386K & & \Rightarrow & K<2.39 \\ w^0 & 0.924K & & \Rightarrow & K>0 \end{array}$$

于是，当 $0<K<2.39$ 时，该系统是稳定的。 ◀

根据我们对连续时间系统已有的知识，可知劳斯-赫尔维茨准则可以用来确定 K 的数值，此值使根轨迹跨越到右半平面(即在此 K 值，系统变得不稳定)。使系统处于临界稳定的增益 K 值也可以用来确定稳定振荡频率，因此，例 7.3 中的 $K=2.39$ 是使系统处于临界稳定的增益。

可以用类似于连续时间系统的做法，根据阵列的 w^2 行求出临界振荡时的增益值 $K=2.39$，方法如下：我们知道 ω_w 是 w 的虚部，于是可得辅助方程(见表 7-1)为：

$$(1-0.038\,01K)w^2+0.924K\,|_{K=2.39}=0.9092w+2.2084=0$$

解得：

$$w=\pm\mathrm{j}\sqrt{\frac{2.2084}{0.9092}}=\pm\mathrm{j}1.5585$$

于是，$\omega_w=1.5585$，根据式(7-10)，有：

$$\omega=\frac{2}{T}\arctan\frac{\omega_w T}{2}=\frac{2}{1}\arctan\left[\frac{(1.5585\times 1)}{2}\right]=1.324\text{rad/s}$$

为 s 域(实)频，此时，系统因 $K=2.39$ 而振荡。

在本节，我们对同一系统举了两个例子，两个例子使用不同的采样周期。$T=0.1\text{s}$

时，系统在 $0<K<20.3$ 范围内稳定；$T=1\text{s}$ 时，系统则在 $0<K<2.39$ 范围内稳定。于是可见，该系统的稳定性与采样周期有关。由图 3-13 给出的数据保持器的频率响应可以看出，数字系统中的采样器和数据保持器会导致响应的延迟(相位滞后)，从而，随着 T 的增加(采样频率下降)，会使系统的稳定性变差。

7.5 朱里稳定性测试

对低阶连续时间系统而言，劳斯-赫尔维茨准则提供了一个确定其稳定性的简便方法。但是，由于系统在 z 平面上稳定的界与 s 平面上的稳定界有所不同，因此，对于将特征方程表示为 z 函数的离散时间系统，就不能直接使用劳斯-赫尔维茨准则。有一个类似于劳斯-赫尔维茨准则的、能够用到以 z 为自变量的特征方程上的、判断离散时间系统稳定性的准则，叫做朱里稳定性测试[2]。

什么是朱里测试呢？设一个离散时间系统的特征方程如下：

$$Q(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0,\quad a_n>0 \tag{7-13}$$

构建上述方程的阵列如表 7-2 所示。阵列中，每一个偶数行上的元素是其上一行元素的逆排序，而奇数行上的元素定义如下：

$$b_k=\begin{vmatrix}a_0 & a_{n-k}\\ a_n & a_k\end{vmatrix},\qquad c_k=\begin{vmatrix}b_0 & b_{n-1-k}\\ b_{n-1} & b_k\end{vmatrix}$$
$$d_k=\begin{vmatrix}c_0 & c_{n-2-k}\\ c_{n-2} & c_k\end{vmatrix}\cdots \tag{7-14}$$

表 7-2　朱里稳定性测试阵列

z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-k}	$\cdots$	z^{n-1}	z^n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_0	
c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-k}	$\cdots$		
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_{k-2}	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
l_0	l_1	l_2	l_3				
l_3	l_2	l_1	l_0				
m_0	m_1	m_2					

在 $a_n>0$ 的前提下，多项式 $Q(z)$ 不具有单位圆上或单位圆外部根的充要条件是：

$$\begin{aligned}&Q(1)>0\\&(-1)^nQ(-1)>0\\&|a_0|<a_n\\&|b_0|<|b_{n-1}|\\&|c_0|<|c_{n-2}|\\&|d_0|<|d_{n-3}|\\&\vdots\\&|m_0|>|m_2|\end{aligned} \tag{7-15}$$

注意，一个二阶系统的阵列行数仅为 1。之后，系统每增加一阶，阵列便增加 2 行，就是说，一个 n 阶的系统，总共有 $n+1$ 条约束。

例 7.4 再次使用例 6.4 及例 7.3 的系统，设系统的控制对象的增益因子为 K，求该系统稳定条件下 K 的取值范围。

据例 6.4 知，该系统的特征方程为：

$$1+KG(z)=1+\frac{(0.368z-0.264)K}{z^2-1.368z+0.368}=0$$

因此有：

$$z^2+(0.368K-1.368)z+(0.368+0.264K)=0$$

于是得朱里阵列：

z^0	z^1	z^2
$0.368+0.264K$	$0.368K-1.368$	1

据约束条件 $Q(1)>0$，得：

$$1+(0.368K-1.368)+(0.368+0.264K)=0.632K>0 \Rightarrow K>0$$

由 $(-1)^2Q(-1)>0$，得：

$$1-0.368K+1.368+0.368+0.264K>0 \Rightarrow K<\frac{2.736}{0.104}=26.3$$

由 $|a_0|<a_2$，得：

$$0.368+0.264K<1 \Rightarrow K<\frac{0.632}{0.264}=2.39$$

于是当

$$0<K<2.39$$

时，系统是稳定的。而当 $K=2.39$ 时，系统则处于临界稳定状态，这时特征方程为：

$$z^2+(0.368K-1.368)z+(0.368+0.264K)|_{K=2.39}=z^2-0.488z+1=0$$

其根为：

$$z=0.244\pm \mathrm{j}0.970=1\angle(\pm 75.9^\circ)=1\angle(\pm 1.32\mathrm{rad})=1\angle(\pm \omega T)$$

因 $T=1\mathrm{s}$，此时的系统将以 1.32rad/s 的频率振荡。上述结果是对例 7.3 结果的验证。◀

例 7.5 设某闭环离散时间系统的特征方程为：

$$Q(z)=z^3-1.8z^2+1.05z-0.20=0$$

首先，计算其朱里测试的如下约束

$$Q(1)=1-1.8+1.05-0.2=0.05>0$$

$$(-1)^3Q(-1)=-[-1-1.8-1.05-0.2]=4.05>0$$

$$|a_0|=0.2<a_3=1$$

然后，计算朱里阵列的各项：

$$b_0=\begin{vmatrix}-0.2 & 1\\ 1 & -0.2\end{vmatrix}=-0.96,\qquad b_1=\begin{vmatrix}-0.2 & -1.8\\ 1 & 1.05\end{vmatrix}=1.59$$

$$b_2=\begin{vmatrix}-0.2 & 1.05\\ 1 & -1.8\end{vmatrix}=-0.69$$

得朱里阵列如表 7-3 所示。

表 7-3 朱里阵列

z^0	z^1	z^2	z^3
−0.2	1.05	−1.8	1
1	−1.8	1.05	−0.2
−0.96	1.59	−0.69	

再考核约束：

$$|b_0|=0.96>|b_2|=0.69$$

可见，因所有约束条件均得以满足，故该系统是稳定的。也可以将特征方程进行因式分解：

$$Q(z)=(z-0.5)^2(z-0.8)$$

因式分解的结果是清晰的：该系统稳定。◀

例 7.6 针对例 6.8 系统，希望确定使该系统稳定的 K_P 的取值范围。在例 6.8 中，为了满足一定的稳定性条件，我们设计了一个 PI(比例＋积分)补偿器，对经补偿的系统的稳定性要求进行了推导，其特征方程是：

$$1+D(z)G(z)=0$$

据例 6.8，有：

$$1+\left[\frac{(K_I+K_P)z-K_P}{z-1}\right]\left[\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right]=0$$

于是

$$z^2-[(1+e^{-T})-(1-e^{-T})(K_I+K_P)]z+e^{-T}-(1-e^{-T})K_P=0$$

如例 6.8 所需，设 $T=0.1\text{s}$，$K_I=100T=10$，特征方程变为：

$$z^2-(0.953-0.0952K_P)z+0.905-0.0952K_P=0$$

由此得朱里阵列为：

z^0	z^1	z^2
$0.905-0.0952K_P$	$0.0952K_P-0.953$	1

据约束 $Q(1)>0$，得：

$$1+0.0952K_P-0.953+0.905-0.0952K_P>0$$

上式仅与 K_P 有关，再据约束 $(-1)^2Q(-1)>0$，得：

$$1-0.0952K_P-0.953+0.905-0.0952K_P>0$$

考虑到 K_P 应为正数，有：

$$0<K_P<15.01$$

由 $|a_0|<a_2$，得：

$$|0.905-0.0952K_P|<1$$

即

$$K_P<20.0$$

于是可知，为了满足例 6.8 中稳态误差的要求，稳定性约束条件是 K_P 是小于 15.01 的正数。◀

7.6 根轨迹

对于图 7-6 示出的 LTI 数据采样系统来说，其传递函数为：

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{KG(z)}{1+K\overline{GH}(z)}$$

于是得其特征方程为：

$$1+K\overline{GH}(z)=0 \tag{7-16}$$

该系统的根轨迹是指：式(7-16)的根随 K 变化的轨迹线。离散时间系统的根轨迹准则与连续时间系统是相同的，原因是任何方程的根只取决于方程中的系数，而与方程使用何种变量无关。根轨迹准则有若干条，这在关于连续时间控制系统根轨迹准则的标准文件中可以找到[1,4]，这里仅以简约的方式介绍其中最重要的，如表 7-4 所示。

表 7-4　根轨迹准则

对于特征方程：

$$1+K\overline{GH}(z)=0$$

1) 根轨迹始于 $\overline{GH}(z)$ 的极点，终于 $\overline{GH}(z)$ 的零点；

2) 实轴上的根轨迹总是位于实轴上奇数个极点和零点的左侧；

3) 根轨迹关于实轴对称；

4) 渐近线的条数等于 $\overline{GH}(z)$ 的极点数 n_p 减去 $\overline{GH}(z)$ 的零点数 n_z，渐近线的角度由 $(2k+1)\pi/(n_p-n_z)$ 给出；

5) 渐近线与实轴在 σ 处相交，其中

（续）

$$\sigma=\frac{\sum \overline{GH}(z)\text{ 极点}-\sum \overline{GH}(z)\text{ 零点}}{n_p-n_z}$$

6）根轨迹的分离点等于下述方程的根：

$$\frac{\mathrm{d}[\overline{GH}(z)]}{\mathrm{d}z}=0$$

上式等效于

$$\mathrm{den}(z)\frac{\mathrm{d}(\mathrm{num}(z))}{\mathrm{d}z}-\mathrm{num}(z)\frac{\mathrm{d}(\mathrm{den}(z))}{\mathrm{d}z}=0,\quad \overline{GH}(z)=\frac{\mathrm{num}(z)}{\mathrm{den}(z)}$$

尽管针对 s 平面和 z 平面所建立的根轨迹准则是相同的，但对这两种根轨迹的解释十分不同。例如，在 z 平面，系统的稳定区域是单位圆内部；再如，从系统时间响应的角度，两者根的位置所具含义不同，如图 6-11 所示。

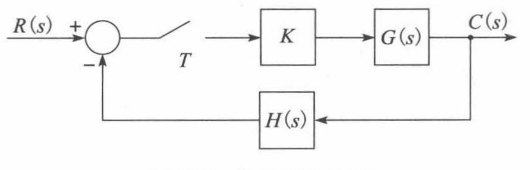


图 7-6 数据采样系统

接下来举两个关于根轨迹方法的例子，所及内容也是系统稳定性分析的一部分。

例 7.7 我们再次使用例 6.4 的系统，该系统的传递函数为：

$$KG(z)=\frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

于是，该系统的根轨迹始于 $z=1$ 和 $z=0.368$，终于 $z=-0.717$ 和 $z=+\infty$，有一条角度为 180°的渐近线。为求根轨迹的分裂点，计算

$$\frac{d}{\mathrm{d}z}[G(z)]=0$$

得 $K=0.196$ 时，$z=0.65$；$K=15.0$ 时，$z=-2.08$。根轨迹如图 7-7 所示。

根据图 7-7 给出的根轨迹结构、朱里测试及劳斯-赫尔维茨准则，找出根轨迹与单位圆的交点。为了说明朱里测试的使用方法，我们来分析例 7.4 的结果，该例指出，系统临界稳定的增益值(即出现单位圆上的根)是 $K=2.39$，代入该值，特征方程变为：

$$z^2-0.488z+1=0$$

解得以上方程的根为：

$$z=0.244\pm \mathrm{j}0.970=1\angle(\pm 75.8°)$$
$$=1\angle(\pm 1.32\mathrm{rad})=1\angle(\omega T)$$

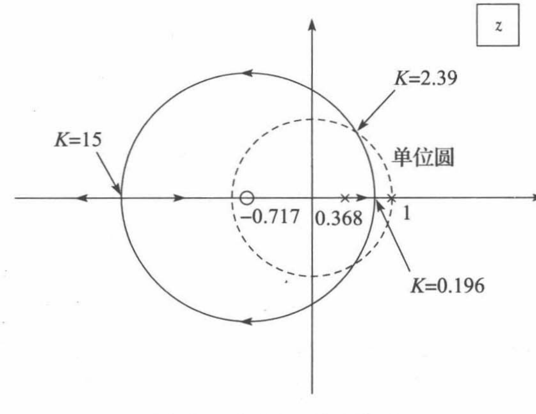


图 7-7 例 7.7 的根轨迹

于是得根轨迹跨越单位圆的点。注意，因 $T=1$，该系统在 $K=2.39$ 时临界振荡，振荡频率为 $\omega=1.32\mathrm{rad/s}$。这一结果也可以通过劳斯-赫尔维茨准则获得(见例 7.3)，还可以通过朱里测试获得(见例 7.4)。

根轨迹跨越单位圆的点对应的增益值也可以用根轨迹的条件来确定，即在根轨迹的任何一点，系统开环传递函数的增益必须为 1[即 $|K\overline{GH}(z)|=1$]，根据这一条件及图 7-8 知，

$$\frac{0.368K(Z_1)}{(P_1)(P_2)}=1$$

借助图 7-8 可以算出：$Z_1=1.364$，$P_1=1.229$，$P_2=0.978$。将这些值代入上式，得 $K=2.39$。下面是求解并绘制本例根轨迹的 MATLAB 程序：

```
>> T = 1;
num = [0 0.368 0.264];
den = [1 -1.368 0.368];
Gz = tf(num,den,T);
rlocus(Gz)
axis([-3 2 -2 2]) %Set to match Figure 7-7
```

需要注意的是，仿照求解跨越单位圆的根及其增益值的方法，根据 MATLAB 的 rlocus 图，可以直接求得根轨迹的分裂点及分裂点处的增益 K。◀

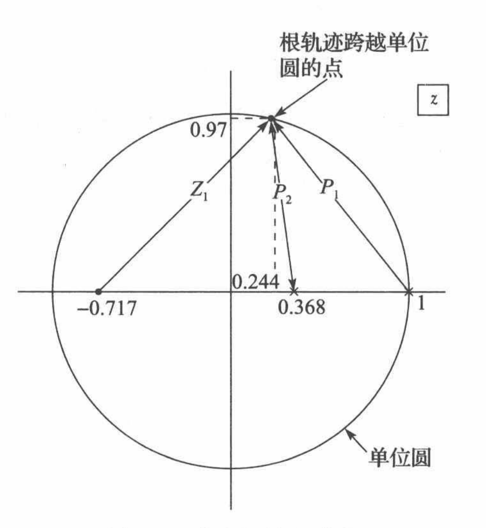


图 7-8 确定根轨迹跨越单位圆时的系统增益

例 7.8 控制系统如图 7-9 所示，其中，$[1+10s]$ 是比例-微分(PD)模拟控制器[1]的传递函数，数字 PD 控制器将在第 8 章介绍。请求出根轨迹并确定系统稳定时 K 的取值范围。

该系统的开环传递函数为：

$$KG(s) = \frac{(1-e^{-sT})}{s}\left[\frac{K(1+10s)}{s^2}\right]$$

通过 z 变换，有

$$KG(z) = \frac{10.5K(z-0.9048)}{(z-1)^2}$$

显然，其根轨迹始于 $z=1$，终于 $z=0.9048$ 和 $z=+\infty$，有一条角度为 180°的渐近线，全部根轨迹如图 7-10 所示。

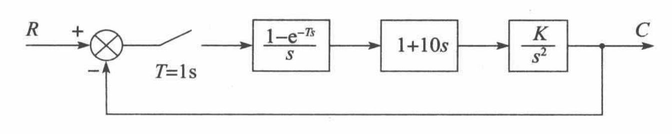


图 7-9 例 7.8 的系统

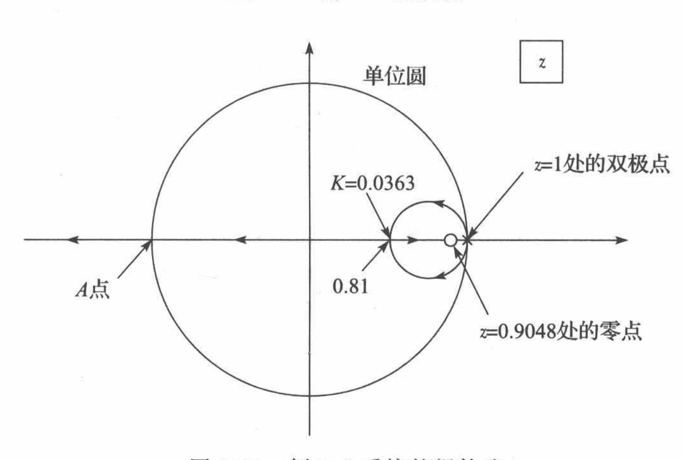


图 7-10 例 7.8 系统的根轨迹

当闭环极点在 A 点离开单位圆的内部，系统会变得不稳定，这时的 K 值可以通过 $KG(z)=-1$ 解出来，即

$$\left.\frac{10.5K(z-0.9048)}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{10.5K(-1.9048)}{4} = -1$$

解得 $K=0.2$，就是说，当 $0<K<0.2$ 时，系统是稳定的。

使用如下 MATLAB 程序可以绘出图 7-10 所示的根轨迹图，根轨迹的分裂点和系统稳

定的增益极限值可以由此图直接得以证明：

```
>> T = 1;
Gs = tf([10 1],[1 0 0]);
Gz = c2d(Gs,T); % c2d includes the zero-order hold
rlocus(Gz)
axis([-1.5 1.5 -1.25 1.25])
```

◀

7.7　奈奎斯特准则

为便于对可用于离散时间系统的奈奎斯特准则的讨论，我们给出两个系统，如图 7-11 所示。其中，图 7-11b 所示的 $G(s)$已将数据保持器的传递函数含于其中；图 7-11a 给出的连续时间系统的传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_p(s)}{1+G_p(s)H(s)} \tag{7-17}$$

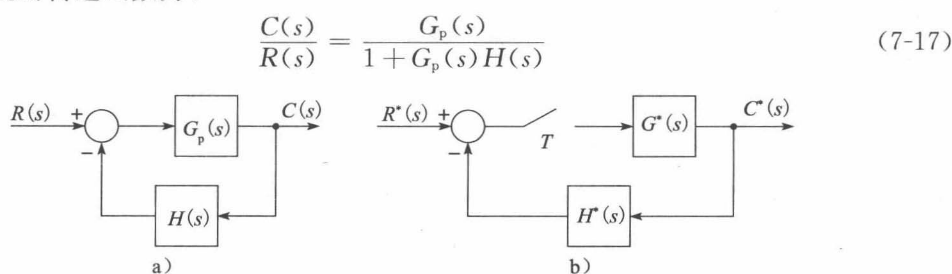


图 7-11　连续时间系统和数据采样系统

图 7-11b 给出的数据采样系统的传递函数为：

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)}=\frac{G^*(s)}{1+\overline{GH}^*(s)} \tag{7-18}$$

于是得连续时间系统的特征方程为：

$$1+G_p(s)H(s)=0 \tag{7-19}$$

数据采样系统的特征方程为：

$$1+\overline{GH}^*(s)=0 \tag{7-20}$$

也可将数据采样系统的特征方程写成：

$$1+\overline{GH}(z)=0 \tag{7-21}$$

我们知道，如果方程式(7-19)的全部根均落在左半平面，那么这个连续时间系统就是稳定的。同样，如果方程式(7-20)的全部根均落在左半平面，或方程式(7-21)的全部根均落在单位圆内，那么这个数据采样系统也是稳定的。

奈奎斯特准则的基础是辐角的柯西准则[5]。

定理　令 $f(z)$表示以 z 为自变量的两个多项式之比，通过对 $f(z)$的映射，将 z 平面的闭合曲线 C 映射到复平面。如果 $f(z)$在闭合曲线 C 及其内部是可分解的(有限的极点处除外)，且在 C 上没有极点和零点，设在 C 内 $f(z)$有 Z 个零点、P 个极点，则曲线(与曲线 C 具有相同含义)包围原点的次数 N 为：

$$N=Z-P$$

s 平面奈奎斯特图　为了通过奈奎斯特准则判断模拟系统的稳定性，需要在复平面上绘制出系统开环传递函数$G_p(s)H(s)$的图，称为奈奎斯特图。柯西辐角准则下的闭合曲线 C 称为奈奎斯特路径，对于连续时间系统来说，该路径围住了右半 s 平面，如图 7-12 所示。

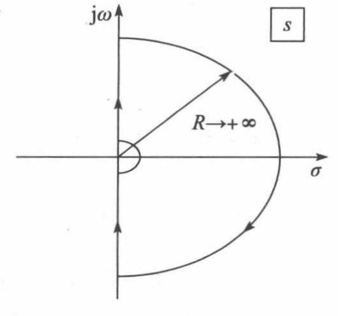


图 7-12　s 平面上的奈奎斯特路径

奈奎斯特准则告诉我们：对于绘制在 s 平面上的 $G_p(s)H(s)$的曲线(奈奎斯特路径)，有：

$$N=Z-P\Rightarrow Z=N+P \tag{7-22}$$

其中，N 是$G_p(s)H(s)$的奈奎斯特图沿顺时针方向包围 -1 点的次数，Z 是被奈奎斯特路径围住的特征方程的零点数，P 是被奈奎斯特路径围住的开环传递函数的极点数。因为奈奎斯特路径围住的是右半 s 平面，所以对于稳定系统来讲，式(7-22)中的 Z 一定为 0。

例 7.9 我们以图 7-13 给出的连续时间系统为例，来讲述奈奎斯特准则的应用。奈奎斯特路径及由此而发的奈奎斯特图如图 7-14 所示。由于$G_p(s)$在原点处有一个极点，有必要使奈奎斯特路径绕原点形成一个小圆(在 7-14a 上标记为“I”的部分)，沿这个小圆，令

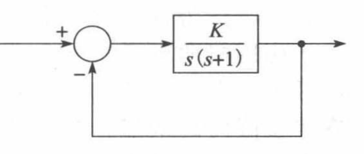


图 7-13　例 7.9 的系统

$$s=\rho e^{j\theta},\quad \rho\ll 1$$

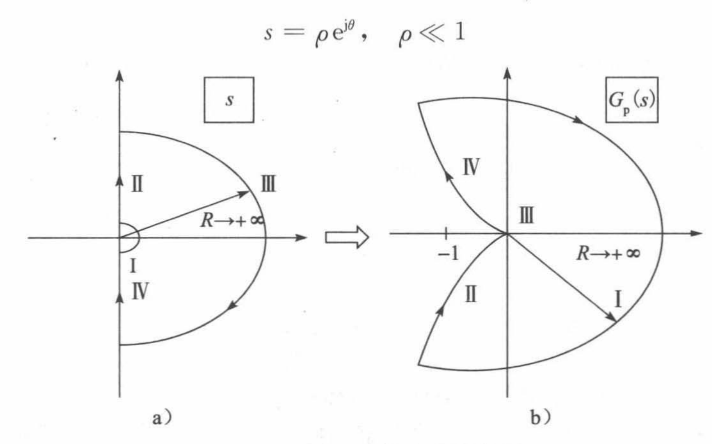


图 7-14　例 7.9 的奈奎斯特图

则

$$G_p(s)\big|_{s=\rho e^{j\theta}}\approx\frac{K}{\rho\,e^{j\theta}}=\frac{K}{\rho}\angle(-\theta)$$

可见，这个小圈产生了奈奎斯特图上大的弧段。对于沿 $j\omega$ 轴的那段奈奎斯特路径(Ⅱ)，有：

$$G_p(s)\big|_{s=\rho e^{j\theta}}\approx\frac{K}{j\omega(1+j\omega)}=\frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}\angle(-90^\circ-\arctan\omega)$$

这部分奈奎斯特图正是系统的频率响应。沿奈奎斯特路径的那段大弧线，$G_p(s)\approx 0$。完整的奈奎斯特图如图 7-14b 所示。下面使用奈奎斯特准则，首先，根据图 7-14b 给出的奈奎斯特图可知，$N=0$，又知开环传递函数在 s 的右半平面没有极点，即 $P=0$，因此，由 $Z=N+P$求得 $Z=0$。于是，该系统稳定。另外，根据图 7-14b 所示的奈奎斯特图可知，对于 $K>0$ 所有值，系统均是稳定的。◀

下面讨论图 7-11b 给出的数据采样系统，式(7-20)就是它的特征方程，于是，通过使用图 7-12 给出的 s 平面奈奎斯特路径(与连续时间系统所用的奈奎斯特路径相同)可以得到该系统的奈奎斯特图。我们记得，$\overline{GH}^*(s)$是 s 的周期函数，周期为 $j\omega_s$，因此，仅需在$-\omega_s/2\leqslant\omega\leqslant\omega_s/2$ 内绘制$\overline{GH}^*(j\omega)$，以获得系统的频率响应即可。根据式(3-11)，将$\overline{GH}^*(j\omega)$写成：

$$\begin{aligned}\overline{GH}^*(j\omega)&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}GH(j\omega+jn\omega_s)\\&=\frac{1}{T}[GH(j\omega)+GH(j\omega+j\omega_s)+GH(j\omega+j2\omega_s)+\cdots]\end{aligned}\tag{7-23}$$

鉴于物理系统通常具有低通特性，因此，可以仅截取式(7-23)的前几项来近似$\overline{GH}^*(j\omega)$，不过这种近似一般不能用于 $\omega>\omega_s/2$ 的情形。可以针对式(7-23)编写一段计算机程序，以

获得数据采样系统的奈奎斯特图，而不再使用传递函数z变换的方法。

z平面奈奎斯特图 奈奎斯特图也可以在z平面上直接获得。z平面的奈奎斯特路径是逆时针方向的单位圆，如图7-15所示。为了应用柯西辐角准则，设Z_i和P_i分别表示特征方程在单位圆内的零点和开环传递函数在单位圆内的极点，Z_o和P_o分别表示特征方程在单位圆外的零点和开环传递函数在单位圆外的极点，那么根据式(7-22)，有：

$$N = -(Z_i - P_i) \tag{7-24}$$

式中：N为$\overline{GH}(z)$的奈奎斯特图沿顺时针方向包围-1点的次数。

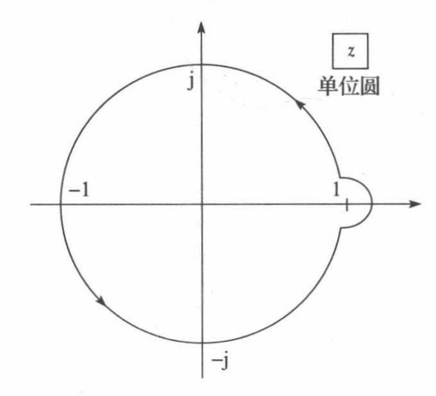


图7-15 z平面的奈奎斯特路径

式(7-24)中的符号是奈奎斯特路径取逆时针方向的缘故。一般来讲，$1+\overline{GH}(z)$的分子多项式和分母多项式的阶数相同，令阶数为n，即

$$Z_o + Z_i = n \tag{7-25}$$

$$P_o + P_i = n \tag{7-26}$$

分别由式(7-25)和式(7-26)解出Z_i和P_i，再将它们代入式(7-24)，得到：

$$N = Z_o - P_o \tag{7-27}$$

于是，由式(7-27)和图7-15给出的奈奎斯特路径得奈奎斯特准则。通过对单位圆上的z绘制$\overline{GH}(z)$，即可获得图7-11b所示系统的奈奎斯特图。我们略去式(7-27)中的下标，有：

$$N = Z - P \Rightarrow Z = N + P \tag{7-28}$$

式中：N为奈奎斯特图顺时针环绕-1点的次数；Z为单位圆外特征方程的零点数；P为单位圆外开环传递函数的极点数。

开环传递函数的极点与特征方程的极点等效。

例7.10 我们以图7-16给出的系统为例，来讲述奈奎斯特准则的应用。根据例6.4，有：

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

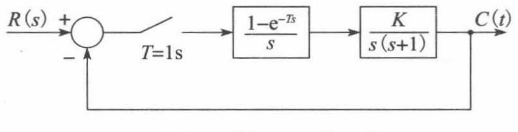


图7-16 例7.10的系统

该系统的奈奎斯特路径和奈奎斯特图如图7-17所示。由于$G(z)$在单位圆上有一个极点，因此其奈奎斯特路径(见图7-17a)有一个环绕$z=1$点的小圆，在这个小圆上，有：

$$z = 1 + \rho e^{j\theta}, \quad \rho \ll 1$$

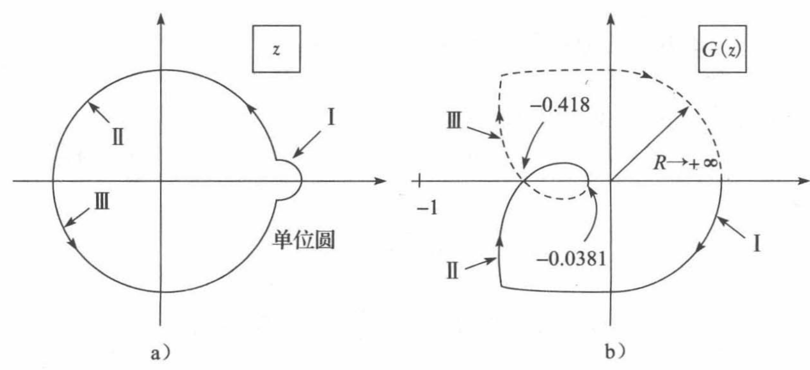


图7-17 例7.10的奈奎斯特路径和奈奎斯特图

及

$$G(z)\big|_{z=1+\rho e^{j\theta}} \approx \frac{0.632}{\rho e^{j\theta}(0.632)} = \frac{1}{\rho}\angle(-\theta)$$

可见，这个小圆产生了奈奎斯特图上大的弧段(见图 7-17b)。而对于单位圆上的 z，有：

$$G(z)\big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{0.368e^{j\omega T}+0.264}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}-0.368)}$$

上式中，ω 的变化范围为 $-\frac{\omega_s}{2}\sim\frac{\omega_s}{2}$。考虑到 $G(e^{j\omega T})$，$0>\omega>-\omega_s/2$ 是 $G(e^{j\omega T})$，$0>\omega>\omega_s/2$的复共轭，因此仅需分析计算 $G(e^{j\omega T})$，$0>\omega>\omega_s/2$ 即可，通过此分析计算，可获得对 $G(z)$的频率响应，其 $G(-1)=-0.0381$。

图 7-17b 所示图线中，标记为 Ⅱ 的那部分图线的实现方法有多种，可以基于 $G^*(s)\big|_{s=j\omega}$或$G(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}$进行。一般来讲，需要用到计算机程序以评估其频率响应，下面是绘制图 7-17b 所示奈奎斯特图的 MATLAB 程序：

```
>> T = 1;
num = [0 0.368 0.264];
den = [1 -1.368 0.368];
Gz = tf(num,den,T);
nyquist(Gz)
axis([-1.2 0.2 -0.7 0.7])
```

请注意，奈奎斯特图跨越实轴的点(-0.0381 和 -0.418)可直接由上述 MATLAB 程序计算出来。

从图 7-17 可以获知，$N=0$，原因是奈奎斯特图并未环绕-1 点，再有就是 $P=0$，原因是 $G(z)$在奈奎斯特路径外没有极点，于是，$Z=(N+P)=0$，系统是稳定的。

如果我们将一个取值为 K 的增益加到控制对象上，那么会发现，通过使增益 K 上增加 1/0.418 即 2.39 倍，就会胁迫该系统变得不稳定。然而，该系统若未经采样(如例 7.9)，则对 $K>0$ 的所有正数均是稳定的。如前所述，这种造成系统稳定性变差的因素可以归结为采样器和信号保持器导致相位滞后的缘故。◀

从例 7.10 可以看出，这个模拟系统模型对于控制对象增益 K 的任意正数均是稳定的。这对于该模型模拟的那个物理系统并不成立。这个二阶系统模型仅在有限的信号强度下是精准的。系统内环增益的大幅度增加会导致大信号的出现，这时，线性二阶模型将不再精准。

例 7.11 我们仍以例 7.10 的系统为例，系统的传递函数为：

$$G(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}$$

参考例 7.3，得到 $G(w)$：

$$G(w)=\frac{-0.0381w^2-0.386w+0.924}{w^2+0.924w}$$

根据上式，设 w 从 j0 到 j∞，可绘制出以 w 为自变量的奈奎斯特图。鉴于 $G(w)$在原点处有一个极点，其奈奎斯特路径要用一个小圆绕过该点。绘制该 $G(w)$的奈奎斯特图的 MATLAB 程序如下：

```
>> num = [-0.0381 -0.368 0.924];
den = [1 0.924 0];
nyquist(num,den)
axis([-1.2 0.2 -0.7 0.7])
```
◀

在数值精度内，所得奈奎斯特图与用 $G(z)$绘制的结果(见图 7-17)相同。

用于绘制奈奎斯特图的变换函数有三个：$\overline{GH}^*(s)$、$\overline{GH}(z)$和$\overline{GH}(w)$。当然，这三种变换函数所产生的奈奎斯特图是相同的。表 7-5 给出了由这三个函数得到奈奎斯特图时所

需的变量范围。请注意，所列变量范围仅与奈奎斯特路径的上半部分相对应，如果系统开环传递函数的极点位于这些范围中，必须用小圆环绕该极点。

表 7-5　得出奈奎斯特图的函数

开环函数	变量范围
$\overline{GH}^*(s)$	$s=\mathrm{j}\omega$，$0\leqslant\omega\leqslant\omega_s/2$
$\overline{GH}(z)$	$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}$，$0\leqslant\omega T\leqslant\pi$
$\overline{GH}^*(w)$	$w=\mathrm{j}\omega_w$，$0\leqslant\omega_w\leqslant+\infty$

增益裕度和相位裕度　对于一个稳定的系统，其增益裕度定义为一个因数，该因数使增益变化到胁迫系统临界稳定；相位裕度定义为一个角度，该角度使奈奎斯特图旋转到与-1点相交。稳定的离散时间系统的增益裕度定义和相位裕度定义与上述完全相同，即在图 7-18 中，由其奈奎斯特图知，增益裕度为$1/a$，相位裕度是ϕ_m。

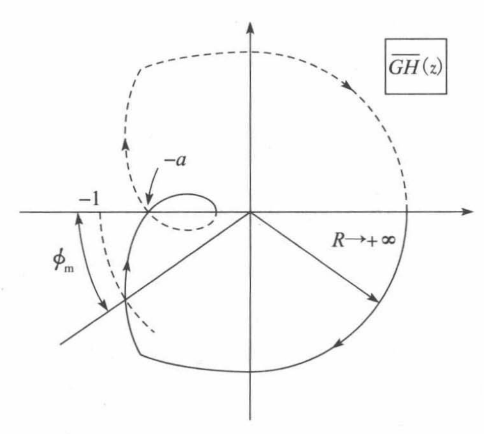


图 7-18　用以说明稳定裕度的奈奎斯特图

脉冲传递函数　现在依次介绍一些脉冲传递函数的性质。首先，对于图 7-19a 所示系统来讲，有：

$$C(z)=G(z)E(z)$$

式中：$G(z)$可表示为：

$$G(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0} \tag{7-29}$$

用$G(z)$的分子除以分母，将$G(z)$表示为：

$$G(z)=g(n-m)z^{-(n-m)}+g(n-m+1)z^{-(n-m+1)}+\cdots \tag{7-30}$$

定义离散单位冲击函数的变换为：

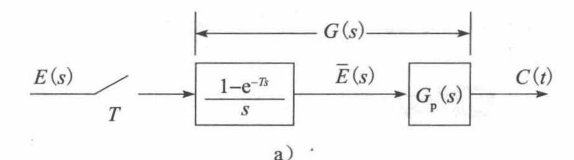
$$E(z)=1 \tag{7-31}$$

于是，离散单位冲击函数是序列$\{e(k)\}$，$k=0$时，其值为单位 1，$k=1$，2，3，…时，其值为 0。如果图 7-19 中的$E(z)$是单位冲激函数，则有

$$C(z)=G(z)E(z)=G(z) \tag{7-32}$$

于是，式(7-30)是系统的冲激响应。

$E(z)$是单位冲激函数时的$\bar{e}(t)$如图 7-19 所示。对于大多数物理系统来讲，我们期望获得图示的响应$c(t)$。控制对象不会即时对输入产生响应，但在$t=T$会对非零值产生响应，因此可以将$C(z)$表示为：



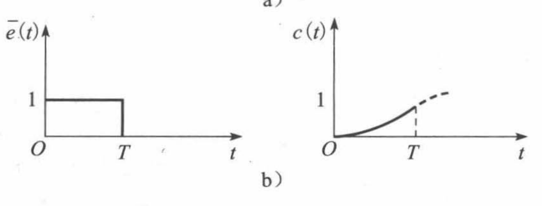


图 7-19　离散单位冲激响应

$$C(z)=c(1)z^{-1}+c(2)z^{-2}+\cdots \tag{7-33}$$

比较式(7-33)和式(7-30)会发现，一般地，有：

$$n-m=1 \tag{7-34}$$

对于物理系统，我们一般期望其脉冲传递函数分子的阶数比分母的阶数小 1。如果分子的阶数大于分母的阶数，控制对象将于输入作用之前出现响应，这当然在物理上是不可实现的，称此时的控制对象是非因果的。

7.8 伯德图

在连续时间系统的分析和设计中，伯德图是一种获取频率响应图的便利形式，该图是一种基于复数变量 jω 的直线近似[1,2]。离散时间系统在使用 w 域传递函数的前提下，也可以绘制采用直线近似的伯德图。为方便起见，我们用表 7-6 和图 7-20 概括给出一阶传递函数项的伯德图结构，其中不含复数零点和复数极点项，原因是它们不适合使用直线近似。

表 7-6 伯德图简表

1) 常数项 K。该常数项使对数幅值图向上或向下移动一个 $20\lg K$ 的幅度。
2) $j\omega_w$ 项或 $1/j\omega_w$ 项。$j\omega_w$ 项的对数幅值为 $20\lg\omega_w$，在幅频图中是一条斜率为 20dB/10 倍频程的直线，相角恒等于 90°；$1/j\omega_w$ 项的对数幅值为 $-20\lg\omega_w$，在幅频图中是一条斜率为 −20dB/10 倍频程的直线，相角恒等于 −90°。图 7-20 给出了上述两组伯德图。
3) $(1+j\omega_w\tau)$ 项和 $\left[\frac{1}{1+j\omega_w\tau}\right]$ 项。$(1+j\omega_w\tau)$ 项的对数幅值为 $20\lg\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$，在幅频图中，$\omega_w\tau\ll 1$ 时近似为 0(因为 $20\lg 1=0$)，$\omega_w\tau\gg 1$ 时近似为 $20\lg(\omega_w\tau)$，转折频率或截止频率为 $\omega_w=1/\tau$；相位等于 $\arctan(\omega_w\tau)$。对 $\left[\frac{1}{1+j\omega_w\tau}\right]$ 项的处理方法与对 $(1+j\omega_w\tau)$ 项的处理方法相同，这两项的伯德图如图 7-20 所示。

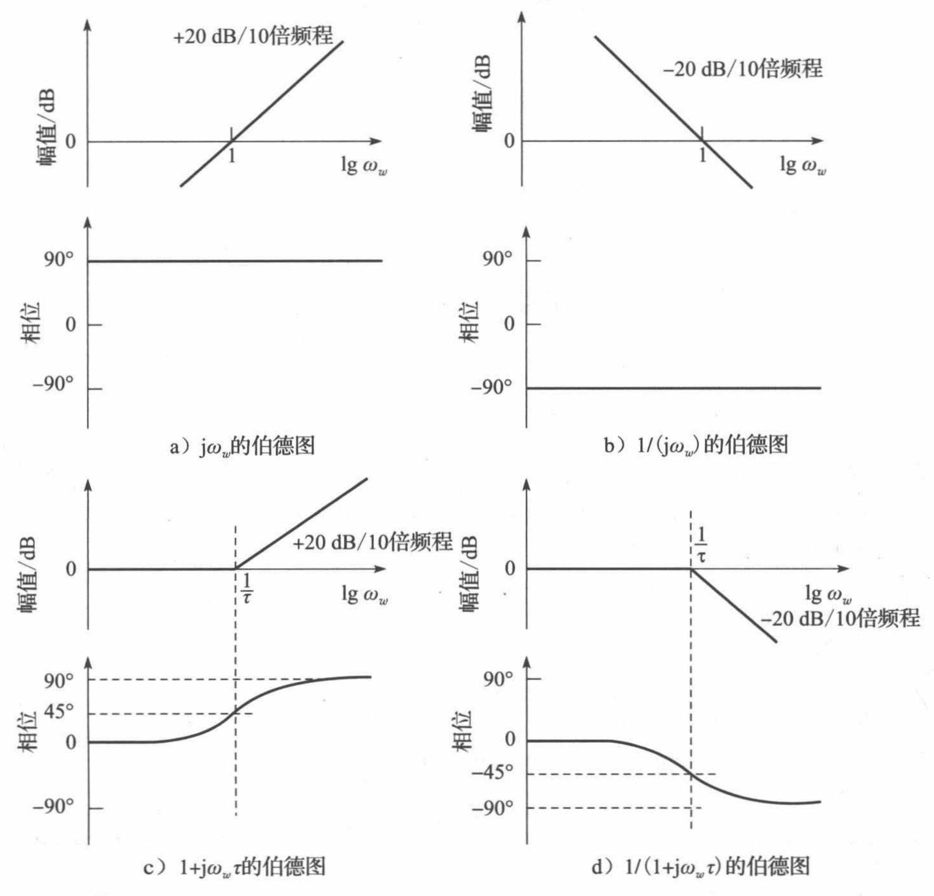


图 7-20 伯德图简图

下面我们用伯德图来分析一个熟悉的例子。

例 7.12 我们来看例 7.3 的系统，其开环传递函数为：

$$G(w)=-\frac{0.0381(w-2)(w+12.14)}{w(w+0.924)}$$

及

$$G(\mathrm{j}\omega_w) = -\frac{0.0381(\mathrm{j}\omega_w - 2)(\mathrm{j}\omega_w + 12.14)}{\mathrm{j}\omega_w(\mathrm{j}\omega_w + 0.924)} = \frac{-\left(\mathrm{j}\frac{\omega_w}{2} - 1\right)\left(\frac{\mathrm{j}\omega_w}{12.14} + 1\right)}{\mathrm{j}\omega_w\left(\frac{\mathrm{j}\omega_w}{0.924} + 1\right)}$$

注意，分子的转折频率为 $\omega_w=2$ 和 $\omega_w=12.14$ 分母的转折频率为 $\omega_w=0$ 和 $\omega_w=0.924$，因此，该系统使用直线近似的伯德图如图 7-21 所示，由此图可以得到该系统的幅值裕度和相位裕度。即在 1.32rad/s 处该系统的幅值裕度 7.58dB，在 0.772rad/s 处该系统的相位裕度 30.4°。

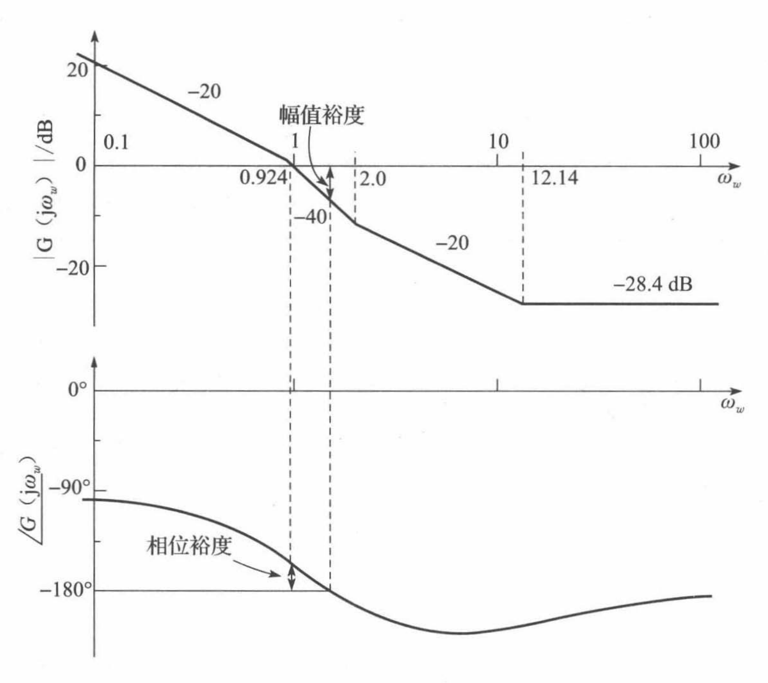


图 7-21　例 7.12 的伯德图

例 7.10 曾指出，增加增益 K 会使该系统变得不稳定，这一点也可以通过图 7-21 看出来。增益的增高会使整个幅值曲线向上提升。因此，如果使增益增加的量等于增益裕度，系统将临界稳定，绘制本例伯德图的 MATLAB 程序如下：

```
>>num = [-0.0381 -0.386 0.924];
den = [1 0.924 0];
Gw = tf(num,den);
bode(Gw), grid
```

也可以用如下 MATLAB 程序绘制出 $G(z)$ 的伯德图：

```
>> % G(s) for this example is given in Figure 6-2
num = [1]; den = [1 1 0]; Gs = tf(num,den); T=1;
Gz=c2d(Gs,T); %Assumes a zero-order hold
margin(Gz) %margin generates a Bode plot with the gain and phase margins
denoted.
```

◀

增益-相位图　一个系统频率响应的增益-相位图与伯德图给出相同的信息，绘制在不同的坐标系上。对于增益相位图来说，将增益和相位作为两个相互垂直的坐标轴，将频率作参数，频率响应绘于其中，因此，一个离散时间系统的频率响应可以绘制在增益-相位坐标系之中，也可以绘制在伯德图上。例 7.12 的增益-相位图如图 7-22 所示。人们称这种增益-相位图为称为尼科尔斯图，本章的稍后内容会涉及此类图的更多细节。

7.9 解释频率响应

在本章，已将频率响应这个术语与离散时间系统进行了关联。在已熟知连续时间系统频率响应物理含义的前提下，讨论离散时间系统频率响应的物理含义。

设离散时间系统的描述如下：

$$C(z)=G(z)E(z)$$

并设系统的输入是经采样的正弦波：

$$E(z)=\mathscr{Z}[\sin(\omega t)]=\frac{z\sin(\omega T)}{(z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})}$$

于是

$$\begin{aligned}C(z)&=\frac{G(z)z\sin(\omega T)}{(z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})}\\&=\frac{k_1z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}+\frac{k_2z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}+C_{\mathrm{g}}(z)\end{aligned}\tag{7-35}$$

式中：$C_{\mathrm{g}}(z)$是源于$G(z)$中极点的那些分量。

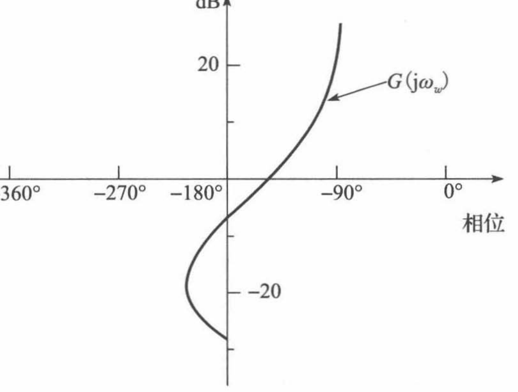


图 7-22 例 7.12 的增益-相位图

如果系统是稳定的，$c(nT)$的那些分量随时间的推移就会趋于 0，稳定系统的稳态响应可通过下式求得：

$$C_{\mathrm{ss}}(z)=\frac{k_1z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}+\frac{k_2z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}\tag{7-36}$$

根据式(7-35)，得：

$$k_1=\frac{G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\sin(\omega T)}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}=\frac{G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})}{2\mathrm{j}}$$

把上式中的$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$表示为：

$$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})=|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

将k_1写成：

$$k_1=\frac{G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{2\mathrm{j}}\tag{7-37}$$

由于k_2是k_1的复共轭，于是，

$$k_2=\frac{|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2(-\mathrm{j})}=\frac{-|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2\mathrm{j}}\tag{7-38}$$

根据式(7-36)、式(7-37)和式(7-38)，得：

$$\begin{aligned}c_{\mathrm{ss}}(kT)&=k_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})^k+k_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})^k=|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega kT+\theta)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega kT+\theta)}}{2\mathrm{j}}\\&=|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})|\sin(\omega kT+\theta)\end{aligned}\tag{7-39}$$

由此可以看出，一个稳定的离散时间系统在频率为 ω 的正弦波激励下，将获得同频率的正弦波响应，该响应的幅值等于输入幅值乘$|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})|$，相角等于输入相角加上$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$的角度，因此可知，$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$就是离散时间系统在采样瞬间的频率响应。

7.10 闭环系统的频率响应

本章所讨论的关于闭环系统稳定性的一些分析方法均是基于系统的开环频率响应的。系统的传递特性理当由闭环频率响应确定。下面，我们将控制系统的闭环频率响应与其开环频率响应进行图形上的关联。关联结果图将体现重要的概念，这在控制系统的设计中尤为如此；对于关系到系统稳定性的参数增益裕度和相位裕度来说，关联结果图将有助于说明它们的含义。不过，在我们希望得到闭环系统的频率响应的时候，不再使用图的方法，取而代之的是计算机软件。

我们来讨论图 7-23a 给出的离散时间系统，该系统的传递函数为：

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

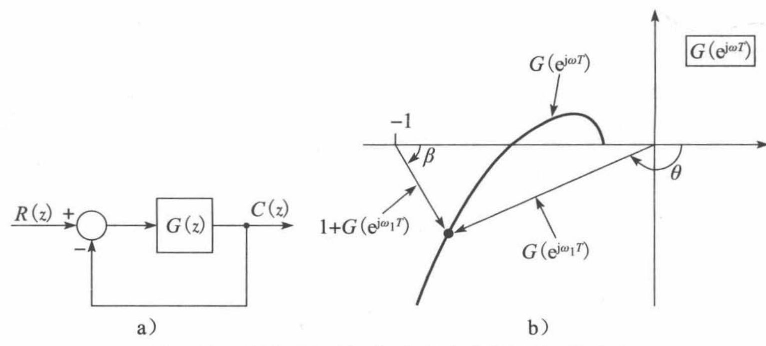


图 7-23 根据开环频率响应确定闭环频率响应

进而得闭环频率响应为：

$$\frac{C(e^{j\omega T})}{R(e^{j\omega T})}=\frac{G(e^{j\omega T})}{1+G(e^{j\omega T})} \tag{7-40}$$

设极坐标系下的 $G(e^{j\omega T})$ 如图 7-23b 所示。式(7-40)中的分子、分母表示为频率 $\omega=\omega_1$ 时的向量，而在 ω_1 处的频率响应则是这两个向量之比，记为：

$$\frac{C(e^{j\omega_1 T})}{R(e^{j\omega_1 T})}=\frac{|G(e^{j\omega_1 T})|e^{j\theta}}{|1+G(e^{j\omega_1 T})|e^{j\beta}}=Me^{j(\theta-\beta)}=Me^{j\phi} \tag{7-41}$$

恒定 M 圆 在 $G(e^{j\omega T})$ 平面，称闭环频率响应在幅值 M 为恒定值条件下的轨迹线为恒定幅值轨迹，或称为恒定 M 圆。为了证实这些轨迹的确是一些圆，令

$$G(e^{j\omega T})=X+jY \tag{7-42}$$

根据式(7-40)和式(7-41)，得：

$$M^2=\frac{X^2+Y^2}{(1+X)^2+Y^2}$$

于是有：

$$X^2(1-M^2)-2M^2X-M^2+(1-M^2)Y^2=0 \tag{7-43}$$

$M\neq 1$ 时，将上述关系式表示为：

$$\left[X+\frac{M^2}{M^2-1}\right]^2+Y^2=\frac{M^2}{(M^2-1)^2} \tag{7-44}$$

这是一个圆的关系式，圆的半径为 $|M/(M^2-1)|$，圆心位于 $X=-M^2/(M^2-1)$，$Y=0$ 处。$M=1$时，由式(7-43)算得 $X=-1/2$，这是一条直线。图 7-24 所示的是这种恒定 M 圆的示意图。

恒定 N 圆 相位恒定下的轨迹线也是一些圆。据式(7-41)和式(7-42)，有：

$$\phi=\theta-\beta=\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)-\arctan\left(\frac{Y}{1+X}\right)$$

令 $N=\tan\phi$，得：

$$N=\tan(\theta-\beta)=\frac{\tan\theta-\tan\beta}{1+\tan\theta\tan\beta}=\frac{\dfrac{Y}{X}-\dfrac{Y}{1+X}}{1+\dfrac{Y}{X}\left[\dfrac{Y}{1+X}\right]}$$

于是有：

$$X^2+X+Y^2-\frac{1}{N}Y=0$$

可以将上述方程表示为：

图 7-24　恒定增益圆

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2N}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2N}\right)^2 \tag{7-45}$$

这也是一个圆的关系式，其半径为 $\sqrt{1/4+(1/(2N))^2}$，圆心在 $X=-1/2$，$Y=1/(2N)$ 处。图 7-25 所示的是这种恒定 N(相角)圆。请注意，图 7-24 和图 7-25 中 -1 点区域的精准度很有限，为此，经常使用的是尼科尔斯图，而非恒定 M 圆和恒定 N 圆。下面介绍尼科尔斯图。

尼科尔斯图　在 7.8 节，我们给出了增益-相角平面，并证明这个平面有助于用图形的方式展示系统的频率响应。例如，图 7-23 所示极坐标下的开环频率响应 $G(e^{j\omega T})$ 也可以绘于增益-相位平面上，如图 7-22 所示。又例如，图 7-24 所示的闭环恒定 M 圆和图 7-25 所示的恒定 N 圆也可以绘于增益-相角平面上，这种图称为尼科尔斯图[6]，通常用来将开环频率响应和闭环频率响应关联起来。图 7-26 给出了尼科尔斯图。

频率响应 $G(e^{j\omega T})$ 通常借助计算机程序获得，这时，一个得出闭环频率响应的合乎逻辑的做法是在程序中再同时添加一些语句，而不再使用上述介绍的图形方法。相比人工方法，计算机程序是更准确、更省时的，并且不仅限于图 7-23a 所示系统。然而，如前所述，恒定 M 圆、恒定 N 圆，及尼科尔斯图特别有助于理解开环频率响应的变化对闭环频率响应的影响。下面来看一个求闭环频率响应的例子。

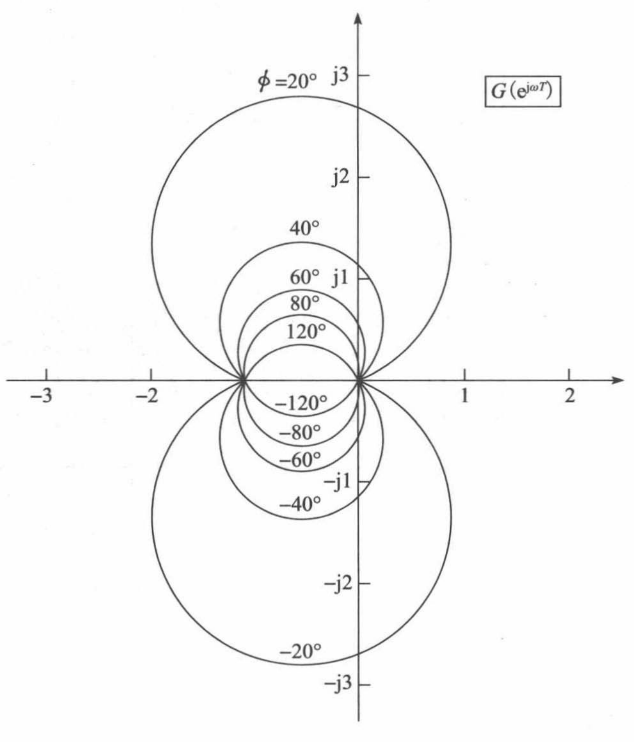


图 7-25　恒定相位圆



图 7-26 尼科尔斯图

例 7.13 我们来看例 6.4 系统，其开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

首先，用 MATLAB 程序得出该系统的尼科尔斯图如图 7-27 所示。

```
>> num = [1]; den = [1 1 0]; Gp = tf(num,den); T = 1;
Gz=c2d(Gp,T); nichols(Gz), grid
```

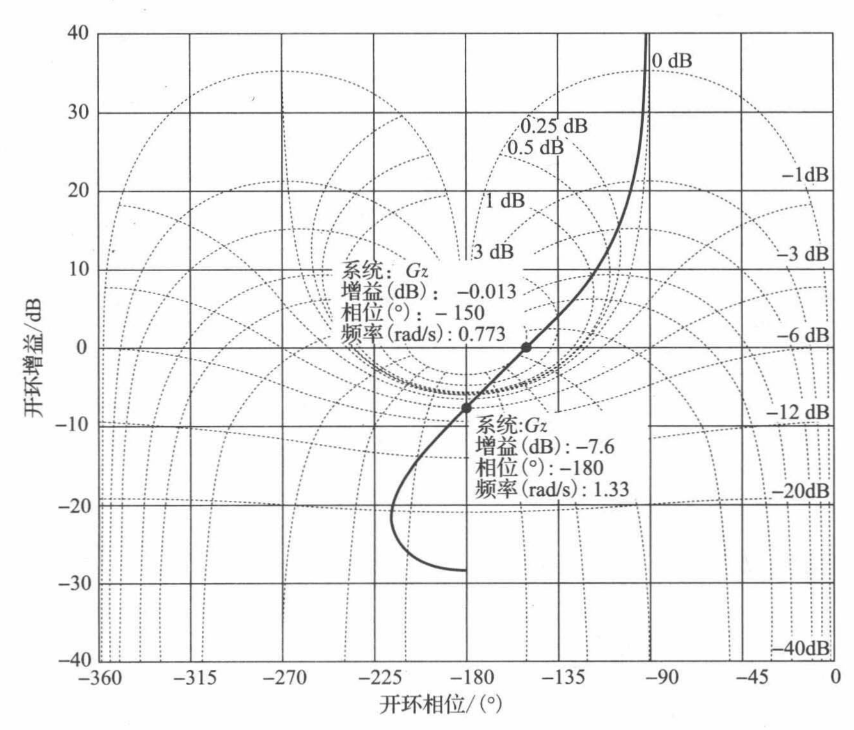


图 7-27 例 7.13 的尼科尔斯图

请注意，图中对幅值裕度和相位裕度进行了标记，分别是 7.6dB 和 30°。

接下来，我们来对比 $T=1\mathrm{s}$ 及 $T=0.1\mathrm{s}$ 下的两个闭环频率响应。同时得到该闭环频率响应和阶跃响应的 MATLAB 程序如下：

```
>> num = [1]; den = [1 1 0]; Gp = tf(num,den);
T1 = 1; Gz1=c2d(Gp,T1); [Gm1,Pm1] = margin(Gz1);
Cz1 = feedback(Gz1,1);
T2 = 0.1; Gz2 = c2d(Gp,T2); [Gm2,Pm2] = margin(Gz2);
Cz2 = feedback(Gz2,1);
%Plot the closed-loop frequency response
figure(1), bode(Cz1,'--k',Cz2,'-k'), axis([0.25 2.5 -225 10]), grid
%Plot the step response
figure(2), step(Cz1,'--k',Cz2,'-k'), axis([0 20 0 1.5]), grid
%List the step response and margin parameters
StepT1=stepinfo(Cz1),Pm1,Gm1=20*log10(Gm1)%Convert to dB
StepT2=stepinfo(Cz2),Pm2,Gm2=20*log10(Gm2)%Convert to dB
```

图 7-28 给出了此程序绘制的频率响应，阶跃响应如图 7-29 所示。我们发现，$T=1\mathrm{s}$ 时的频率响应在 0.87rad/s 处出现了 6.06dB 的峰值，而 $T=0.1\mathrm{s}$ 时，这个峰值降为 1.56dB，出现在 0.74rad/s 处。一般来讲，这种出现在频率响应中的谐振越明显，其阶跃响应的超调越严重。如图 7-28 所示，$T=1\mathrm{s}$ 时的超调达到 40%，而 $T=0.1\mathrm{s}$ 时，超调降到 18%。

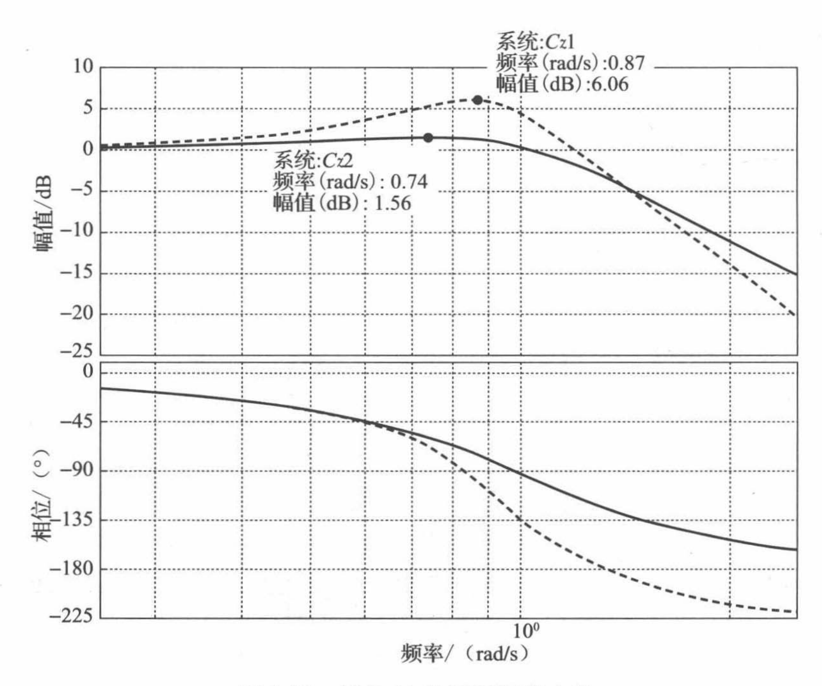


图 7-28　例 7.13 的闭环频率响应

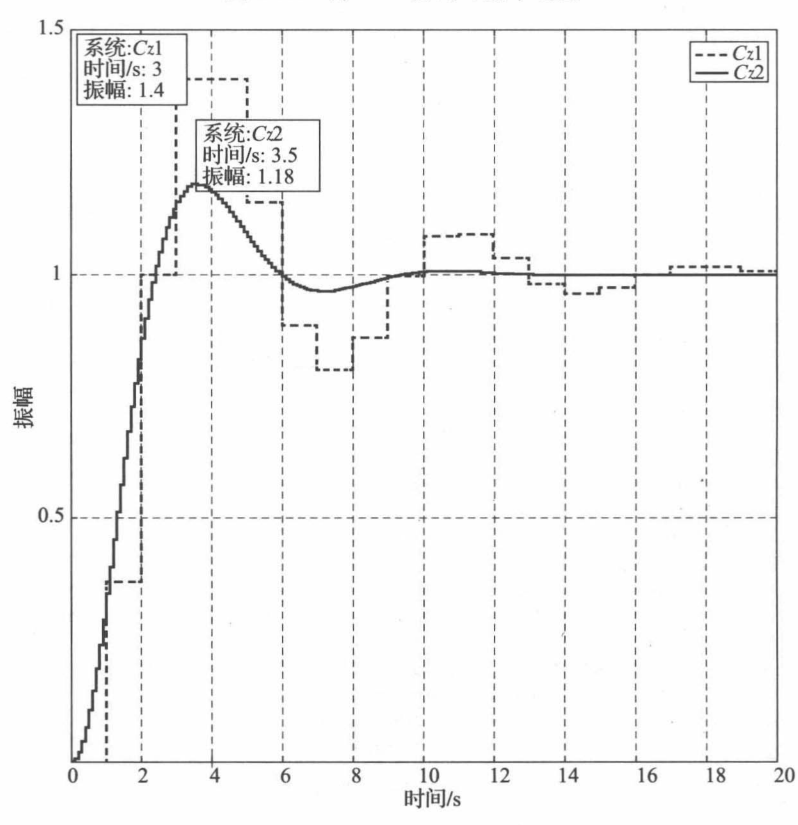
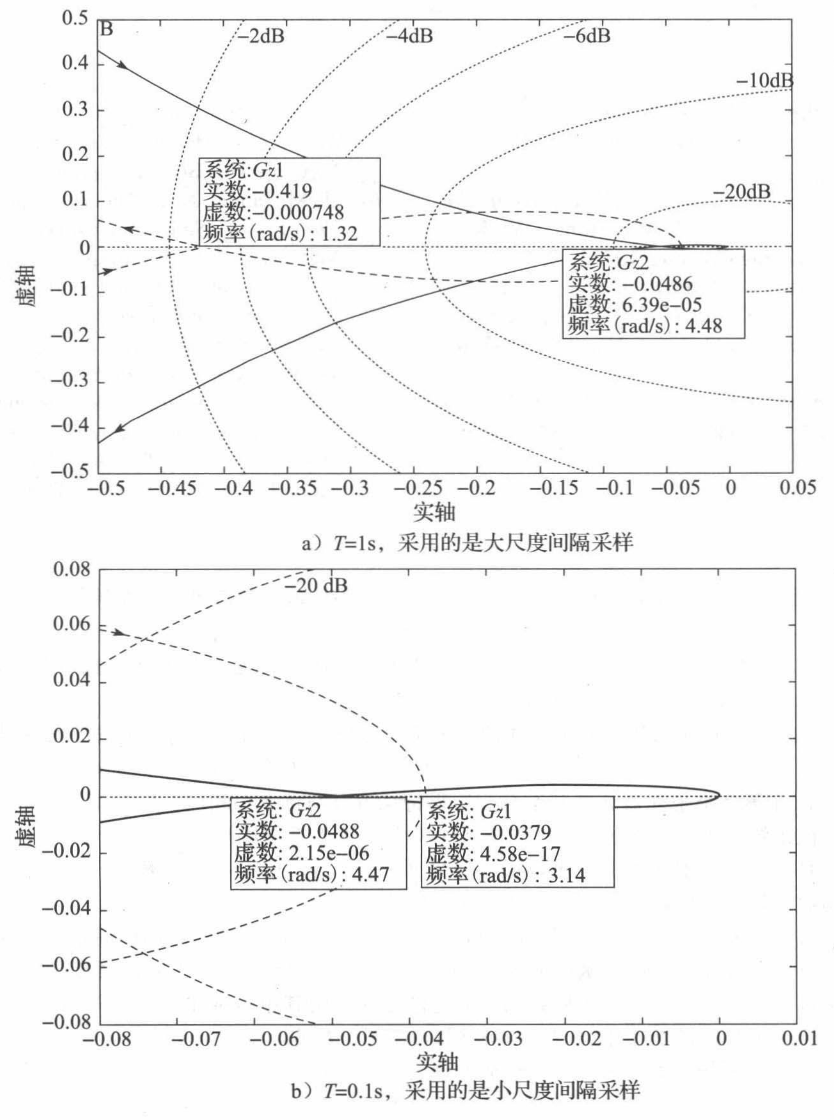


图 7-29　例 7.13 的阶跃响应

闭环频率响应中出现的谐振也可以关联到系统的稳定性，来看图 7-23a 所示系统，其闭环传递函数的分母是从−1 点到奈奎斯特图的距离，如图 7-23b 所示。如果系统的稳定裕度比较小，则其奈奎斯特图就比较接近−1 点，闭环传递函数分母所导致的闭环系统振

荡明显变小。如下是绘制本例系统奈奎斯特图的 MATLAB 程序：

```
>> num = [1]; den = [1 1 0]; Gs = tf(num,den);
T1 = 1; Gz1 = c2d(Gs,T1);
T2 = 0.1; Gz2 = c2d(Gs,T2);
figure(1),nyquist(Gz1,Gz2), axis([-0.5 0.05 -0.5 0.5]), grid
figure(2),nyquist(Gz1,Gz2), axis([-0.08 0.01 -0.08 0.08]), grid
```



a）T=1s，采用的是大尺度间隔采样

b）T=0.1s，采用的是小尺度间隔采样

图 7-30 例 7.13 的奈奎斯特图

根据所得奈奎斯特图(见图 7-30)可知，$T=0.1\text{s}$ 时，曲线与负轴的交叉点为 -0.0488，因此增益裕度 $20\lg(1/0.0488)=26.2\text{dB}$；$T=1\text{s}$ 时，曲线与负轴的交叉点为 -0.418，增益裕度 $20\lg(1/0.418)=7.58\text{dB}$，所得结果与本章早些时候所得结果一致。关于系统的闭环频率响应与时间响应之间关系的研究安排在第 8 章。◀

总之，据恒定 M 圆(见图 7-24)和尼科尔斯图(见图 7-26)可知，仅当系统的开环频率响应曲线接近 -1 时，方会在其闭环频率响应曲线中出现峰值，因此任何在其频率响应中出现谐振的系统，稳定裕度也不大。反之，对于任何稳定裕度不大的系统，其时间响应将展现出明显的振荡。

7.11 小结

本章介绍了一些分析离散时间闭环系统稳定性的方法，我们发现许多用于连续时间系统的方法也可用于离散时间系统。我们列举了一些例子，有些例子针对同一系统贯穿本章的不同内容，使用相同的分析路线和基准，对比本章介绍的多种稳定性分析方法，这些方法将进一步用于第 8 章的系统设计中。

参考文献

[1] C. L. Phillips and J. Parr, *Feedback Control Systems,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[2] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1973.

[3] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems,* 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[4] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems,* 12th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2010.

[5] C. R. Wylie and L.C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics,* 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1995.

[6] H. M. James, N. B. Nichols, and R. S. Phillips, *Theory of Servomechanisms.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1947.

[7] J. A. Cadzow and H. R. Martens, *Discrete-Time and Computer Control Systems.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1970.

[8] W. R. Evans, *Control System Dynamics.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.

[9] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems,* 3d ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

习题

7.2-1 控制系统如图 7-1 所示，我们仍认为p_1是该系统闭环传递函数的极点，系统特征方程为：

$$(z-p_1)^r(z-p_{r+1})(z-p_{r+2})\cdots(z-p_n)=0$$

其中，r 为整数。试证明：该系统的稳定性要求是其闭环传递函数的所有极点幅值均小于 1，即 $|p_i|<1$，$i=1$，$r+1$，$r+2$，…，n。

7.2-2 例 7.1 和图 7-3 所示系统有两个采样器，例 7.1 给出了该系统特征方程的如下推导结果：

$$1+G_1(z)G_2(z)+\overline{G_2H}(z)=0$$

证明：改在第 2 个采样器处断开系统，所得特征方程与例 7.1 相同。

7.2-3 (1) 离散系统的单位阶跃响应 $c(t)$是输入 $r(k)=1$ 下的系统响应 $c(k)$，$k\geqslant 0$。证明：如果离散系统是稳定的，则其单位阶跃响应 $c(k)$当 $k\to+\infty$时，接近一个常数[令 $T(z)$为闭环系统传递函数，设 $T(z)$的极点各不相同(没有重复极点)]。

(2) 要求当 $k\to+\infty$时，系统的阶跃响应趋于 0，求闭环传递函数 $T(z)$应满足的条件。

(3) 设离散系统在单位冲击函数输入 $r(k)$($k=0$ 时，$r(k)=1$；$k\geqslant 1$ 时，$r(k)=0$。)的作用下得到单位冲击响应。证明：如果离散系统是稳定的，则其单位冲击响应趋于 0[令 $T(z)$为闭环系统传递函数，设 $T(z)$的极点各不相同(没有重复极点)]。

7.2-4 设某数据采样系统，其 $T=0.5\text{s}$，特征方程为：

$$(z-0.9)(z-0.8)(z^2-1.9z+1.0)=0$$

(1) 求系统固有的响应项；

(2) 离散 TLI 系统有稳定、不稳定、临界稳定这三种类型，请判断本系统属于哪种类型。

(3) 本系统固有响应项中含有一个非衰减的正弦响应项：$A\text{con}(\omega kT+\theta)$。求其频率 ω。

7.2-5 在图 P7.2-5 给出的系统中，$T=1\text{s}$，设数字控制器实行比例控制，即 $D(z)=K$，使 $m(kT)=Ke(kT)$。

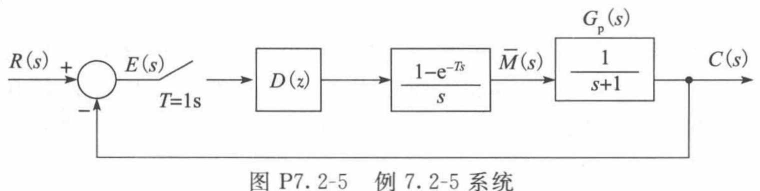


图 P7.2-5 例 7.2-5 系统

(1) 写出该闭环系统的特征方程；
(2) 求系统稳定下的 K 的取值范围；
(3) 设 K 取(2)问给出的稳定范围的下限值，以使系统处于临界稳定状态。请找出此时系统固有的那个临界稳定项；
(4) 设 K 取(2)问给出的稳定范围的上限值，再实现(3)问的要求。

7.2-6 在图 P7.2-5 给出的系统中，设数字控制器实行比例控制，即 $D(z)=K$，使 $m(kT)=Ke(kT)$。
(1) 写出该闭环系统的特征方程，该特征方程是采样周期 T 的函数；
(2) 在采样周期分别取 $T=1\text{s}$、$T=0.1\text{s}$ 和 $T=0.01\text{s}$ 的前提下，确定使系统稳定的 K 的范围 ($K>0$)；
(3) 设将系统中各采样器移除，且 $G_p(s)=K/(s+1)$，找出使该模拟系统稳定的 K 的范围 ($K>0$)；
(4) 对(2)问和(3)问分别给出的 K 的范围进行对比分析，指出降低采样周期对系统稳定性带来的影响。

7.3-1 下式为通常被人们采纳的双线性变换，其中 a 为非零实数：

$$z=\frac{1+aw}{1-aw}$$

(1) 证明：上式将 z 平面的稳定域的界变换为 w 平面的虚轴；
(2) 求 s 域频率与 w 域频率之间的关系；
(3) 分别设 $a>0$ 和 $a<0$，求系统在 w 平面上的稳定区域。

7.5-1 设离散系统的特征方程如下：
① $z^2-1.1z+0.3=0$
② $z^2-z+0.25=0$
③ $z^2-0.1z-0.3=0$
④ $z^2-0.25=0$
⑤ $z^2-1.6z+1=0$
⑥ $z^2-2.0z+0.99=0$
⑦ $z^3-2.2z^2+1.55z-0.35=0$
⑧ $z^3-1.9z^2+1.4z-0.45=0$
(1) 通过朱里测试，确定上述各系统的稳定性；
(2) 列出上述各系统的固有响应项；
(3) 对(1)问判定的那些不稳定的系统和临界稳定的系统，列出导致不稳定或临界稳定的系统固有响应项。

7.5-2 在图 P7.2-5 给出的系统中，$T=1\text{s}$，设数字控制器实行比例控制，即 $D(z)=K$，使 $m(kT)=Ke(kT)$。
(1) 写出该闭环系统的特征方程；
(2) 用劳斯-赫尔维茨准则确定系统稳定下的 K 的取值范围；
(3) 用朱里测试核实(2)问的结果；
(4) 设 $K>0$ 且系统临界稳定，求特征方程的各根在 w 平面和 z 平面的位置；
(5) 设 $K>0$ 且系统临界稳定，求系统在 s 域的振荡频率；
(6) 设将系统中各采样器移除，且 $G_p(s)=K/(s+1)$，找出使该模拟系统稳定的 K 的范围；
(7) 对(2)问和(6)问分别给出的 K 的范围进行对比分析，指出在模拟系统中加入采样器之后对系统稳定性带来的影响。

7.5-3 温度控制系统如图 P7.5-3 所示。该系统在习题 1.6-1 已有涉足，那时，我们忽略了干扰输入、令 $T=0.6\text{s}$、数字控制器是一个可变的增益 K，即 $D(z)=K$，使 $m(kT)=Ke(kT)$，其中，$e(t)$ 是采样器的输入，习题 6.2-4 指出：

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\,\frac{2}{s+0.5}\right]=\frac{1.037}{z-0.7408}$$

(1) 写出该闭环系统的特征方程；
(2) 用劳斯-赫尔维茨准则确定系统稳定下的 K 的取值范围；
(3) 用朱里测试核实(2)问的结果；
(4) 设 $T=0.06\text{s}$，求系统稳定下的 K 的取值范围；

(5) 对(2)问和(4)问分别给出的 K 的范围进行对比分析，指出在模拟系统中加入采样器之后对系统稳定性带来的影响。

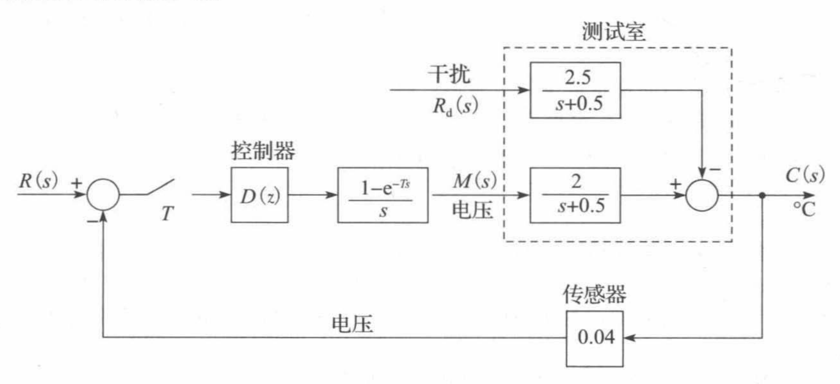


图 P7.5-3　测试室温度控制系统

7.5-4　机器人手臂关节控制系统如图 P7.5-4 所示。该系统在习题 1.5−4 已有涉足，那时，我们令 $T=0.1\text{s}$、$D(z)=1$，习题 6-7 指出：

$$\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\ \frac{4}{s(s+2)}\right]=\frac{0.018\,73z+0.017\,52}{(z-1)(z-0.8187)}$$

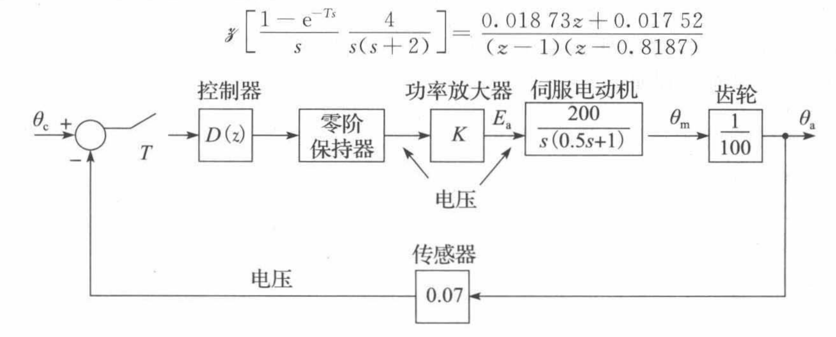


图 P7.5-4　机器人手臂关节控制系统

(1) 写出该闭环系统的特征方程；

(2) 用劳斯-赫尔维茨准则确定系统稳定下的 K 的取值范围；

(3) 用朱里测试核实(2)问的结果；

(4) 设 $K>0$ 且系统临界稳定，求特征方程的各根在 w 平面和 z 平面的位置；

(5) 设系统临界稳定，用(4)问的结果确定此时系统的 s 域振荡频率和 w 域振荡频率；

(6) 证明：(5)问给出的两个频率满足式(7-10)。

7.5-5　天线控制系统如图 P7.5-5 所示。该系统在习题 1.5-1 已有涉足，那时，我们令 $T=0.05\text{s}$、$D(z)=1$，习题 5.3-15 指出：

$$\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\ \frac{20}{s(s+6)}\right]=\frac{0.022\,68z+0.020\,52}{(z-1)(z-0.7408)}$$

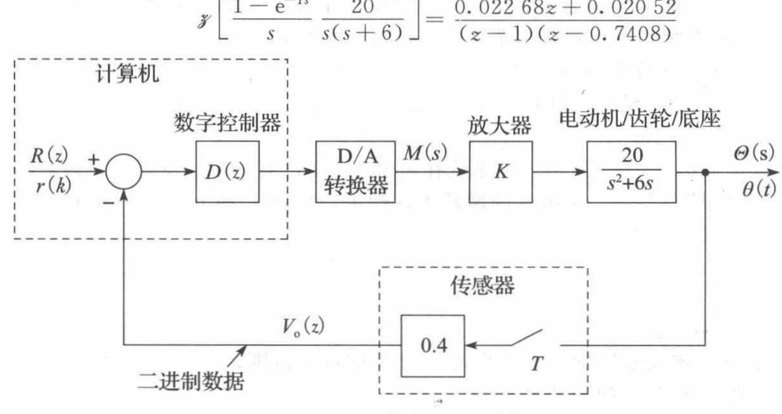


图 P7.5-5　天线控制系统框图

(1) 写出该闭环系统的特征方程；
(2) 用劳斯-赫尔维茨准则确定系统稳定下的 K 的取值范围；
(3) 用朱里测试核实(2)问的结果；
(4) 设 $K>0$ 且系统临界稳定，求特征方程的各根在 w 平面和 z 平面的位置；
(5) 设系统临界稳定，用(4)问的结果确定此时系统的 s 域振荡频率和 w 域振荡频率；
(6) 证明：(5)问给出的两个频率满足式(7-10)。

7.5-6 卫星控制系统如图 P7.5-6 所示。该系统在习题 1.4-1 已有涉足，那时，我们令 $T=0.1\text{s}$、$J=0.1$、$H_k=0.02$、$D(z)=1$，查 Z 变换表有：

$$\mathscr{Z}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\frac{10}{s^2}\right]=\frac{0.05(z+1)}{(z-1)^2}$$

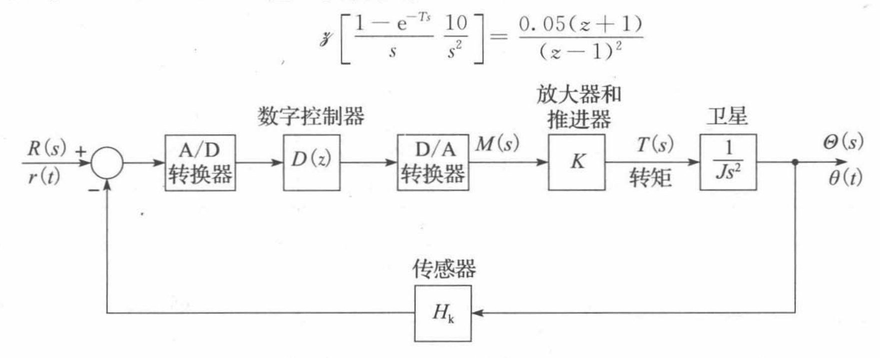


图 P7.5-6　卫星控制系统框图

(1) 写出该闭环系统的特征方程；
(2) 用劳斯-赫尔维茨准则证明：不论 K 为何值，该系统均不稳定；
(3) 用朱里测试核实(2)问的结果。

7.5-7 在 P7.5-7 所示系统中，$T=2\text{s}$，开环传递函数为：

$$G(z)=\frac{K(z+0.8)}{(z-1)(z-0.6)}$$

(1) 用劳斯-赫尔维茨准则确定系统稳定下，K 的取值范围；
(2) 用朱里测试确定系统稳定下，K 的取值范围；
(3) 证明：当 K 取(1)问的稳定性上限时，系统临界稳定；
(4) 证明：当 K 取(2)问的稳定性上限时，系统临界稳定。

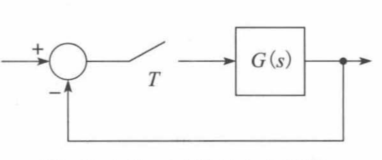


图 P7.5-7　习题 7.5-7 系统

7.6-1 对于习题 7.2-5 用到的图 P7.2-5 所示系统：
(1) 在 z 平面绘制根轨迹；
(2) 在 w 平面绘制根轨迹；
(3) 用(1)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围；
(4) 用(2)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围。

7.6-2 对于习题 7.5-3 用到的图 P7.5-3 所示测试室温度控制系统：
(1) 在 z 平面绘制根轨迹；
(2) 在 w 平面绘制根轨迹；
(3) 用(1)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围；
(4) 用(2)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围。

7.6-3 对于习题 7.5-4 用到的图 P7.5-4 所示机器人手臂关节控制系统：
(1) 在 z 平面绘制根轨迹；
(2) 在 w 平面绘制根轨迹；
(3) 用(1)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围；
(4) 用(2)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围。

7.6-4 对于习题 7.5-6 用到的图 P7.5-6 所示卫星控制系统：
(1) 在 z 平面绘制根轨迹；
(2) 在 w 平面绘制根轨迹；
(3) 用(1)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围；
(4) 用(2)问的结果确定系统稳定下，K 的取值范围。

7.7-1 对于习题 7.5-4 用到的图 P7.5-4 所示机器人手臂关节控制系统，令 $K=1$。

(1) 用计算机程序计算 $G(z)$ 的频率响应，得到表 P7.7-1 所示结果，大致画出环路传递函数 $G(z)H_k$ 的奈奎斯特图，其中，$H_k=0.07\to-23.1\text{dB}$；

表 P7.7-1 习题 7.7-1 的频率响应

ω_w	ω	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$ /dB	$\angle G(j\omega_w)$
0.1	0.100	19.975 13	26.00	−93.14
0.2	0.200	9.950 54	19.95	−96.28
0.3	0.300	6.593 17	16.38	−99.38
0.4	0.399	4.903 25	13.80	−102.45
0.5	0.499	3.881 02	11.77	−105.46
0.6	0.599	3.193 31	10.08	−108.41
0.7	0.699	2.697 41	8.61	−111.28
0.8	0.799	2.321 98	7.31	−114.08
0.9	0.899	2.027 41	6.13	−116.78
1.0	0.999	1.789 90	5.05	−119.40
2.0	1.993	0.709 45	−2.98	−140.61
3.0	2.977	0.373 08	−8.56	−154.64
4.0	3.947	0.227 43	−12.86	−164.43
5.0	4.899	0.152 70	−16.32	−171.82
6.0	5.829	0.109 73	−19.19	−177.74
7.0	6.733	0.082 91	−21.62	−182.72
8.0	7.610	0.065 11	−23.72	−187.04
9.0	8.457	0.052 70	−25.56	−190.88
10.0	9.273	0.043 72	−27.18	−194.33
20.0	15.708	0.014 03	−37.05	−217.40
30.0	19.656	0.007 98	−41.96	−229.64
40.0	22.143	0.005 58	−45.07	−236.77

(2) 确定系统的稳定性；

(3) 如果系统是稳定的，请确定其增益裕度和相位裕度；如果系统不稳定，求相位裕度等于 45° 时的增益 K 值；

(4) 根据奈奎斯特图，确定系统临界稳定时 K 的取值，$K>0$；

(5) 用频率响应求系统临界稳定时的振荡频率 ω。

7.7-2 对于习题 7.5-5 用到的图 P7.5-5 所示天线控制系统，令 $K=1$。

(1) 用计算机程序计算 $G(z)$ 的频率响应，得到表 P7.7-2 所示结果，大致画出环路传递函数 $G(z)H_k$ 的奈奎斯特图，其中，$H_k=0.047\to-7.96\text{dB}$；

表 P7.7-2 习题 7.7-2 的频率响应

ω_w	ω	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$ /dB	$\angle G(j\omega_w)$
0.1	0.100	33.328 74	30.4564	−91.09
0.2	0.200	16.657 48	24.4321	−92.19
0.3	0.300	11.097 35	20.9042	−93.29
0.4	0.400	8.315 02	18.3970	−94.38
0.5	0.500	6.643 81	16.4479	−95.47
0.6	0.600	5.528 19	14.8510	−96.56

（续）

ω_w	ω	$\|G(j\omega_w)\|$	$\|G(j\omega_w)\|$/dB	$\angle G(j\omega_w)$
0.7	0.699	4.730 07	13.4965	−97.65
0.8	0.799	4.130 40	12.3187	−98.73
0.9	0.899	3.663 05	11.2754	−99.81
1.0	0.999	3.288 34	10.3377	−100.89
2.0	1.998	1.581 93	3.9759	−111.28
3.0	2.994	0.995 11	−0.0619	−120.81
4.0	3.986	0.695 24	−3.1949	−129.31
5.0	4.974	0.514 56	−5.8345	−136.78
6.0	5.955	0.395 76	−8.1482	−143.31
7.0	6.929	0.313 27	−10.2199	−149.03
8.0	7.895	0.253 75	−12.0995	−154.07
9.0	8.852	0.209 51	−13.8203	−158.54
10.0	9.799	0.175 82	−15.4069	−162.54
20.0	18.546	0.053 20	−26.7969	−188.55
30.0	25.740	0.027 06	−34.2817	−203.49
40.0	31.416	0.017 38	−40.4880	−213.67

(2) 确定系统的稳定性；

(3) 如果系统是稳定的，请确定其增益裕度和相位裕度，如果系统不稳定，求相位裕度等于45°时的增益 K 值；

(4) 根据奈奎斯特图，确定系统临界稳定时 K 的取值，$K>0$；

(5) 用频率响应求系统临界稳定时的振荡频率 ω。

7.7-3 对于习题7.5-6用到的卫星控制系统，用计算机程序计算 $G(z)$ 的频率响应，得到表P7.7-3所示结果。

(1) 大致画出环路传递函数 $G(z)H$ 的奈奎斯特图，其中，$H=0.02\rightarrow-34.0\text{dB}$；

(2) 用(1)问的结果确定系统的稳定下的 K 的取值范围。

表 P7.7-3 习题7.7-3的频率响应

ω_w	ω	$\|G(j\omega_w)\|$	$\|G(j\omega_w)\|$/dB	$\angle G(j\omega_w)$
0.1	0.100	1 000.012 00	60.00	−180.28
0.2	0.200	250.012 50	47.95	−180.57
0.3	0.300	111.123 60	40.91	−180.85
0.4	0.399	62.512 49	35.91	−181.14
0.5	0.499	40.012 49	32.04	−181.43
0.6	0.599	27.790 27	28.87	−181.71
0.7	0.699	20.420 65	26.20	−182.00
0.8	0.799	15.637 49	23.88	−182.29
0.9	0.899	12.358 17	21.83	−182.57
1.0	0.999	10.012 49	20.01	−182.86
2.0	1.993	2.512 47	8.00	−185.71
3.0	2.977	1.123 54	1.01	−188.53
4.0	3.947	0.637 38	−3.91	−191.30
5.0	4.899	0.412 31	−7.69	−194.03
6.0	5.829	0.290 01	−10.75	−196.69

（续）

ω_w	ω	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$ /dB	$\angle G(j\omega_w)$
7.0	6.733	0.216 22	−13.30	−199.29
8.0	7.610	0.168 29	−15.47	−201.80
9.0	8.457	0.135 38	−17.36	−204.22
10.0	9.273	0.111 80	−19.03	−206.56
20.0	15.708	0.035 36	−29.03	−225.00
30.0	19.656	0.020 03	−33.96	−236.30
40.0	22.143	0.013 98	−37.09	−243.43

7.8-1 对于习题 7.5-5 用到的图 P7.5-5 所示天线控制系统：

(1) 在 z 平面画出该系统的根轨迹；

(2) 在 w 平面画出该系统的根轨迹；

(3) 用(1)问的结果求系统稳定下 K 的取值范围的；

(4) 用(2)问的结果求系统稳定下 K 的取值范围的。

7.8-2 对于习题 7.5-5 用到的图 P7.5-5 所示系统，令 $K=1$。

(1) 确定该系统的稳定性；

(2) 勾勒出伯德图，再由伯德图勾勒出奈奎斯特图；

(3) 如果系统是稳定的，请确定其增益裕度和相位裕度，如果系统不稳定，求相位裕度等于 45°时的增益 K 值；

(4) 根据奈奎斯特图，确定系统临界稳定时 K 的取值，$K>0$；

(5) 用频率响应求系统临界稳定时的振荡频率 ω。

7.8-3 对于习题 7.5-3 用到的图 P7.5-3 所示温度控制系统，令 $K=1$。

(1) 确定该系统的稳定性；

(2) 勾勒出伯德图，再由伯德图勾勒出奈奎斯特图；

(3) 如果系统是稳定的，请确定其增益裕度和相位裕度，如果系统不稳定，求相位裕度等于 45°时的增益 K 值；

(4) 根据奈奎斯特图，确定系统临界稳定时 K 的取值，$K>0$；

(5) 用频率响应求系统临界稳定时的振荡频率 ω。

7.9-1 已知控制对象的脉冲传递函数 $G(z)$，$w=2\text{rad/s}$ 时，$G(e^{j\omega T})=1.3\angle(-25°)$，若控制对象前端的采样器/信号保持器接收到输入信号 $5\cos(2t)$，求控制对象的稳态采样输出。

7.10-1 对于如下系统，绘制尼科尔斯图和闭环频率响应。如果系统是稳定的，求其增益裕度、相位裕度、闭环频率响应的峰值及系统频带宽度。

(1) 习题 7.2-5 的系统，其中 $K=1$；

(2) 习题 7.5-3 的温度控制系统，其中 $K=1$；

(3) 习题 7.5-4 的机器人手臂关节控制系统，其中 $K=0.5$；

(4) 习题 7.5-5 的天线控制系统，其中 $K=1$；

(5) 习题 7.5-6 的卫星控制系统，其中 $K=0.5$；

(6) 习题 7.5-7 的系统，其中 $K=0.5$。

7.10-2 对于习题 7.5-5 天线控制系统，利用 MATLAB 程序：

(1) 求系统稳定下 K 的取值范围(通过轨迹)；

(2) 求系统临界阻尼下 K 的取值范围(通过轨迹)；

(3) 求系统临界阻尼下的增益裕度和相位裕度(通过轨迹)；

(4) 求系统阶跃参数：上升时间、下沉时间和超调(%)(逐步计算)；

(5) 求频率响应的峰值及频带宽度；

(6) 以图形方式显示根轨迹、伯德图、奈奎斯特图、尼科尔斯图、阶跃响应和闭环频率响应。

第8章

数字控制器设计

8.1 引言

在前面的章节中，我们主要讨论的是控制系统的分析问题。我们设控制系统已知，通过分析来确定其稳定性、稳定裕度、时间响应及频率响应等。其间，也涉及了一些简单的设计问题，例如，为满足某个特定的稳态误差需求来确定增益。

本章我们将探讨系统的设计问题，即如何设计出一个数字控制器的传递函数(即差分方程)，以满足给定系统所需的技术指标。为此，我们会讨论频率响应和根轨迹的经典设计方法。首先讨论相位滞后和相位超前控制器的设计；然后介绍控制器的一种特殊类型：滞后超前控制器，也称比例+积分+微分(PID)控制器；最后介绍基于根轨迹的设计方法。再就是基于控制对象状态变量模型的设计方法，我们安排在第9章和第11章介绍。

有一点需要说明，就是这里谈到的各种设计方法，均建立在物理系统精确模型的基础之上。因此，数值设计仅仅能够对物理系统进行实验，即仅仅能够对包括系统非线性、时变成分等在内的物理系统进行了准确仿真的系统进行实验。如果在控制器优化设计时使用精准的仿真模型(有时也称真实模型)，一般会使设计问题过于复杂。数值设计方法最终给出的控制器形式及参数是在给定设计初值的基础上历经多轮迭代、再对物理系统和精准仿真系统进行测试之后形成的，因此，从某种意义上讲，任何一种数值设计方法均是试验型的，并存在误差。

8.2 控制系统特性

为了能够使系统达到所期望的品质，设计控制系统时要改变系统的参数及(或)添加子系统(称为补偿器)，这里谈到的系统品质或所期望的系统特性一般包括稳态精度、瞬态响应、相对稳定性、对系统参数变化的敏感性和抗干扰能力。下面首先看看这些性能指标[1]。

1. 稳态精度

稳态精度这个问题，我们在6.5节已有详述，故在这里我们仅作简要回顾。6.5节指出，如果将$z=1$的极点加入到开环传递函数中，同时(或者)提高开环传递函数的增益，会使系统稳态精度得以提高。然而，增加了$z=1$极点的开环传递函数也会将相位滞后引入到开环频率响应之中，从而导致稳定裕度的下降，继而引发系统的稳定性问题；另外，正如第7章谈到的，开环传递函数增益的增加一般也会引发系统的稳定性问题。因此，控制系统的设计通常需要在稳态精度和可接受的相对稳定性(可接受的稳定裕度)之间寻求权衡。

2. 瞬态响应

我们对物理系统给出的定义是：它具有两个主导极点，可以用一个以适当精度的二阶传递函数来模拟。图8-1a所示曲线对具有两个主导复数极点系统的典型阶跃响应给予了说明。典型的性能标准有上升时间t_r、过冲峰值M_p、出现过冲峰的时间t_p和稳定时间t_s。图中指示的上升时间为系统从其响应终值的10%上升到响应终值的90%所需的时间，还存在有其他的上升时间的定义，但所有关于上升时间的定义均相差无几；稳定时间t_s定义为系统响应进入到其终值的一个百分比之内所需的时间，这个百分比通常取2%及5%。

对于一个给定的系统，其时间响应与闭环频率响应具有唯一相关性。不过，一阶和二

阶系统以外的系统，两者之间的确切关系过于复杂，一般不被人们所用。正像 7.10 节指出的，图 8-1b 所示的是典型的幅值频率响应。图中，M_r是频率响应的谐振峰值，例 7.13 指出，较大的谐振峰值预示着其阶跃响应的过冲峰值M_p较大，例如，需要将控制系统的指标M_r限制到 2dB，以将M_p限定在一个合理的数值上。

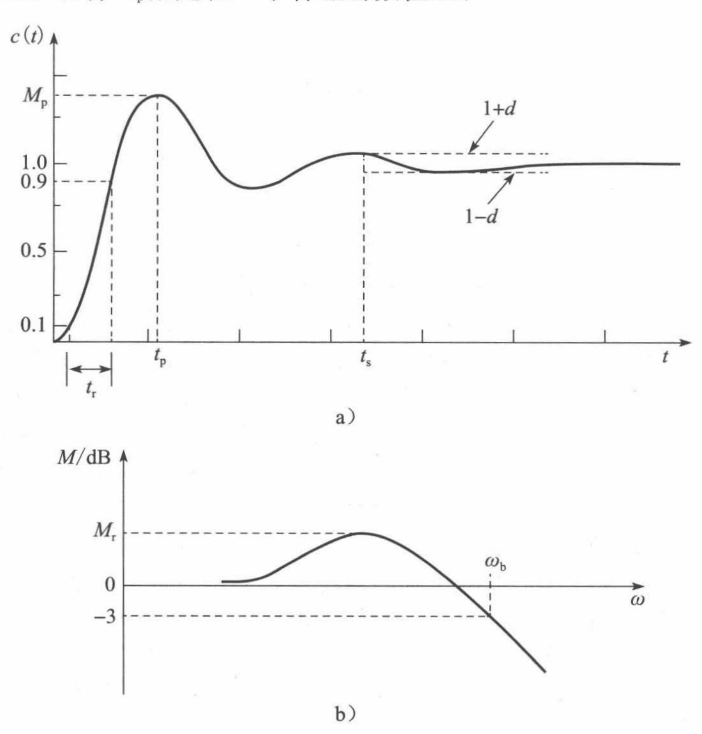


图 8-1　系统的阶跃响应及带宽

标准的二阶 LTI 模拟系统的传递函数为：

$$T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad (8\text{-}1)$$

其单位阶跃响应[1]为：

$$c(t)=1-\frac{1}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\beta\omega_n t+\theta)$$

式中：$\beta=\sqrt{1-\zeta^2}$；$\theta=\arctan(\beta/\zeta)$。

图 8-2 给出了参数M_p、M_r及t_p(见图 8-1)与系统阻尼系数 ζ 之间的关系。其曲线图根据如下方程绘制：

$$M_p=1+e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (8\text{-}2)$$

$$\frac{\omega_n t_p}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

这一关系仅用于对高阶离散系统的二阶复数极点的近似(见 6.4 节)。我们从中可看到复数极点阻尼比的重要性。

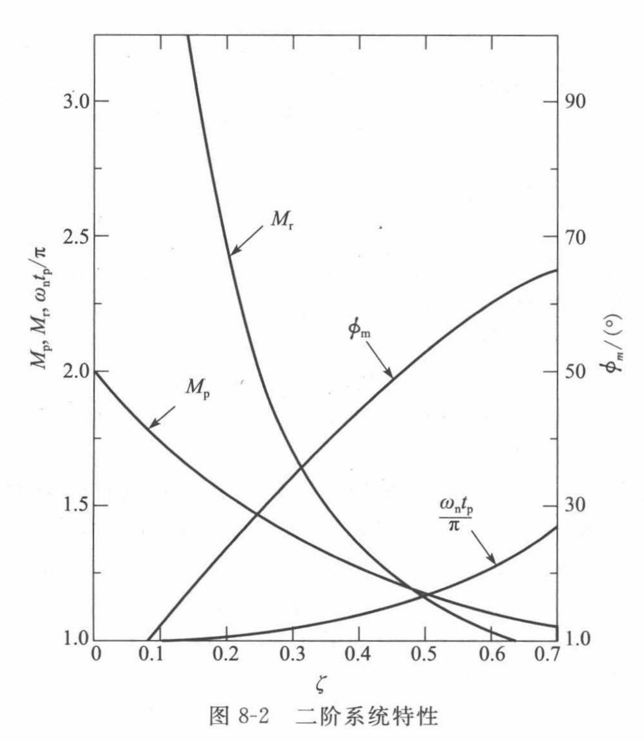


图 8-2　二阶系统特性

在上述二阶系统响应 $c(t)$的阻尼正

弦项中，时间常数 $\tau=1/(\zeta\omega_n)$。这个时间常数决定着图 8-1a 所示的稳定时间t_s。例如，系统响应 $c(t)$进入其终值的 2%范围内时，有：

$$e^{-t_s/\tau}=0.02$$

得$t_s=3.9\tau$。因此，该系统在 4 倍的时间常数以后稳定下来。

系统的瞬态响应与系统的带宽ω_b(见图 8-1b)也具相关性。系统的上升时间与系统带宽的乘积(即乘积$t_r\omega_b$)近乎常数[1,2]，于是，减小上升时间，提高响应速度，带宽必然增大。不过要注意，如果系统中存在明显的高频噪声源，加大带宽将增强系统对高频噪声的响应，这时，必须在追求快速上升与将噪声响应控制在可接受范围之间寻求平衡。

3. 相对稳定性

第 7 章介绍了用增益裕度和相位裕度来对相对稳定性进行度量，这两个裕度近似示意出奈奎斯特图(开环频率特性)贴近−1 点的程度。正像 7.10 节指出的，开环频率响应对复平面中−1 的贴近度决定着闭环频率响应(见图 8-1b)的谐振峰值M_p。M_r与阶跃响应的过冲峰值M_p(见图 8-1)近似相关，于是，稳定裕度与阶跃响应的过冲峰值M_p(见图 8-1)近似相关。式(8-1)给出的闭环传递函数中，用到的系统开环传递函数$G_p(s)$为：

$$G_p(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\quad\Rightarrow\quad T(s)=\frac{G_p(s)}{1+G_p(s)}$$

该系统的相位裕度 ϕ_m 与过冲峰值M_p直接相关，如图 8-2 所示，绘制图中曲线关系式如下：

$$\phi_m=\arctan\left[\frac{2\zeta}{\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)^{1/2}}\right]$$

通常将上式近似为(见习题 8.2-1)

$$\phi_m\approx100\zeta$$

4. 敏感性

一般来讲，控制系统的参数会随温度、湿度、海拔高度、老化程度等的不同而改变。我们更期望控制系统特性在当这些参数变化时保持稳定。当然，系统特性是系统参数的函数，但在某些情况下，可以降低系统特性对参数变化的敏感性。下面讨论一个简单的示例。

对于图 8-3a 所示的离散系统，其闭环传递函数为：

$$T(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

对参数 a 的敏感性通常定义为 $T(z)$的相对变化对参数 a 的相对变化的一种度量。例如使用下式：

$$S_a^T\approx\frac{\Delta T/T}{\Delta a/a}=\frac{\Delta T}{\Delta a}\frac{a}{T}\tag{8-3}$$

式中：ΔT 是由参数 a 的变化 Δa 引起的 T 的变化；S_a^T 为敏感性。

取式(8-3)$a\to+\infty$的极限，可得敏感性的惯用定义：

$$S_a^T=\frac{\partial T}{\partial a}\frac{a}{T}\tag{8-4}$$

下面我们针对图 8-3a 所示系统来求 T 对 G 的敏感性：

$$S_G^T=\frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T}=\frac{1+G(z)-G(z)}{[1+G(z)]^2}\cdot\frac{G(z)}{G(z)/[1+G(z)]}=1+\frac{1}{G(z)}$$

令 $z=e^{j\omega T}$，有：

$$S_G^T=1+\frac{1}{G(e^{j\omega T})}\tag{8-5}$$

为了使系统在带宽内的敏感性低，需要 $G(e^{j\omega T})\gg1$。因此，加大开环增益可以降低 T 对 G 的敏感性。与前述情况相同，加大开环增益会引发稳定性问题，就是说，在系统设计时，我们要再次面对权衡问题。

a)

b)

图 8-3 离散控制系统

设 $G(z)$是参数 a 的函数，于是可将式(8-4)写成：

$$S_a^T=\frac{\partial T}{\partial a}\frac{a}{T}=\frac{\partial T}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial a}\frac{a}{T}$$

即

$$S_G^T=\frac{1+G(z)-G(z)}{[1+G(z)]^2}\cdot\frac{a}{G(z)/[1+G(z)]}\cdot\frac{\partial G(z)}{\partial a}=\frac{a\dfrac{\partial G(z)}{\partial a}}{G(z)[1+G(z)]}\tag{8-6}$$

因此，如同由式(8-5)所得结论，为了降低灵敏度，必须增加开环增益。

5. **干扰抑制**

一般来讲，控制系统并非仅存在用于产生其输出的单输入，往往还存在干扰，如图 8-3b 所示的 $F(s)$。图 8-3b 所示系统中，$R(s)$是控制输入(或称基准输入)，系统设计时，我们力使其输出 $c(t)$近似等于输入 $r(t)$。如果 $F(s)=0$，则

$$C(z)=\frac{D(z)\,\overline{G_1G_2}(z)}{1+D(z)\,\overline{G_1G_2}(z)}R(z)$$

就频率响应问题而言，需要在期望的频带上，有：

$$D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\,\overline{G_1G_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\gg 1$$

于是有：

$$C(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\approx R(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$$

如果仅仅考虑图 8-3b 所示系统中的干扰输入，则有：

$$C(z)=\frac{\overline{G_2F}(z)}{1+D(z)\,\overline{G_1G_2}(z)}$$

于是在期望的频带上，有：

$$C(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\approx\frac{\overline{G_2F}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})}{D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\,\overline{G_1G_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})}$$

显然，上式的分母多项式大于分子多项式，因此，系统对干扰的响应较小。这是使系统获得良好抗干扰能力的通常做法，即我们赋予系统一个较高的环路增益，同时使这个高环路增益不出现在自干扰输入到系统输出的直接通路(见图 8-3b 中的$G_2(s)$)上。

6. **控制力**

在人们对控制系统的期望中，再一个必须考虑的准则就是控制力。比如在由电动机拖动天线旋转的雷达跟踪系统中，所用电动机会有一个最大扭矩设计值，如果记该控制力(扭矩)为 $u(t)$，则$|u(t)|$是有界的。一种兼顾此项约束的系统设计方法是：首先忽略电动机的最大扭矩问题进行系统设计，然后对所设计的系统在最极端的条件下进行仿真，以确定所需的最大扭矩，再据此选择可以提供此值的电动机设备。上述设计过程一般要历经几次，原因是所选电动机不一定与最初设计方案中所设定的电动机模型相吻合。

再举一个在控制力上具有约束的例子，即在一段时间内可提供的最大能量问题，这种约束通常表述为：

$$\int_0^{t_f} |u^2(t)| \mathrm{d}t \leqslant M$$

例如，某些类型的卫星姿态控制器的可用能量有限。关于控制力约束的话题将在第 11 章的一些类型的最优控制系统的设计中讨论。

8.3　补偿

本章的大部分篇幅都将讨论单入单出系统的补偿器设计问题。我们来看图 8-4a 给出的一个简单的单入单出系统，该系统的传递函数为：

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)\overline{GH}(z)} \tag{8-7}$$

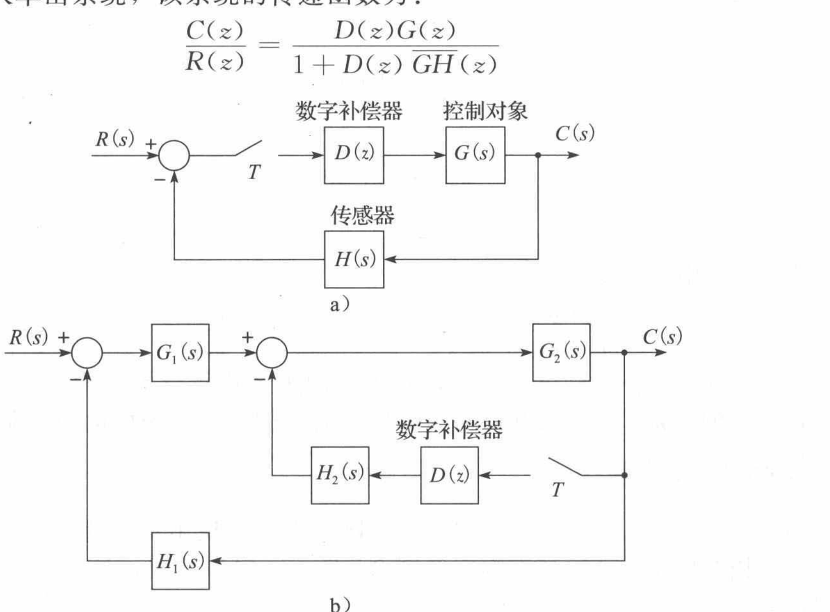


图 8-4　数字控制系统

特征方程为：

$$1 + D(z)\overline{GH}(z) = 0 \tag{8-8}$$

称该图给出的补偿类型为级联补偿，或为串联补偿。特征方程式(8-8)给出了这类补偿对系统特性的影响。

有些时候，还像图 8-4b 所示系统那样，将补偿器置于系统内部的环路上，这种方案更可行。对于图 8-4b 所示系统，有：

$$C(z) = \frac{\mathscr{Z}\left[\dfrac{G_1G_2R}{1 + G_1G_2H_1}\right]}{1 + D(z)\mathscr{Z}\left[\dfrac{G_2H_2}{1 + G_1G_2H_1}\right]} \tag{8-9}$$

特征方程为：

$$1 + D(z)\mathscr{Z}\left[\frac{G_2H_2}{1 + G_1G_2H_1}\right] = 0 \tag{8-10}$$

称这种补偿类型为并联反馈补偿，或为内环补偿。特征方程式(8-10)给出了这类补偿对系统特性的影响。

接下来，我们将用三节的篇幅讨论一阶补偿装置，它的传递函数为：

$$D(z) = \frac{K_{\mathrm{d}}(z - z_0)}{z - z_{\mathrm{p}}} \tag{8-11}$$

我们将通过这三节使用频域的伯德图方法完成补偿器的设计，因此需要用到 w 平面，$D(z)$到w平面的变换$D(w)$为：

$$D(w) = D(z)\big|_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]} \tag{8-12}$$

显然，$D(w)$也是一阶的，设其具有如下形式：

$$D(w) = a_0\left[\frac{1+w/\omega_{w0}}{1+w/\omega_{wp}}\right] \tag{8-13}$$

式中：ω_{w0}和ω_{wp}分别为$D(w)$在w平面的零点和极点。

令$z=1$，便可用式(8-11)求得该补偿器的直流增益，或令$w=0$，用式(8-13)求得直流增益等于a_0。

为了实现补偿器，应该使用以z为自变量的传递函数，如式(8-11)。根据式(7-8)和式(8-11)，可推出：

$$\begin{aligned} D(z) &= a_0\,\frac{1+w/\omega_{w0}}{1+w/\omega_{wp}}\bigg|_{w=(2/T)[(z-1)/(z+1)]} \\ &= a_0\,\frac{\omega_{wp}(\omega_{w0}+2/T)}{\omega_{w0}(\omega_{wp}+2/T)}\left[\frac{z-\dfrac{2/T-\omega_{w0}}{2/T+\omega_{w0}}}{z-\dfrac{2/T-\omega_{wp}}{2/T+\omega_{wp}}}\right] \end{aligned} \tag{8-14}$$

于是，式(8-11)中的三参数分别为：

$$K_d = a_0\,\frac{\omega_{wp}(\omega_{w0}+2/T)}{\omega_{w0}(\omega_{wp}+2/T)},\quad z_0=\frac{2/T-\omega_{w0}}{2/T+\omega_{w0}},\quad z_p=\frac{2/T-\omega_{wp}}{2/T+\omega_{wp}} \tag{8-15}$$

式(8-13)所示的补偿器可据其零点和极点的关系进行分类，我们称$\omega_{w0}<\omega_{wp}$的补偿器为相位超前型的、$\omega_{w0}>\omega_{wp}$的补偿器为相位滞后型的。我们先讨论相位滞后型补偿器。

8.4　相位滞后补偿

式(8-13)中，若$\omega_{w0}>\omega_{wp}$，则$D(w)$的频率响应呈现出负的相位角，即相位滞后。以伯德图方式描绘的$D(w)$的频率响应如图8-5所示。可以看出，该补偿器的直流增益为a_0、高频增益为：

$$(\text{高频增益})_{\text{dB}} = 20\lg\frac{a_0\omega_{wp}}{\omega_{w0}} \tag{8-16}$$

最大相位移动ϕ_M的取值范围为0～90°，具体取值取决于零极点之比ω_{w0}/ω_{wp}。

下面针对图8-6所示系统讨论相位滞后补偿器的设计。首先，该系统的特征方程为：

$$1+D(z)G(z)=0 \tag{8-17}$$

式中：

$$G(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s)\right] \tag{8-18}$$

对于有别于图8-6所示的系统配置，其特征方程采用式(8-17)的形式，这时所计算的频率响应是针对传递函数与$D(z)$的乘积而言的。据此，设计方法如下。

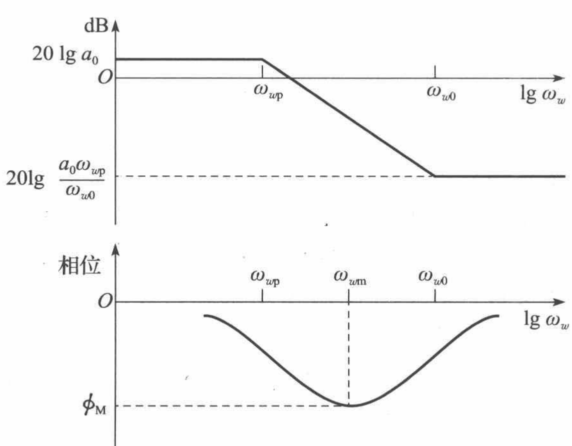


图8-5　相位滞后型滤波器频率响应特性

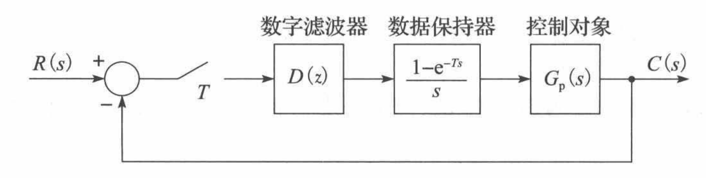


图8-6　数字控制系统

如图 8-5 所示，相位滞后滤波器会降低高频段的系统增益，引入相位滞后。一般来讲，相位滞后具有使系统变得不稳定的趋势，因此，转折频率ω_{w0}和ω_{wp}所形成的相位滞后不要出现在控制对象频率响应$G(j\omega_w)$跨越 180°点的附近，这是选择转折频率ω_{w0}，ω_{wp}时应遵循的。对于图 8-6 所示系统，控制对象频率响应为：

$$G(w) = \mathscr{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s)\right]_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]} \tag{8-19}$$

出于系统稳定性的目的，必须使滤波器所带来的系统增益有所降低，因此必须使ω_{w0}和ω_{wp}小于与 180°相交的频率值。图 8-7 给出了上述关于滞后滤波器设计的说明，其中，滤波器的直流增益是单位 1。

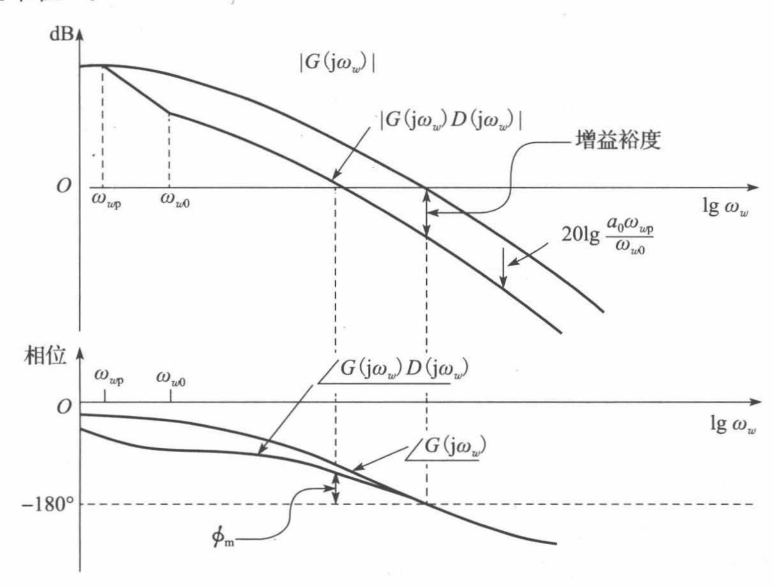


图 8-7　相位滞后型补偿器设计

由图 8-7 可知，滤波器的引入使增益裕度和相位裕度均获提高，从而使系统的相对稳定性得以提高。与此同时，系统低频增益未被降低，使系统稳态误差及低频灵敏度并未因相对稳定性的改善而增加，而带宽的降低一般会导致系统响应速度的减慢。

我们假设图 8-7 中的ω_{w0}和乘积$a_0\,\omega_{wp}$维持常数，以及降低ω_{wp}的同时增加a_0，根据式(8-16)，补偿器的高频增益保持不变，而系统的开环低频增益会因a_0的增加而提高。因此，系统闭环低频增益近似 1，稳态响应得以改善。对于一个给定的系统，将加强过的相位滞后添加到系统的相位特性上，会使相位特性曲线推到−180°线之下(见图 8-7)。这时，我们得到的便是有条件的稳定系统，即减小增益会迫使系统不稳定。如果系统含有饱和非线性，这种非线性系统接受大信号时会降低其有效增益[1,3]。因此，经相位滞后补偿的系统面对大信号(非线性操作)时，不稳定性可能会表现出来。

下面介绍以获得相位裕度预期为目的的确定ω_{w0}和ω_{wp}的方法。设补偿器的直流增益据系统性能指标确定，期望相位裕度为ϕ_m，参照图 8-7 所示曲线，补偿器设计步骤如下：

1) 确定$G(j\omega_w)$的相角约为$-180°+\phi_m+5°$时的频率ω_{w1}，在该频率点，会得到经补偿的系统相位裕度。

2) 为确保在ω_{w1}频率点处引入的相位滞后不大，选

$$\omega_{w0} = 0.1\,\omega_{w1} \tag{8-20}$$

实际上，步骤(1)已算出该补偿器所引入的相位滞后约为 5°。

3) 在ω_{w1}频率点处，我们要求$|D(j\omega_{w1})G(j\omega_{w1})|=1$。鉴于补偿器的高频增益等于$a_0\omega_{wp}/\omega_{w0}$(其中$a_0$是补偿器的直流增益)，则(参见图 8-5)有：

$$\left|\frac{a_0\omega_{wp}}{\omega_{w0}}G(\mathrm{j}\omega_{w1})\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{a_0\omega_{wp}}{\omega_{w0}}=\frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_{w1})|}$$

联立步骤(2)和步骤(3)的两个方程，求解ω_{wp}，得到：

$$\omega_{wp}=\frac{0.1\omega_{w1}}{a_0\,|G(\mathrm{j}\omega_{w1})|} \tag{8-21}$$

至此，我们得到了补偿器的直流增益、零点和极点，补偿器设计完成。

一旦补偿器的直流增益、零点和极点已知，便可据式(8-14)写出 $D(z)$。当系统中传感器传递函数不等于单位 1 时，用$\overline{GH}(\mathrm{j}\omega_{w1})$取代步骤(1)和式(8-21)中的$G(\mathrm{j}\omega_{w1})$即可。

例 8.1 在 1.5 节，我们给出了一个伺服系统的描述，下面来讨论该系统的设计。设伺服电动机用来控制天线的水平角度(方位角)，则在图 8-6 所示的闭环系统中，$c(t)$是天线的方位角，$r(t)$是所要求(或所期望)的方位角。经 1.5 节推导，知该系统控制对象的传递函数是二阶的，不过我们将假设此天线方位干扰不容忽略，于是采用三阶传递函数描述之。设定控制对象的参数，使控制对象的传递函数为

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

可见，其最快的时间常数为 0.5s，于是，我们将 T 选为该时间常数的 1/10(被经常使用的经验法则)，即 $T=0.05\mathrm{s}$，这时，有：

$$\begin{aligned}G(z)&=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(0.5s+1)}\right]\\&=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{-1.5}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{-0.5}{s+2}\right]\\&=\frac{z-1}{z}\left[\frac{0.05z}{(z-1)^2}-\frac{1.5z}{z-1}+\frac{2z}{z-0.9512}-\frac{0.5z}{z-0.9048}\right]\end{aligned}$$

用计算机程序算得该系统的频率响应如表 8-1 所示。设期望设计一个直流增益为单位 1($a_0=1$)的相位滞后补偿器，以使相位裕度达到 55°。

表 8-1　例 8.1 中控制对象的频率响应

ω	ω_w	$\lvert G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\rvert$	$\lvert G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\rvert$ dB	$\angle G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$
0.010	0.010	100.0	40.0	−90.9
0.050	0.050	19.97	26.0	−94.4
0.100	0.100	9.94	19.9	−98.7
0.200	0.200	4.88	13.8	−107.3
0.300	0.300	3.16	9.99	−115.6
0.360	0.360	2.57	8.21	−120.5
0.400	0.400	2.28	7.15	−123.7
0.500	0.500	1.74	4.79	−131.3
0.600	0.600	1.37	2.73	−138.5
0.700	0.700	1.105	0.87	−145.3
0.800	0.800	0.9064	−0.85	−151.6
0.900	0.900	0.7533	−2.46	−157.5
1.000	1.000	0.6330	−3.97	−163.0
1.200	1.200	0.4576	−6.79	−172.9
1.370	1.371	0.3550	−8.99	−180.3
1.500	1.501	0.2950	−10.6	−185.4
2.000	2.001	0.1584	−16.0	−201.4
3.000	3.006	0.0590	−24.6	−222.3
5.000	5.026	0.0151	−36.7	−244.3

用上述方法求得频率ω_{w1}，发现在$G(j\omega_w)$的相角等于$(-180°+55°+5°)=-120°$的地方，即$\omega_{w1}=0.36$处，这时，$G(j\omega_{w1})\approx 2.57$。根据式(8-20)，得：

$$\omega_{w0}=0.1\,\omega_{w1}\approx 0.036$$

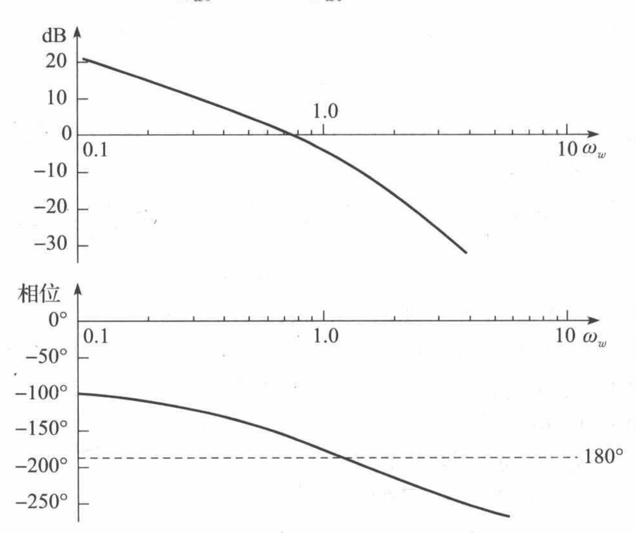


图 8-8 例 8.1 系统的频率响应

再根据式(8-21)，得：

$$\omega_{wp}=\frac{0.1\,\omega_{w1}}{a_0\,|G(j\omega_{w1})|}=\frac{0.036}{(1\times 2.57)}=0.0140$$

则$D(w)=(1+w/0.036)/(1+w/0.0140)$，据式(8-14)，有：

$$D(z)=\frac{0.3890(z-0.9982)}{(z-0.993)}=\frac{0.3890z-0.3883}{(z-0.993)}$$

本例的MATLAB计算程序如下：

```
>> Gp = tf([2],[1 3 2 0]); T = 0.05; a0 = 1;
Gz = c2d(Gp,T); %Assumes a ZOH
margin(Gz), grid
% Select ww1 from the Bode plot
% At ww1=0.360 and phase=-120deg
ww1 = 0.360;
[magGjww1,phaseGww1]=bode(Gz,ww1); % The design point
% Find D(z)
ww0 = 0.1*ww1; wwp = ww0/(a0*magGjww1);
Kd = a0*(wwp*(ww0+2/T))/(ww0*(wwp+2/T));
z0 = (2/T-ww0)/(2/T+ww0); zp = (2/T-wwp)/(2/T+wwp);
Dz = Kd*tf([1 -z0],[1 -zp],T) % Display D(z)
% Find the gain and phase margins of the compensated system
DzGz=Dz*Gz;
[Gm,Pm] = margin(DzGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
```

对系统开环频率响应的计算结果是：所设计的补偿器使系统获得了16.8的增益裕度和55.9°的相位裕度。 ◀

在进行相位滞后补偿的进程中，会伴有参数的计算，这时可能会出现数值计算问题。为了说明这一点，我们假设由一台微处理器来执行数字控制器的功能，再假设由小数点后取8位的二进制字来实现滤波器的系数，此时，可将系数的小数部分表示为[4]：

$$小数部分=b_7\times\frac{1}{2}+b_6\times\frac{1}{4}+b_5\times\frac{1}{8}+\cdots+b_0\times\frac{1}{2^8}$$

式中：b_i是小数点后的第i位数字，取值为0或1。

例如，二进制数：

$$(0.110\,000\,01)_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^8}\right)_{10}=(0.753\,906\,25)_{10}$$

显然，该小数的最大值为$[1-1/2^8]$，即 0.996 093 75。请注意，例 8.1 需要其分母参数为 0.999 300，但所能实现的数值只能达到 0.996 093 75(从 b_7 到b_0均取 1)，经如此的十-二进制转换，分子中的参数变成：

$$(0.3890)_{10}\quad\Rightarrow\quad(0.011\,000\,11)_2=(0.386\,718\,75)_{10}$$
$$(0.3883)_{10}\quad\Rightarrow\quad(0.011\,000\,11)_2=(0.386\,718\,75)_{10}$$

可见，补偿器的零点被偏移成 $z=1$，实际实现的数字滤波器的传递函数变为：

$$D(z)=\frac{0.386\,718\,75z-0.386\,718\,75}{z-0.996\,093\,75}$$

图 8-9 给出了所设计的滤波器和所实现的滤波器的示意，显见系数量化所造成的影响。结果是：使用实际实现的滤波器时，系统的稳定裕度即相位裕度从期望的 55.9°变为 72.7°、增益裕度为从期望的 16.8dB 变成 16.1dB。而这个实际实现的滤波器的直流增益为 0，这时，面对常数输入，系统将无法给出正确的响应，因此，需要加大表示滤波器参数的位数。

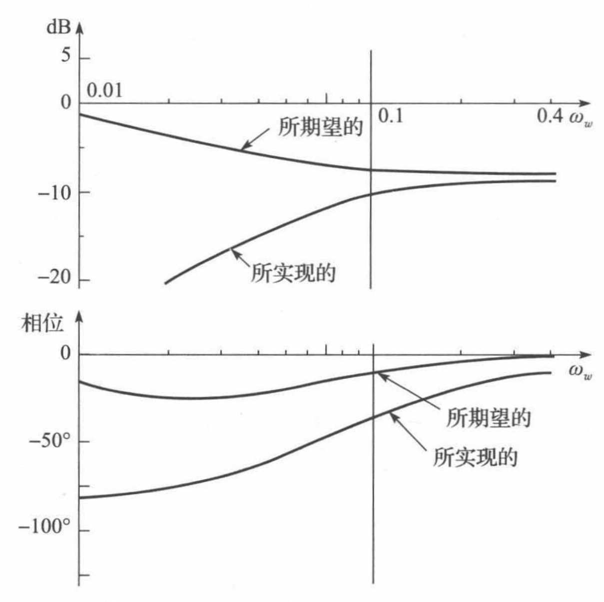


图 8-9　数字控制器的期望频率响应和实际频率响应

采样周期的选择同样存在参数量化问题。为了改变一个物理系统的实频(s平面)响应，我们将数字滤波器置于其中，并希望这一改变出现在一定的实频(ω)范围上，由于 $z=e^{j\omega T}=1\angle(\omega T)$，选择 T 将这个频率范围置于 z 平面的一段单位圆上，于是，因相位滞后型补偿器出现在 ω 取低值的时候，则选择 T 为小值便需要滤波发生于 $z=1$ 的附近，因此，相位滞后型补偿器的极点和零点均将靠近 $z=1$ 的点，且彼此靠得很近。如果将 T 选为大值，则会拉大相位滞后补偿器极点和零点间的距离，且使它们均远离 $z=1$ 的点，这时，所需的滤波器参数的数值精度将不再令人满意。

8.5 相位超前补偿

现在来讨论相位超前型补偿的问题。对于相位超前型补偿器来讲，式(8-13)中的 $\omega_{w0}<\omega_{wp}$，频率响应如图 8-10 所示，最大相移θ_M出现在频率ω_{wm}处，这个ω_{wm}是ω_{w0}和ω_{wp}的几何均值，即

$$\omega_{wm}=\sqrt{\omega_{w0}\,\omega_{wp}}\qquad(8\text{-}22)$$

θ_M与ω_{wp}/ω_{w0}的关系曲线如图 8-11 所示，得到该曲线的方法如下：首先，将式(8-13)表示为：

$$\begin{aligned}D(j\omega_w)&=|D(j\omega_w)|e^{j\theta}\\&=a_0\left[\frac{1+j(\omega_w/\omega_{w0})}{1+j(\omega_w/\omega_{wp})}\right]\end{aligned}\qquad(8\text{-}23)$$

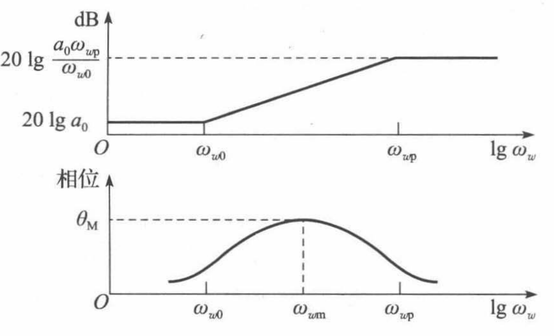


图 8-10　相位超前型数字滤波器频率响应特性

而

$$\tan\theta=\tan\left[\tan^{-1}\frac{\omega_w}{\omega_{w0}}-\tan^{-1}\frac{\omega_w}{\omega_{wp}}\right]=\tan(\alpha-\beta) \tag{8-24}$$

于是

$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\omega_w/\omega_{w0}-\omega_w/\omega_{wp}}{1+\omega_w^2/(\omega_{w0}\omega_{wp})} \tag{8-25}$$

根据式(8-23)和式(8-25)，有：

$$\tan\theta_M=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\omega_{wp}}{\omega_{w0}}}-\sqrt{\frac{\omega_{w0}}{\omega_{wp}}}\right] \tag{8-26}$$

由此方程可以看出，θ_M 仅为比值 ω_{wp}/ω_{w0} 的函数，图 8-11 示出的就是式(8-26)的关系曲线。我们再注意到：

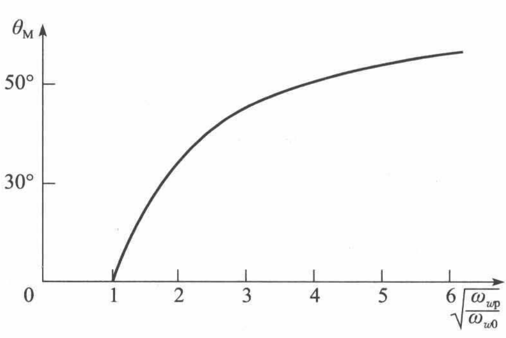


图 8-11　相位超前型滤波器的最大相移

$$|D(j\omega_{wm})|=a_0\left[\frac{\sqrt{1+(\omega_w/\omega_{w0})^2}}{\sqrt{1+(\omega_w/\omega_{wp})^2}}\right]_{\omega_w=\omega_{wm}}=a_0\left[\sqrt{\frac{1+(\omega_{wp}/\omega_{w0})}{1+(\omega_{w0}/\omega_{wp})}}\right]=a_0\sqrt{\frac{\omega_{wp}}{\omega_{w0}}} \tag{8-27}$$

由图 8-10 可知，相位超前补偿引入了相位超前，这是一种稳定性的效应，但因会造成高频增益的提升，又是一种非稳定的效应。图 8-12 给出了这种相位超前补偿的设计说明，图中，出于增加系统稳定裕度的目的，补偿器在控制对象相频特性与 180°相交的频率附近引入相位超前，同时，系统频带也被加宽，从而导致快速的系统响应。对于图 8-12 而言，补偿器直流增益为单位 1。

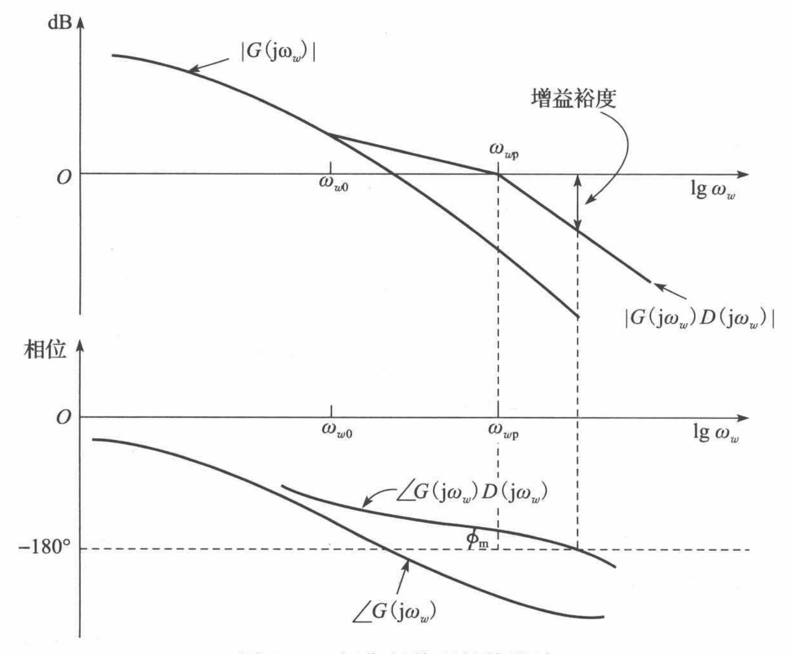


图 8-12　相位超前型补偿设计

相位超前型补偿器设计会出现出一种反复试验的过程，原因是在添加稳定性的相位超前的频率范围上，也会增加不稳定的增益。下一节我们将介绍一种产生指定的相位裕度而不去控制增益裕度的方法。

8.6 相位超前设计方法

在本节我们来介绍一种产生指定相位裕度的设计方法，该方法适于离散控制系统，并假设系统稳定。就是说，这种方法在给定的频率处将开环传递函数的增益和相位设置为指定值，且将指定增益选为 0dB，将指定相位选为$(180°+\phi_m)$，其中，ϕ_m是所期望的相位裕度。这种不管增益裕度的方法有可能导致系统不稳定，因此，在此方法的最后一步，必须核实增益裕度以确保系统稳定。

图 8-6 所示系统的特征方程为：

$$1+D(w)G(w)=0$$

式中：$D(w)$由式(8-13)确定。

针对该系统，有关设计问题的叙述如下。

据式(8-28)确定 $D(w)$，以在频率ω_{w1}处，有：

$$D(\mathrm{j}\omega_{w1})G(\omega_{w1})=1\angle(180°+\phi_m) \tag{8-28}$$

此外，该系统具有足够的增益裕度。

我们来研究一下设计方程。我们将 $D(w)$表示为：

$$D(w)=\frac{a_1w+a_0}{b_1w+1}=a_0\left[\frac{1+w/(a_0/a_1)}{1+w/\ (b_1)^{-1}}\right] \tag{8-29}$$

式中：a_0是补偿器的直流增益。

在式(8-13)～式(8-15)中，有：

$$\omega_{w0}=\frac{a_0}{a_1},\quad \omega_{wp}=\frac{1}{b_1} \tag{8-30}$$

这种标记方法比用于相位滞后补偿器的标记方法更方便。

据式(8-28)可知，应该使 $D(\mathrm{j}\omega_{w1})$满足如下关系：

$$|D(\mathrm{j}\omega_{w1})|=\frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_{w1})|} \tag{8-31}$$

以及

$$\angle D(\mathrm{j}\omega_{w1})=1\angle(180°+\phi_m)-\angle G(\mathrm{j}\omega_{w1})$$

式中：$\angle D$ 表示复数 D 的角度，我们将其标记为 θ，于是有：

$$\theta=\angle D(\mathrm{j}\omega_{w1})=180°+\phi_m-\angle G(\mathrm{j}\omega_{w1}) \tag{8-32}$$

由式(8-29)可以看出，在关于 $D(w)$的方程中，a_0，a_1，b_1这三个量未知，而仅有式(8-31)和式(8-32)这两个方程给出了关于 $D(w)$的约束，对它们进行联立求解得到以a_0和ω_{w1}为自变量的函数a_1和b_1(见附录 I)：

$$a_1=\frac{1-a_0|G(\mathrm{j}\omega_{w1})|\cos\theta}{\omega_{w1}|G(\mathrm{j}\omega_{w1})|\sin\theta} \tag{8-33a}$$

$$b_1=\frac{\cos\theta-a_0|G(\mathrm{j}\omega_{w1})|}{\omega_{w1}\sin\theta} \tag{8-33b}$$

如果系统中传感器的传递函数 $H(s)$不为单位 1，则应将式(8-31)、式(8-32)和式(8-33)中的$G(\mathrm{j}\omega_{w1})$替换为$\overline{GH}(\mathrm{j}\omega_{w1})$。

如果补偿系数满足前述方程，则其奈奎斯特图将穿过 $1\angle(180°+\phi_m)$点，如果所设计的系统是稳定的，则系统就具有所需的相位裕度。不过，这一设计方法并不能担保系统是稳定的。因此，一旦算出补偿器的系数，就应该绘制伯德图(或奈奎斯特图)，以确定闭环系统是否稳定。

上述设计方法需要选择补偿器的直流增益a_0和系统相位裕度频率ω_{w1}，然后由式(8-33)解出补偿器的系数a_1和b_1。补偿器的直流增益通常靠控制系统的稳态要求来确定，而频率ω_{w1}可以用下述方法近似确定。因为补偿器是超前型的，则由式(8-32)得到的角度 θ 一定是正的，将 $\theta>0$ 代入式(8-32)，得到如下约束条件。

1) $\angle G(j\omega_{w1}) < 180° + \phi_m$

再由图 8-10 可知，$|D(j\omega_{w1})| > a_0$；将其代入式(8-31)，得到：

2) $|G(j\omega_{w1})| < 1/a_0$

另外，系数必须是正的，以确保控制器是稳定的；将其代入式(8-33)，得到：

3) $\cos\theta > a_0 |G(j\omega_{w1})|$

因此，选择相位裕度频率ω_{w1}时，应使其满足上述三个约束条件。

应该注意的是，在设计相位滞后滤波器时，也可以利用式(8-33)，原因是推导这些约束时，并没有以相位超前为前提。设计相位滞后型补偿器时，也应该推导出关于ω_{w1}的三个等效约束(见习题 8.6-3)。

例 8.2 在对例 8.1 系统的讨论中，我们获得了它的频率响应(见图 8-8 和表 8-1)。本例希望通过直流增益为单位 1 的相位超前补偿器使其相位裕度达到 55°。

首先，应该参照表 8-1 选出$\angle G(j\omega_{w1}) < -125°$(约束(1))及$|G(j\omega_{w1})| < 1$(约束(2))的频率 ω_{w1}。查表 8-1，我们相对随意地选出 $\omega_{w1} = 1.200$，得 $G(j\omega_{w1}) = 0.4576\angle -172.9°$，将其代入式(8-32)，有：

$$\theta = 180° + 55° - (-172.9°) = 407.9° = 47.9°$$

将上述结果代入约束(3)得 $\cos 47.9° = 0.670 > 0.4576$，可见，上述 3 个约束条件均得以满足。根据式(8-33)算出：

$$a_1 = \frac{1 - (1 \times 0.4576)\cos(47.9°)}{(1.2 \times 0.4576)\sin(47.9°)} = 1.703$$

$$b_1 = \frac{\cos(47.9°) - (1 \times 0.4576)}{1.2\sin(47.9°)} = 0.2397$$

将它们代入式(8-29)得：

$$D(w) = \frac{1 + 1.7028w}{1 + 0.2397w} = \frac{1 + w/0.5873}{1 + w/4.1719}$$

由此得到式(8-14)表示的传递函数为：

$$D(z) = \frac{6.5278(z - 0.9711)}{z - 0.8111}$$

该系统开环频率响应的计算结果表明，本例引入的补偿器使系统获得了 55°的相位裕度和 12.4 的增益裕度。如果我们选择不同于 1.2 的频率值 ω_{w1}，则相位裕度仍将保持不变，但会得到不同的增益裕度。ω_{w1} 越大，$G(j\omega_{w1})$的角度越大(见表 8-1)，比值 ω_{wp}/ω_{w0} 也就越大，根据图 8-10 可知，此时会提升高频增益，从而使系统带宽加宽；如果选择的频率值 ω_{w1} 低于 1.2，系统带宽会变窄。本例的 MATLAB 计算程序如下：

```
>> Gp = tf([2],[1 3 2 0]);
Gz = c2d(Gp,.05); %Assumes ZOH;
disp('Enter the required parameters: ')
a0 = input('Filter dc gain a0 = '); % enter 1
Pm = input('Desired phase margin Pm = '); % enter 55
ww1 = input('Phase margin frequency ww1 = '); % enter 1.2
[magGww1,phaseGww1] = bode(Gz,ww1)
thetad = 180+Pm-phaseGww1; thetar = thetad*pi/180;
% Find D(w) using equation (8-33)
disp(' ')
disp('D(w) = [a1*w + a0]/[b1*w + 1] ')
a1 = (1-a0*magGww1*cos(thetar))/(ww1*magGww1*sin(thetar))
a0
b1 = (cos(thetar)-a0*magGww1)/(ww1*sin(thetar))
% Find D(z) using equations 8-30 and 8-15
ww0 = a0/a1; wwp = 1/b1; T=0.05;
Kd = a0*(wwp*(ww0+2/T))/(ww0*(wwp+2/T));
z0 = (2/T-ww0)/(2/T+ww0); zp = (2/T-wwp)/(2/T+wwp);
```

```
Dz = Kd*tf([1 -z0],[1 -zp],T);
Dz = zpk(Dz)
disp('Gain and Phase Margins:')
Gp = tf([2],[1 3 2 0]); Gz = c2d(Gp,T);
DzGz = Dz*Gz; [Gm,Pm] = margin(DzGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
```

我们针对相位滞后补偿器讨论的系数量化问题，在使用相位超前补偿器时一般不会出现；相位滞后补偿器的零极点几乎重合，因此它们的位置很重要，而相位超前补偿器的零极点分离明显，其任意一个小的偏移对补偿器频率响应造成的影响甚微。

通过例 8.1 和例 8.2，我们对简单的相位滞后和相位超前补偿进行了说明。相位滞后补偿的作用是降低高频段的开环增益，从而使系统带宽变窄，这种系统在低频段的开环增益的不降低(可能增高)不会增加系统的稳态误差。相位超前补偿的作用是增强高频段的开环增益，从而使系统带宽变宽。

例 8.1 和例 8.2 的频率响应曲线和阶跃响应曲线分别如图 8-13 和图 8-14 所示，绘制这两组曲线的 MATLAB 程序如下：

```
>> T = 0.05; Gp = tf([2],[1 3 2 0]); Gz = c2d(Gp,T);
Dz_lag = tf([0.3890 -0.3883],[1 -0.9993],T);
Dz_lead = 6.5278*tf([1 -0.9711],[1 -0.8111],T);
Dz_lagGz = Dz_lag*Gz;
Dz_leadGz = Dz_lead*Gz;
% Plot Figure 8-13
figure(1),bode(Gz,'-k',Dz_lagGz,'--k',Dz_leadGz,'-.k'),grid
% Plot Figure 8-14(a)
Cz_uncomp = feedback(Gz,1);
Cz_lag = feedback(Dz_lagGz,1);
Cz_lead = feedback(Dz_leadGz,1);
figure(2),bode(Cz_uncomp,'-k',Cz_lag,'--k',Cz_lead,'-.k'),grid
% Plot Figure 8-14(b)
figure(3),step(Cz_uncomp,'-k',Cz_lag,'--k',Cz_lead,'-.k'),grid
```

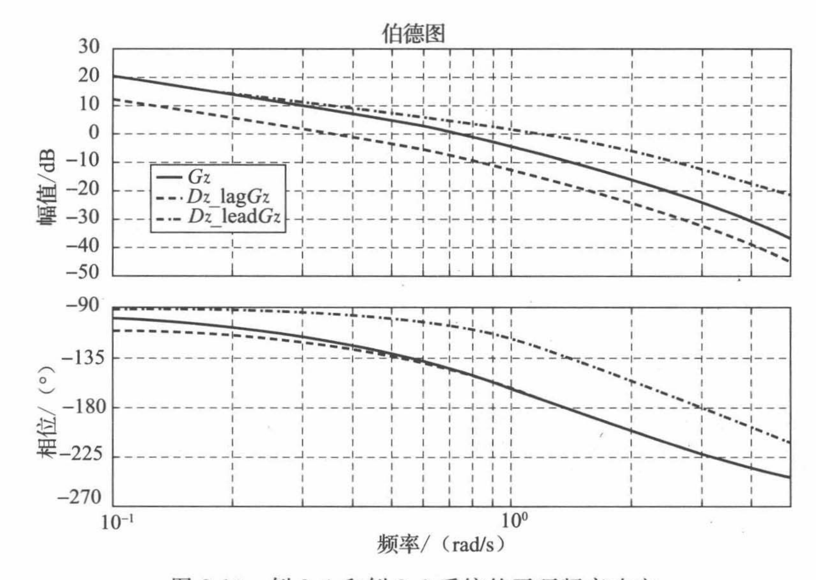


图 8-13 例 8.1 和例 8.2 系统的开环频率响应

图 8-13 给出的是上两例系统在无补偿、加入相位滞后补偿、加入相位超前补偿的开环频率响应曲线；图 8-14a 给出的是上两例系统以及不加入补偿系统的闭环幅频响应，可以看出，相位滞后补偿使频带变窄、相位超前补偿使频带变宽；图 8-14b 所展示的是带有相位滞后补偿的闭环系统阶跃响应和带有相位超前补偿的闭环系统阶跃响应，可以看出，

加入相位超前补偿系统的阶跃响应要快得多，这是相位超前补偿使频带加宽的缘故。表 8-2 列出了上述两种情况下的一些阶跃响应特性(见图 8-1)，可以看出，相位裕度相同时的系统超调并不相同，可见，单独的相位裕度并不能决定超调量的大小。

表 8-2　阶跃响应特性

特性	不补偿	相位滞后补偿	相位超前补偿
稳态误差	0	0	0
超调(%)	40.51	14.07	11.50
上升时间	1.55	3.15	1.05
峰值时间	4.10	7.45	2.20
稳定时间	16.25	32.35	5.20
带宽	1.26	0.65	2.19

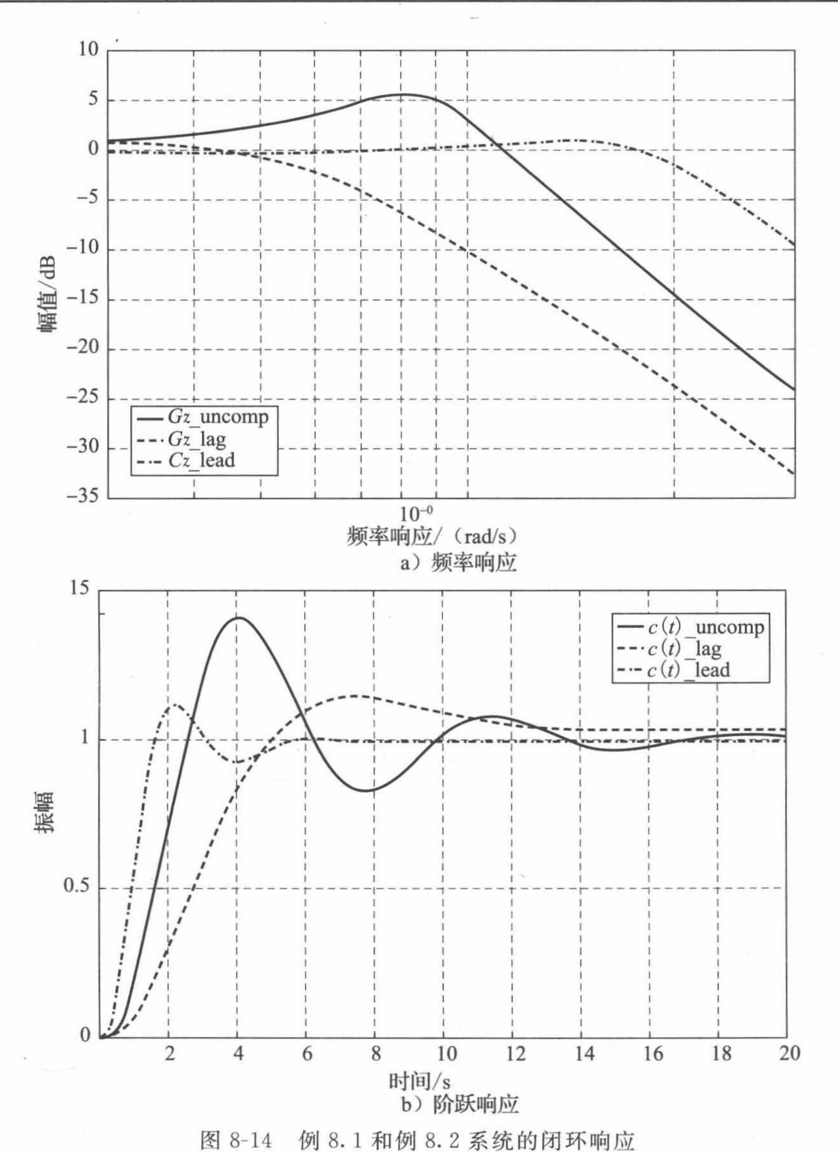


图 8-14　例 8.1 和例 8.2 系统的闭环响应

请不要将开环频率响应与闭环频率响应相混淆。图 8-13 给出的是开环系统频率响应曲线，图 8-14a 给出的则是闭环系统频率响应曲线，表 8-2 中的带宽是从图 8-14a 所示曲

线获得的，这些带宽如果不外加推算是不能从图 8-13 所示曲线中获得的。为方便起见，人们利用开环频率响应着手系统设计，但闭环频率响应能够更清晰地给出系统的输入-输出特性。

下面谈谈相位超前补偿的一个问题。由图 8-10 可知，这种滤波器会使高频增益变得很大，那么，如果系统受到高频噪声的侵袭，相位超前补偿便会引发噪声问题，果真如此，就需要采取某种折中的设计方案。一种办法是，用一个相位滞后补偿器与相位超前补偿器进行级联，并用相位滞后补偿器承担稳定性裕度的需求工作，以减轻所需的相位超前补偿器的量级。下一节介绍这种补偿方案。

解决噪声问题的再一种办法，是为滤波器的传递函数增加一个到几个极点，并置这个(些)极点于高频段，以使由极点引入的相位滞后不明显降低系统的稳定裕度。所需单极点传递函数具有如下形式：

$$D_{\mathrm{h}}(w)=\frac{1}{1+w/\omega_{w\mathrm{p}1}}$$

增加单极点的相位超前补偿器的传递函数为：

$$D(w)=\frac{a_1w+a_0}{b_1w+1}\left[\frac{1}{1+w/\omega_{w\mathrm{p}1}}\right]$$

所导致的频率响应如图 8-15 所示($a_0=1$)。

相位超前补偿器较大的高频增益还会引发另一个问题，显见于例 8.2 的滤波器传递函数之中，此例的滤波器传递函数为：

$$D(z)=\frac{6.5278z-6.3391}{z-0.8111}$$
$$=6.5278-1.0444z^{-1}+\cdots$$

显然，输入给滤波器 1 个单位的阶跃变化会引发其输出 6.5278 个单位的阶跃变化。滤波器如此大的信号输出有可能迫使其输出侧的对象进入非线性工作区。例如，放大器可能饱和、D/A 转换器可能到达转换极限(饱和)。我们的设计工作是基于各对象模块线性模型的，所以，一般来讲，这种迫使系统进入非线性工作区的问题不明显。

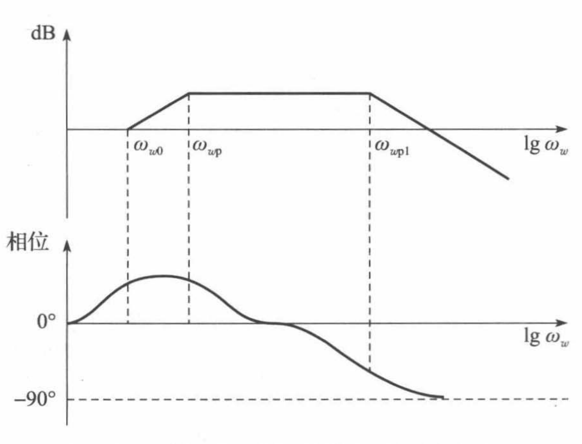


图 8-15 添加了一个极点的相位超前滤波器

1. 相位滞后的优劣

(1) 概括地讲，相位滞后补偿的益处可以归纳如下。

① 能够保持或改进低频特性；

② 稳定裕度得以提高；

③ 使频带变窄，这在存在高频噪声问题或其他一些情况的时候是长处。

(2) 相位滞后可能的劣势如下。

① 使频带变窄会减缓系统的响应，这对某些系统来说可能就是问题；

② 系统的瞬态响应中会有一个变化非常缓慢的项，在 8.11 节讨论根轨迹设计议题的时候，会突显这个问题；

③ 可能会导致滤波器系数的数值计算问题。

2. 相位超前的优劣

(1) 相位超前补偿的益处可以归纳如下。

① 能够改进稳定裕度；

② 能够改进诸如响应速度的高频性能指标；

③ 某些类型的系统需要用相位超前补偿的办法将其稳定下来。

（2）相位超前可能的劣势如下。

① 加重高频噪声问题；

② 有可能输出大的信号，这可能会使系统受损，或至少使系统工作于非线性状态，由于人们在假设线性的前提下进行系统设计，这种非线性工作状态所导致的结果往往不会直接显现出来。

8.7　滞后-超前补偿

前几节我们讨论了简单的一阶补偿器问题，然而有许多系统设计项目，其技术指标仅靠一阶补偿无法得以满足，这时，必须启用高阶滤波器，为了说明这一点，假设要求例 8.2 的系统对斜坡输入的稳态误差较小，因此，必须提升系统的低频增益。面对此问题，如果使用相位超前型补偿，这一增益的提升是遍布全频域的（见图 8-10），因此，一阶相位超前补偿设计结果不太可能给出足够的稳定裕度，解决这一问题的一种方案或许可以是将两个一阶相位超前滤波器进行级联，然而，如果噪声是系统问题的话，高频段增益的提升可能就会引发这个噪声问题。另一种解决方案是，用一个相位滞后滤波器与相位超前滤波器进行级联，称为滞后-超前补偿器。

相位滞后-超前滤波器的特性如图 8-16 所示。其中，滞后部分负责提升低频段增益、超前部分负责放宽频带及增强稳定裕度。下面看一个滞后-超前滤波器的例子。

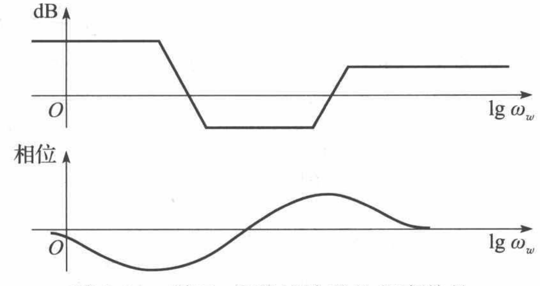


图 8-16　滞后-超前滤波器的频率特性

例 8.3 我们延续使用例 8.1 和例 8.2 的系统。系统对单位斜坡输入的稳态误差为：

$$e_{ss}(kT)=\frac{T}{\lim\limits_{z\to1}(z-1)G(z)} \qquad [(6\text{-}21)]$$

由例 8.1 知

$$\lim_{z\to1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)^2}{z}\left[\frac{0.05z}{(z-1)^2}-\frac{1.5z}{z-1}+\frac{2z}{z-0.9512}-\frac{0.5z}{z-0.9048}\right]=0.05$$

再由式(6-21)，得：

$$e_{ss}(kT)=\frac{0.05}{0.05}=1$$

设计指标要求对单位斜坡输入的稳态误差为 0.50，相位裕度为 55°。我们则用相位滞后滤波器$D_1(z)$以因子 2 提升低频增益以满足对系统的稳态误差的要求，再设计一个相位超前滤波器$D_2(z)$产生 55°的相位裕度。我们使用与例 8.1 相同的方法选择$D_1(z)$的零极点。即根据

$$a_0=\lim_{z\to1}D_1(z)=\lim_{z\to1}\frac{K_d(z-0.9982)}{z-0.9993}=2$$

解得$K_d=0.7778$，即

$$D_1(z)=\frac{0.7778(z-0.9982)}{z-0.9993}$$

为了设计出相位超前滤波器，必须先计算出频率响应$D_1(z)G(z)$，8.6 节的公式可以用来找到相位超前滤波器的传递函数$D_2(z)$。参照例 8.2，选$\omega_{w1}=1.20$，计算所需的频率响应：

$$D_1(w)G(w)\big|_{w=j1.20}=0.3557\angle(-173.93°)$$

将上述结果代入式(8-32)和式(8-33)，同时将这两个方程中的$G(j\omega_1)$替换为$D(j\omega_1)G(j\omega_1)$。即根据式(8-32)，有：

$$\theta=180°+55°-(-173.93°)=403.93°=48.93°$$

由式(8-29)和式(8-33)($a_0=1$)，有：

$$a_1=\frac{1}{\omega_{w0}}=\frac{1-(1\times 0.3557)\cos(48.93°)}{(1.2\times 0.3557)\sin(48.93°)}=2.3814=\frac{1}{0.4199}$$

由式(8-33b)，有：

$$b_1=\frac{1}{\omega_{wp}}=\frac{\cos(48.93°)-(1\times 0.3557)}{1.2\sin(48.93°)}=0.3331=\frac{1}{3.002}$$

则$D_2(w)=(1+w/0.4199)/(1+w/3.002)$，再由式(8-14)，得：

$$D_2(z)=\frac{6.7206(z-0.9792)}{z-0.8604}$$

最后得滤波器传递函数为：

$$D(z)=D_1(z)D_2(z)=\frac{5.2273(z-0.9982)(z-0.9792)}{(z-0.9993)(z-0.8604)}$$

该滤波器的直流增益为2.003。上述滤波器的伯德图如图8-17所示。考察经补偿的开环频率响应，可以看出，补偿后，系统的相位裕度为55°，增益裕度为11.2dB，阶跃响应绘于图8-18之中，此图同时给出了例8.1和例8.2的结果。可以看出，相位超前的阶跃响应与相位滞后-超前的阶跃响应近乎相同，而对斜坡输入的稳态误差后者仅是前者的一半。

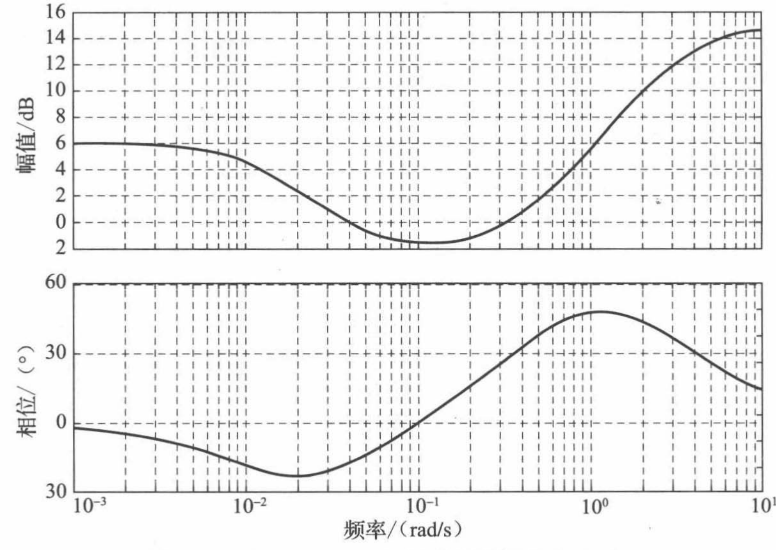


图8-17　例8.3的滞后-超前滤波器的频率响应

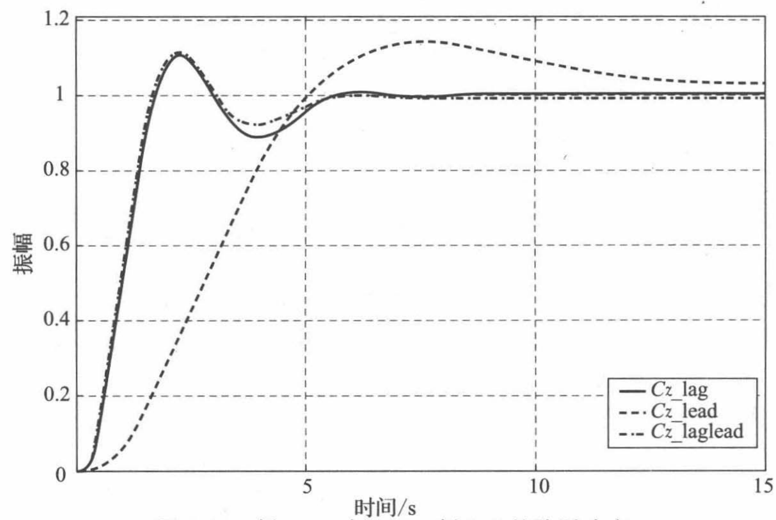


图8-18　例8.1、例8.2、例8.3的阶跃响应

承担本例计算及曲线绘制工作的 MATLAB 程序如下：

```
>> Gp = tf([2],[1 3 2 0]); T=0.05;
Gz = c2d(Gp,T); %Assumes ZOH;
% Set up lag filter
D1z = 0.7778*tf([1 -0.9982],[1 -0.9993],T);
D1z=zpk(D1z); D1zGz=D1z*Gz;
disp('Enter required design parameters: ')
a0_D2 = input('D2(z) filter dc gain a0_D2 = '); % enter 1
Pm = input('Desired system phase margin Pm = '); % enter 55
ww1_D2 = input('Phase margin frequency ww1_D2 = '); % enter 1.2
[magD1Gww1,phaseD1Gww1] = bode(D1zGz,ww1_D2)
thetad = 180+Pm-phaseD1Gww1; thetar = thetad*pi/180;
% Find lead filter D2(w) using equation (8-33)
disp('D2(w) = [a1_D2*w + a0_D2]/[b1_D2*w + 1] ')
a1_D2 = (1-a0_D2*magD1Gww1*cos(thetar))/(ww1_D2*magD1Gww1*sin(thetar))
b1_D2 = (cos(thetar)-a0_D2*magD1Gww1)/(ww1_D2*sin(thetar))
% Find lead filter D2(z) using equations 8-30 and 8-15
ww0_D2 = a0_D2/a1_D2; wwp_D2 = 1/b1_D2;
Kd_D2 = a0_D2*(wwp_D2*(ww0_D2+2/T))/(ww0_D2*(wwp_D2+2/T));
z0_D2= (2/T-ww0_D2)/(2/T+ww0_D2); zp_D2 = (2/T-wwp_D2)/(2/T+wwp_D2);
D2z = Kd_D2*tf([1 -z0_D2],[1 -zp_D2],T); D2z = zpk(D2z)
% Find the lead-lag filter D1(z)*D2(z)
Dz_laglead=D1z*D2z
Dz_lagleadGz = Dz_laglead*Gz;
% Find the stability margins
disp('Gain and Phase Margins:')
[Gm_laglead,Pm_laglead] = margin(Dz_lagleadGz);
GmdB_laglead = 20*log10(Gm_laglead), Pm_laglead
% Plot Figure 8-17: lag-lead filter frequency response
figure(1), bode(Dz_laglead,'-k'), grid
% plot Figure 8-18: Step responses for Examples 8.1-8.3
Dz_lag = tf([0.3890 -0.3883],[1 -0.9993],T);
Dz_lead = 6.5278*tf([1 -0.9711],[1 -0.8111],T);
Dz_lagGz = Dz_lag*Gz;
Dz_leadGz = Dz_lead*Gz;
Dz_lagleadGz = Dz_laglead*Gz;
Cz_uncomp = feedback(Gz,1);
Cz_lag = feedback(Dz_lagGz,1);
Cz_lead = feedback(Dz_leadGz,1);
Cz_laglead = feedback(Dz_lagleadGz,1);
figure(2),step(Cz_lag,'--k',Cz_lead,':k',Cz_laglead,'-k'),grid
stepinfo(Cz_laglead)
```
◀

8.8　积分滤波器和微分滤波器

这节和下一节介绍的控制器与前面介绍的有些不同，且广泛应用于多个行业。

为了介绍这种控制器，首先讨论一种数字滤波器积分技术。我们假设期望对信号 $e(t)$进行数值积分，为此，使用梯形方法[6]，图 8-19 对梯形规则进行了说明。

令 $m(kT)$为对 $e(t)$的数值积分，根据图 8-19，$t=(k+1)T$ 时的积分值等于 kT 时的值加上从 kT 到$(k+1)T$ 增加的面积，由图 8-19 可知：

$$m[(k+1)T]=m(kT)+\frac{T}{2}\{e[(k+1)T]+e(kT)\} \tag{8-34}$$

对上式两侧进行 z 变换，得：

$$zM(z)=M(z)+\frac{T}{2}[zE(z)+E(z)] \tag{8-35}$$

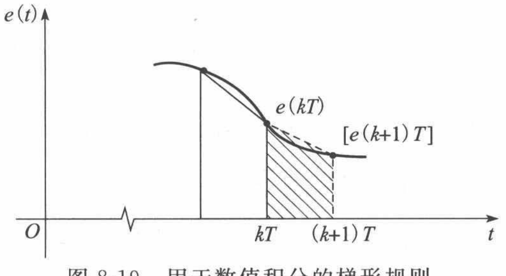


图 8-19　用于数值积分的梯形规则

于是

$$\frac{M(z)}{E(z)}=\frac{T}{2}\left[\frac{z+1}{z-1}\right] \tag{8-36}$$

于是，式(8-36)是离散积分器的传递函数。当然，诸如 6.6 节所述，还有许多其他的离散传递函数用于描述对数字序列的积分。

下面再讨论对函数 $e(t)$进行数字滤波器微分的方法，图 8-20 对此方法给出了说明。其中，$e(t)$在 $t=kT$ 时的斜率近似等于 $e\ (k-1)T$ 与 $e(kT)$之间连线的斜率，令 $m(kT)$为$e(t)$在 $t=kT$ 时的数值微分，则有：

$$m(kT)=\frac{e(kT)-e[(k-1)T]}{T} \tag{8-37}$$

对上式两侧进行 z 变换，得：

$$\frac{M(z)}{E(z)}=\frac{z-1}{Tz} \tag{8-38}$$

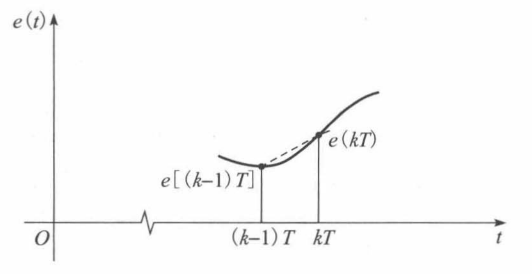


图 8-20　数值微分示意图

请注意，这个微分器是矩形规则积分器传递函数的倒数(见习题 2.2-1)。一般来讲，数值积分器传递函数的倒数可以用作数值微分器的传递函数。下面，我们对积分和微分分别使用式(8-36)及其倒数。即由式(8-36)，用$D_{\mathrm{I}}(z)$表示积分器的传递函数，得到：

$$D_{\mathrm{I}}(w)=\frac{T}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\bigg|_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]}=\frac{1}{w} \tag{8-39}$$

用$D_{\mathrm{D}}(z)$表示微分器的传递函数，并令其为式(8-39)的倒数：

$$D_{\mathrm{D}}(w)=D_{\mathrm{D}}(z)\,|_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]}=w \tag{8-40}$$

回顾连续系统，微分器的传递函数具有因子 s，积分器的传递函数具有因子 $1/s$。将 s 置换成 $\mathrm{j}\omega$ 可得它们的频率响应。

下面，我们用离散传递函数式(8-39)和式(8-40)的频率响应与连续积分器及连续微分器的频率响应进行对比。根据式(7-10)，有：

$$\omega_w=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \tag{8-41}$$

可以看出，$\omega T/2$ 较小时，有：

$$\omega_w\approx\omega \tag{8-42}$$

对式(8-39)的积分器传递函数为：

$$D_{\mathrm{I}}(\mathrm{j}\omega_w)\approx\frac{1}{\mathrm{j}\omega_w} \tag{8-43}$$

将式(8-42)代入式(8-43)，得：

$$D_{\mathrm{I}}(\mathrm{j}\omega)\approx\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \tag{8-44}$$

用相似的方法可得：

$$D_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega_w)=\mathrm{j}\omega_w\approx\mathrm{j}\omega$$

代入$\omega_s=2\pi/T$，有：

$$\tan\left(\omega\frac{T}{2}\right)=\tan\left(\pi\frac{\omega}{\omega_s}\right)\approx\pi\frac{\omega}{\omega_s}$$

如果上述表达式得以满足，我们则期望分别对式(8-40)和式(8-39)得到精准的微分和积分。

8.9 PID 控制器

下面从另一角度来讨论相位超前相位滞后控制器的频率响应设计方法，我们称为 PID (比例＋积分＋微分)控制器，它是一种特殊类型的滞后超前控制器，其框图如图 8-21 所示。

用上一节推出的积分器和微分器的传递函数，得出数字 PID 控制器传递函数为：

$$D(w)=K_{\mathrm{P}}+\frac{K_{\mathrm{I}}}{w}+K_{\mathrm{D}}w \tag{8-45}$$

式中：K_{P}是比例通道增益；K_{I}是积分通道增益；K_{D}是微分通道增益。

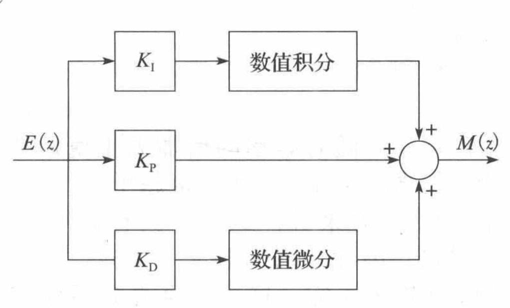


图 8-21　离散 PID 控制器

我们先来看 PI(比例＋积分)控制器，其传递函数为：

$$D(w)=K_{\mathrm{P}}+\frac{K_{\mathrm{I}}}{w}=\frac{K_{\mathrm{P}}w+K_{\mathrm{I}}}{w}$$
$$=K_{\mathrm{I}}\frac{1+w/\omega_{w0}}{w} \tag{8-46}$$

式中：$\omega_{w0}=K_{\mathrm{I}}/K_{\mathrm{P}}$。

请注意，这是式(8-13)描述的相位滞后型滤波器，极点$\omega_{wp}=0$。该滤波器的频率响应如图 8-22 所示。

请注意，PI 控制器低频增益得以增强，因此可降低系统的稳态误差。出于与相位滞后控制器(式(8-13))相同的目的：增加稳定裕度及(或)降低稳态误差。

该控制器低频增益的增加($\omega_{w0}=0$ 时将无限大)，使稳态误差减小。这与式(8-13)给出的相位滞后补偿器的目的相同，即增加稳定裕度及(或)减小稳态误差。

我们再来看 PD(比例＋微分)控制器，其传递函数为：

$$D(w)=K_{\mathrm{P}}+K_{\mathrm{D}}w=K_{\mathrm{P}}\left(1+\frac{w}{w_{w0}}\right) \tag{8-47}$$

式中：$\omega_{w0}=K_{\mathrm{P}}/K_{\mathrm{D}}$。

请注意，这是式(8-13)描述的相位超前型控制器，极点$\omega_{wp}=+\infty$。该滤波器的频率响应如图 8-23 所示。PD 滤波器的作用是对开环频率响应添加正的相位角，以改进系统的稳定性，同时，使闭环系统的频带变宽，以加快系统的响应速度。PD 控制器的影响出现在高频段，而 PI 控制器的影响出现在低频段。

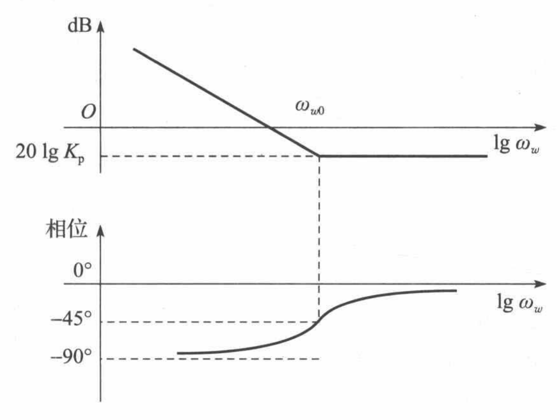


图 8-22　PI 控制器的频率响应

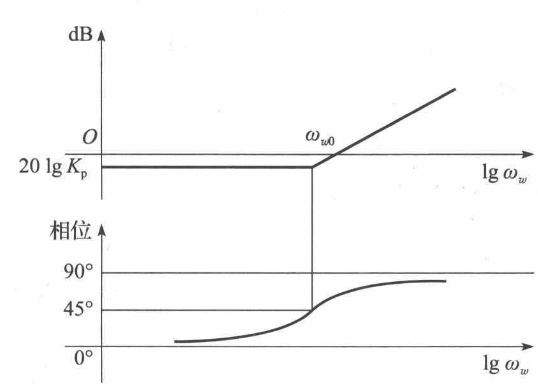


图 8-23　PD 控制器的频率响应

PID 滤波器是上面两种滤波器的组合，其传递函数为：

$$D(w)=K_{\mathrm{P}}+\frac{K_{\mathrm{I}}}{w}+K_{\mathrm{D}}w \tag{8-48}$$

图 8-24 给出了它的频率响应。我们将式(8-48)改写为：

$$D(w)=\frac{K_{\mathrm{D}}w^2+K_{\mathrm{P}}w+K_{\mathrm{I}}}{w}=\frac{K_{\mathrm{I}}(1+w/\omega_{w01})(1+w/\omega_{w02})}{w}$$

可以看出，这个滤波器具有两个零点(ω_{w01}，ω_{w02})和两个极点($\omega_w=0$，$\omega_w=+\infty$)，设计方

法可以参照相位滞后滤波器(PI)和相位超前滤波器(PD)的做法，但是，由于PI滤波器和PD滤波器中均包含K_P子项，使得PD滤波器的设计影响到PI滤波器，反之亦然。因此下一节我们将给出另一种不同的PID滤波器设计方法。

使用PID滤波器时存在着一个明显的问题。正如在图8-24曲线中见到的，滤波器的增益会随着频率的增加无止境地持续增大，当ω_w趋于无穷时，ω趋于$\omega_s/2$、z趋于-1。一般来讲，$G(z)$不具有$z=-1$这一零点，因此，当z趋于-1时，$|G(z)D(z)|$趋于无穷，这可能会导致系统奈奎斯特图对-1点的包围，从而造成系统的不稳定，进而使补偿器式(8-48)无法使用。为避免这个问题，我们将一个或多个极点添加到微分子项中，使传递函数变成：

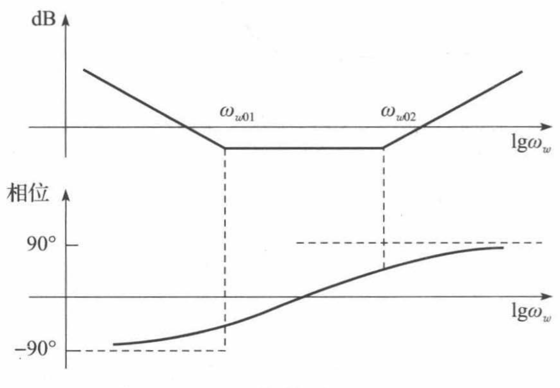


图 8-24 PID控制器的频率响应

$$D(w)=K_P+\frac{K_I}{w}+\frac{K_D w}{\prod(1+w/\omega_{wpi})} \tag{8-49}$$

解决上述问题的更常见的方案是使用加入了1个极点的图8-20所示的微分器，式(8-38)给出了这个微分器的传递函数为：

$$D_D(w)=\left.\frac{z-1}{Tz}\right|_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]}=\frac{w}{1+(T/2)w}=\frac{w}{1+(w/\omega_{wp})} \tag{8-50}$$

可以看出，该微分算法在$2/T$处增添了一个极点。因为$\omega_s=2\pi/T$，使

$$\omega_{wp}=\frac{2}{T}=\frac{\omega_s}{\pi}$$

该极点通常刚好落在系统频带之外，且在计算相位裕度的频率处形成的相位滞后非常小，因此在多数情况下，设计过程(至少最初)可忽略此极点的存在。如果系统存在高频噪声问题，则需要再在微分子项中添加极点。

综合式(8-45)、式(8-36)和式(8-38)，可得以z为自变量的实际PID滤波器的传递函数为：

$$D(z)=K_P+K_I\frac{T}{2}\left[\frac{z+1}{z-1}\right]+K_D\left[\frac{z-1}{Tz}\right] \tag{8-51}$$

可以将上式改写成：

$$\begin{aligned}D(z)&=K_d\frac{z^2+az+b}{z(z-1)}\\K_d&=K_P+K_IT/2+K_D/T\\a&=(K_IT/2-K_P-2K_D/T)/K_d\\b&=K_D/(TK_d)\end{aligned} \tag{8-52}$$

此滤波器中的积分使用梯形规则，微分见式(8-38)和图8-20。根据上式可直接写出其差分方程(见习题8.9-1)。在当初步获知控制对象特性的情况下，可以用实际的控制系统以实验的方法定出K_P、K_I和K_D。在对这些系数有依据的猜测下，所形成的闭环系统是稳定的。有步骤地改变K_P、K_I和K_D，直到系统的响应令人满意为止。

在系统的设计完成之后，如果由于某种原因需要改变采样周期T，PID控制器的优势便会显现出来。假设有一个给定的设计，选择T使我们获得了精准的微分和积分，改变T，所获得的依然是精准的微分和积分，那么，增益K_P、K_I和K_D将不再改变，也就不再需要调整设计方案。下一节专门讨论PID控制器的设计方法。

8.10 PID控制器设计

本节讨论PID控制器的设计流程[6]。讨论方法与8.6节关于相位超前滤波器(控制器)的方法十分相似。开始，我们假设PID控制器的传递函数为[式(8-45)]:

$$D(w)=K_P+\frac{K_I}{w}+K_Dw$$

先不考虑微分路径中式(8-50)所需的极点的影响，得控制器频率响应为:

$$D(j\omega_w)=K_P+j(K_D\omega_w-K_I/\omega_w)=|D(j\omega_w)|e^{j\theta} \tag{8-53}$$

如同8.6节，这里的设计问题是选择$D(w)$，即选择K_P、K_I和K_D，使在所选频率ω_{w1}处有:

$$D(j\omega_{w1})G(j\omega_{w1})=1\angle(-180^\circ+\phi_m) \tag{8-54}$$

再由式(8-53)，得:

$$K_P+j\left(K_D\omega_{w1}-\frac{K_I}{\omega_{w1}}\right)=|D(j\omega_{w1})|(\cos\theta+j\sin\theta) \tag{8-55}$$

其中，根据式(5-53)和式(5-54)，得:

$$\theta=-180^\circ+\phi_m-\angle G(j\omega_{w1}) \tag{8-56}$$

根据式(5-54)和式(5-55)，得:

$$K_P=|D(j\omega_{w1})|\cos\theta=\frac{\cos\theta}{|G(j\omega_{w1})|} \tag{8-57}$$

$$K_D\omega_{w1}-\frac{K_I}{\omega_{w1}}=\frac{\sin\theta}{|G(j\omega_{w1})|} \tag{8-58}$$

如果系统传感器的传递函数$H(s)$不为单位1，则需要用$\overline{GH}(\omega_{w1})$替代上述各方程中的$G(\omega_{w1})$。

至此得到设计方程式(8-56)、式(8-57)和式(8-58)。接下来，对给定的$G(w)$选择ω_{w1}和ϕ_m，以用式(8-57)唯一确定K_P，而由式(8-58)无法将K_D和K_I唯一地确定下来。式(8-55)衍生出两个方程，但有3个未知数K_P、K_I和K_D待定。倘若使系统保持住可接受的增益裕度，在式(8-58)约束下，增大K_D一般会使频带变宽，而增大K_I一般会降低稳态误差。倘若同时满足式(8-57)和式(8-58)，则改变K_D和K_I会改变增益裕度，而相位裕度保持不变。

将K_D或K_I设为0，便可得到PI控制器或PD控制器，式(8-57)和式(8-58)也可用于设计PI控制器或PD控制器，这时，两个增益值能够唯一地确定下来。

正如8.9节所述，微分项中一般需要加入一个极点，式(8-50)是通常用到的传递函数，使PID控制器的传递函数成为:

$$D(w)=K_P+\frac{K_I}{w}+\frac{K_Dw}{1+(T/2)w} \tag{8-59}$$

则

$$\begin{aligned}D(j\omega_w)&=K_P-j\frac{K_I}{\omega_w}+\frac{K_Dj\omega_w}{1+j\omega_wT/2}\\&=\left(K_P+\frac{K_D\omega_{w1}^2(2/T)}{(2/T)^2+\omega_{w1}^2}\right)+j\left(\frac{K_D\omega_w(2/T)^2}{(2/T)^2+\omega_w^2}-\frac{K_I}{\omega_w}\right)=\frac{\cos\theta+j\sin\theta}{|G(j\omega_{w1})|}\end{aligned} \tag{8-60}$$

按照实部和虚部的划分方法，式(8-57)和式(8-58)变成:

$$K_P+\frac{K_D\omega_{w1}^2(2/T)}{(2/T)^2+\omega_{w1}^2}=\frac{\cos\theta}{|G(j\omega_{w1})|} \tag{8-61}$$

和

$$\frac{K_D\omega_{w1}(2/T)^2}{(2/T)^2+\omega_{w1}^2}-\frac{K_I}{\omega_{w1}}=\frac{\sin\theta}{|G(j\omega_{w1})|} \tag{8-62}$$

请注意，如果$\omega_{w1}<2/T$，上述方程退化为式(8-57)和式(8-58)。另外，人们并未找到计算

K_P、K_I和K_D的更简单的办法。对于 PI 控制器来说，可由含两个未知量的方程式(8-61)和式(8-62)直接解出这两个未知量：

$$K_P=\frac{\cos\theta}{|G(j\omega_{w1})|},K_I=-\frac{\omega_{w1}\sin\theta}{|G(j\omega_{w1})|} \tag{8-63}$$

对于 PD 控制器来说，也可由含两个未知量的方程式(8-61)和式(8-62)直接解出这两个未知量：

$$K_D=\left[\frac{\sin\theta}{|G(j\omega_{w1})|}\right]\left[\frac{(2/T)^2+\omega_{w1}^2}{(2/T)^2\omega_{w1}}\right],\quad K_P=\frac{\cos\theta}{|G(j\omega_{w1})|}-\frac{K_D\omega_{w1}^2(2/T)}{(2/T)^2+\omega_{w1}^2} \tag{8-64}$$

下面给出 2 个 PID 设计示例。

例 8.4 先针对 PI 滤波器重复例 8.3 的设计问题。在例 8.3 中，我们期望的相位裕度是 55°，单位斜坡输入下的稳态误差是 0.5，我们为 $D(z)$增加了一个 $z=1$ 的极点，加上 $G(z)$原本就有一个 $z=1$ 的极点，使 $D(z)G(z)$在 $z=1$ 处出现 2 个极点，因此，系统对斜坡输入的稳态误差为 0(见 6.5 节)，满足稳态误差的设计要求。根据表 8-1 列出的 $G(z)$的频率响应，选$\omega_{w1}=0.400$，使

$$G(j\omega_{w1})=G(j0.4)=2.2761\angle(-123.68°)$$

根据式(8-56)，得：

$$\theta=180°+55°-(-123.68°)=358.68°=-1.32°$$

可以看出，正如我们期待的，在稳定裕度频率点处，滤波器的相角很小。再根据式(8-63)，得：

$$K_P=\frac{\cos(-1.32°)}{2.2768}=0.4392$$

$$K_I=\left[\frac{-\sin(-1.3°)}{2.278}\right]\times 0.4=0.0040$$

根据式(8-52)，得 PI 控制器传递函数为：

$$D(z)=\frac{0.4393z-0.4391}{z-1}$$

根据式(8-46)，得 PI 控制器的零点为：

$$\omega_{w0}=\frac{K_I}{K_D}=0.0092$$

可见，此零点非常小。因此，系统带宽得以大幅度降低，获得了良好的稳态误差响应，但到达稳态的时间却相对很长。系统的增益裕度为 16.0dB、相位裕度为 55°、单位阶跃响应的上升时间为 2.95s、超调为 13.8%、稳定时间为 19.4s，单位斜坡输入作用于系统 20s 后的响应误差为 1.99s，在后 50s，仅降低到 1.52s。如果选$\omega_{w1}=0.3$，则算得 PI 增益中的 $K_P=0.3125$、$K_I=0.0154$，使

$$D(z)=\frac{0.3129z-0.3121}{z-1}$$

及

$$\omega_{w0}=\frac{K_I}{K_P}=0.0493$$

系统频带变宽。使用此 PI 控制器之后，系统增益裕度上升到 18.4dB、相位裕度为 55°、单位阶跃的上升时间推至 3.65s、超调增加到 18.4%、稳定时间延至 43.0s、对单位斜坡输入的误差 20s 后降低到 1.37s、后 50s 减小到 0.27s。

完成以上计算工作的 MATLAB 执行程序如下：

```
>> Gp = tf([2],[1 3 2 0]); T=0.05;
Gz = c2d(Gp,T); %Assumes ZOH;
Pm = input('Desired system phase margin Pm = '); % enter 55
ww1 = input('Phase margin frequency ww1 = '); % enter 0.4 & 0.3
[magGww1,phaseGww1] = bode(Gz,ww1)
thetad = 180+Pm-phaseGww1; thetar = thetad*pi/180;
```

```
KD = 0;
% Equation (8-63)
KP = cos(thetar)/magGww1, KI = -ww1*sin(thetar)/magGww1
ww0=KI/KP
% Equation (8-52)
Dz = KP+(KI*T/2)*tf([1 1],[1 -1],T)+(KD/T)*tf([1 -1],[1 0],T)
DzGz = Dz*Gz;
Cz=feedback(DzGz,1);
disp('Gain and Phase Margins:')
[Gm,Pm] = margin(DzGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
disp('Unit-step performance metrics:')
stepinfo(Cz)
step2ramp = tf([T],[1 -1],T); % Converts unit-step to unit-ramp
ct = step(step2ramp*Cz,60); % Generates c(t)
disp('Unit-ramp errors at 20 s and 50 s:')
ct20err = 20-ct(20/T) % error = 20 - c(20)
ct50err = 50-ct(50/T) % error = 50 - c(50)
```
◀

例 8.5 本例针对 PID 控制器重复例 8.4 的设计过程。要用到设计方程式(8-57)和式(8-58)(即最初，先忽略微分项中的极点)。根据式(8-57)，得：

$$K_P = \frac{\cos\theta}{|G(j\omega_{w1})|}$$

可见，ω_{w1}选得越大，$|G(\omega_{w1})|$越小(见表 8-1)，从而使K_P越大，开环增益因而得以提高，有许多理由认为这一点是令人期待的。选$\omega_{w1}=1.2$，有：

$$G(j\omega_{w1}) = G(j1.2) = 0.4574\angle(-172.88°)$$

根据式(8-56)，有：

$$\theta = 180° + 55° - (-172.88°) = 407.88° = 47.88°$$

根据式(8-57)，有：

$$K_P = \frac{\cos(47.88°)}{0.4574} = 1.4664$$

根据式(8-58)，有：

$$K_D\omega_{w1} - \frac{K_I}{\omega_{w1}} = \frac{\sin\theta}{|G(j\omega_{w1})|}$$

代入已求出的$G(\omega_{w1})$，得：

$$K_D = \left[\frac{\sin(47.88°)}{0.4574}\right]\frac{1}{1.2} + K_I\left(\frac{1}{1.2}\right)^2 = 1.3513 + 0.6944K_I$$

如果像例 8.4 那样，选K_I为 0.004，则K_D为 1.3541。根据式(8-52)得 PID 控制器传递函数为：

$$D(z) = \frac{28.55z^2 - 55.63z - 27.08}{z^2 - z}$$

上述配置所产生的相位裕度为 53.7°、增益裕度为 23.2dB、单位阶跃响应的上升时间为 1.00s、超调为 14.3%、稳定时间为 3.60s，单位斜坡输入作用于系统 20s 后的响应误差为 0.699s。

请注意，当我们忽略式(8-52)的实际微分滤波器的高频极点，且使用式(8-57)和式(8-58)计算 PID 控制器增益时，所实现的相位裕度有误差。用式(8-61)和式(8-62)来计算 PID 控制器增益，可以使相位裕度达到所期望的值。参照例 8.4 的做法，将$K_I=0.004$代入式(8-61)和式(8-62)，得$K_D=1.3553$、$K_P=1.4177$，得 PID 控制器传递函数为：

$$D(z) = \frac{28.52z^2 - 55.63z - 27.11}{z^2 - z}$$

该控制器的分子系数得轻微改变，使系统相位裕度达到了期望的 55°、增益裕度为 23.3dB、相位裕度为 55°、单位阶跃的上升时间为 1.05s、超调为 13.0%、稳定时间为 3.60s、对单位斜坡输入的误差 20s 后为 0.720s。

完成本例计算工作的 MATLAB 执行程序如下，其中，为代码送入K_I的取值，且用

式(8-61)和式(8-62)计算K_D和K_P：

```
>> Gp = tf([2],[1 3 2 0]); T=0.05;
Gz = c2d(Gp,T); %Assumes ZOH;
Pm = input('Desired system phase margin Pm = '); % enter 55
ww1 = input('Phase margin frequency ww1 = '); % enter 1.2
KI = input('Code is to set to enter KI= '); % enter 0.004
[magGww1,phaseGww1] = bode(Gz,ww1)
thetad = 180+Pm-phaseGww1; thetar = thetad*pi/180
% disp('Case (a): Use Equations (8-57) and (8-58)')
% KP = cos(thetar)/magGww1
% KD = (KI/ww1 + sin(thetar)/magGww1)/ww1
disp('Case (b): Use Equations (8-61) and (8-62)')
disp('Option (1): Enter KI, compute KD and KP)')
KD = (sin(thetar)/magGww1/ww1 + KI/ww1^2)*(1 + ww1^2/(2/T)^2)
KP = cos(thetar)/magGww1 - KD*ww1^2/(2/T+ww1^2*T/2)
% disp('Option (2): Enter KD, compute KP and KI)')
% KP = cos(thetar)/magGww1-(KD*ww1^2*(2/T))/((2/T)^2+ww1^2)
% KI = ww1*((KD*ww1*(2/T)^2)/((2/T)^2+ww1^2) - sin(thetar)/magGww1)
% Find Dz using Equation (8-51)
Dz_PID = KP + (KI*T/2)*tf([1 1],[1 -1],T) + (KD/T)*tf([1 -1],[1 0],T)
Dz_PIDGz=Dz_PID*Gz; Cz=feedback(Dz_PIDGz,1);
disp('Gain and Phase Margins:')
[Gm,Pm] = margin(Dz_PIDGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
disp('Unit-step performance metrics:')
stepinfo(Cz), step(Cz)
step2ramp = tf([T],[1 -1],T); % Converts unit-step to unit-ramp
ct = step(step2ramp*Cz,60); % Generates ramp response c(t)
disp('Unit-ramp error at 20 s:')
ct20err = 20-ct(20/T) % error = 20 - c(20)
```

图 8-25 给出了该 PID 控制器的单位阶跃响应，例 8.3 的相位滞后-超前控制器的单位阶跃响应同绘于该图上。我们对比地看，滞后-超前控制器使响应的上升时间为 1.05s、超调为 10.8%、稳定时间为 5.30s；PID 控制器使响应的上升时间为 1.05s、超调为 13.08%、稳定时间为 3.60s。

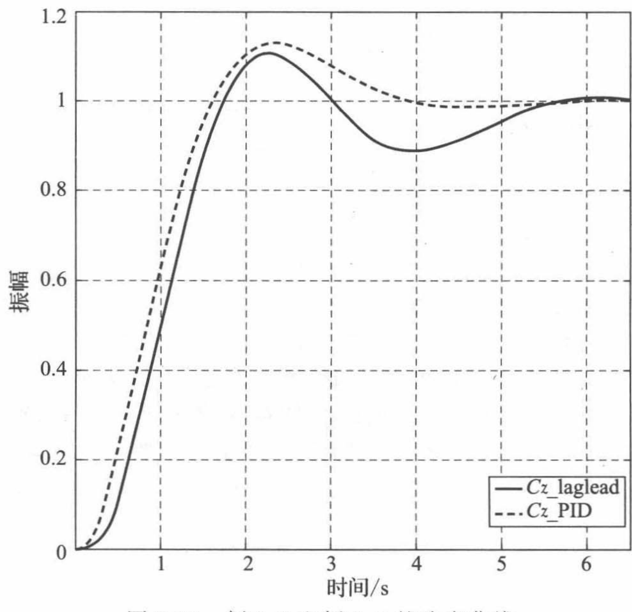


图 8-25 例 8.3 和例 8.5 的响应曲线

MATLAB 软件含有 PID 设计工具包(称为 pidtool)用于控制增益的自动计算。下面是一种 MATLAB 软件的 PID 控制器格式(称为 PIDF)：

$$D(z)=K_{\mathrm{P}}+K_{\mathrm{I}}\left[\frac{T}{z-1}\right]+K_{\mathrm{D}}\left[\frac{1}{T_{\mathrm{F}}+\dfrac{T}{z-1}}\right] \tag{8-65}$$

式中：T_{F}是设定高频极点以获得性能改进的参数。

我们应该记得，式(8-51)的微分滤波器在一个特定的位置($\omega_{wp}=T/2$)设定了一个高频极点，把式(8-65)改写成式(8-51)的形式：

$$D(z)=K_{\mathrm{P}}+K_{\mathrm{I}}\left[\frac{T}{z-1}\right]+K_{\mathrm{D}}\left[\frac{1}{T_{\mathrm{F}}}\left(\frac{z-1}{z-a}\right)\right],\quad a=\frac{T_{\mathrm{F}}-T}{T_{\mathrm{F}}} \tag{8-66}$$

该控制器的高频极点为：

$$\omega_{wp}=\frac{2}{T}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$$

请注意，若设置$T_{\mathrm{F}}=T$，则$a=0$，且式(8-65)和式(8-66)简化为式(8-51)。如果$T_{\mathrm{F}}=2T$，则$\omega_{wp}=2/(3T)$，截止频率降低 33.3%。下面举例说明 MATLAB 工具包的使用。

例 8.6 本利针对 PID 控制器利用 MATLAB 工具包重复例 8.4 的设计过程。第一步，用 MATLAB 工具包产生控制对象(前述例子中标记为 Gz)的 z 变换；第二步，输入函数 pidtool(Gz)，该命令将打开一个提供若干选项的图形用户界面(GUI)如图 8-26 所示。有一组参数用于式(8-66)，以计算(或调整)PID 增益，所选择的设置如下：

Design Mode: *Extended*
Form: *Parallel*
Type: *PIDF*
Plot: *Step*
Response: *Reference tracking*

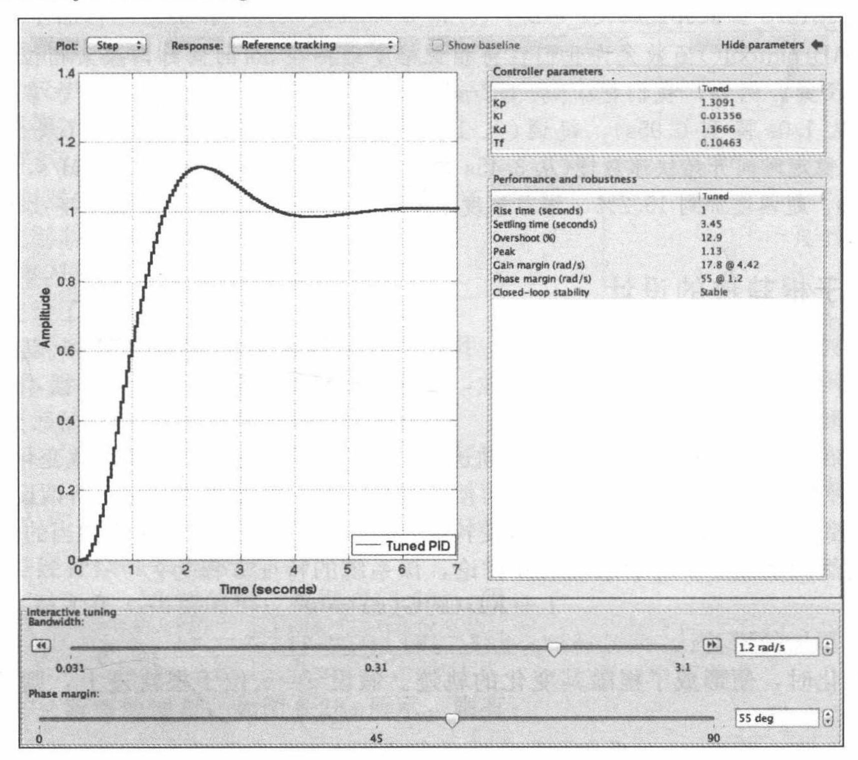


图 8-26　MATLAB 工具包 pidtool()函数截图

来源：MathWorks 公司，具有转载许可

第三步，点击窗口右上角的箭头显示参数。准备在窗口底部用两个标记为带宽和相位裕度的交互式调整滑块输入控制器指标，并设置相位裕度为55°；用带宽滑块设置希望达到指定相位裕度的频率ω_{w1}。MATLAB pidtool()函数在控制器参数显示区显示出所得的常数(K_P，K_I，K_D和T_F)。我们还会在系统性能和鲁棒性显示区看到所产生的阶跃响应参数和频率响应参数。用带宽滑块输入所需的相位裕度频率($\omega_{w1}=1.2$rad/s)，允许 pidtool()函数显示下面一组控制器参数(见图 8-26)：$K_P=1.3091$，$K_I=0.01356$，$K_D=1.3666$和$T_F=0.10463$，将这些值代入式(8-65)，得：

$$D(z)=\frac{14.37(z-0.9995)(z-0.9569)}{(z-1)(z-0.5221)}$$

由此产生的闭环系统性能参数为，上升时间1.0s、稳定时间3.45s、超调12.9%、增益裕度17.8dB、相位裕度55°。下面是计算所设计的PID控制器传递函数、测试其性能参数的MATLAB执行程序：

```
>> T = 0.05; Gp = tf([2],[1 3 2 0]); Gz = c2d(Gp,T);
disp(' ')
disp('Now opening MATLAB pidtool GUI')
disp('Set Pm = 55, ww1 = 1.2')
pidtool(Gz,'pidf')
% Gains from MATLAB pidtool with Pm = 55, ww1 = 1.2
KP = 1.3091, KI = 0.01356, KD = 1.3666, TF = 0.10463
% Find Dz using Equation (8-65)
disp('PIDF using Equation (8-65)')
Dz_PIDF = KP + (KI*T)*tf([1],[1 -1],T) + KD*tf([1 -1],[TF -TF+T],T)
Dz_PIDF = zpk(Dz_PIDF)
Dz_PIDFGz = Dz_PIDF*Gz;
Cz_PIDF = feedback(Dz_PIDFGz,1);
disp('PIDF Gain and Phase Margin:')
[Gm,Pm] = margin(Dz_PIDFGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
% disp('Unit-step performance metrics:')
PIDF_stepinfo = stepinfo(Cz_PIDF)
```

MATLAB pidtool()函数允许我们在将相位裕度维持在55°的同时，探索相位裕度频率设计点的各种设置。例如，我们把ω_{w1}从1.2rad/s增加到1.3rad/s，带来影响非常小的指标有上升时间(从1.0s降到0.95s)、超调(从12.9%降到12.6%)、增益裕度(从17.8dB降到17.5dB)，但稳定时间开始快速放慢(从3.45s到4.15s)；再把ω_{w1}增加到1.35rad/s，则上升时间降低到0.90s、超调增加到15.2%、增益裕度下降到17.1dB，而稳定时间大幅度放慢到14.8s。◀

8.11 基于根轨迹的设计

在前面讨论的频率响应设计过程中，我们试图重塑系统开环频率响应，以达到一定的稳定裕度、瞬态响应特性、稳态响应特性，等等。即使我们给出了设计方程，仍在很大程度上需要试验并存在偏差。

本节介绍了一种不同的设计方法：根轨迹法。系统特征方程的根会随增益变化而变化，根轨迹就是这种变化的图线。通过根轨迹，可使系统瞬态响应特性清晰可见。所谓设计方法，就是通过数字控制器来增加极点和零点，以使特征方程的根调整到z平面上更适当的位置。

我们仍然围绕图8-6所示系统展开讨论，该系统的特征方程为：

$$1+KD(z)G(z)=0 \tag{8-67}$$

式中：K是添加的增益。

K值变化时，便形成了根随其变化的轨迹。假设$z=z_a$位于根轨迹上，则点z_a可以使式(8-67)成立，即

$$K=\frac{1}{|D(z_a)G(z_a)|} \tag{8-68}$$

$$\angle(D(z_a)G(z_a))=\pm 180° \tag{8-69}$$

例如，设 $D(z)=1$，$KG(z)$为：

$$KG(z)=\frac{K(z-z_1)}{(z-z_2)(z-z_3)} \tag{8-70}$$

式中：z_1、z_2和z_3均为实数。

图 8-27 对确定测试点 z 是否位于根轨迹上给予了说明。

如果 z 位于根轨迹上，则根据式(8-69)，有：

$$\theta_1-\theta_2-\theta_3=\pm 180^\circ$$

根据式(8-68)，在这点上产生一个特征方程根的 K 值满足下式：

$$K=\frac{|z-z_2||z-z_3|}{|z-z_1|}$$

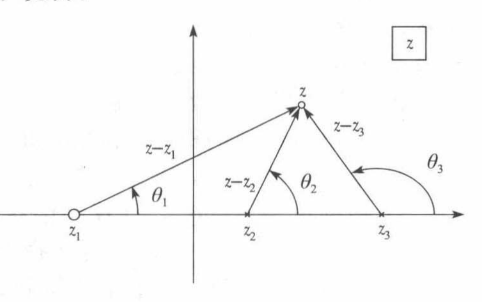


图 8-27 根轨迹上的点

经上述关于根轨迹的简短讨论，下面介绍设计程序。设一阶控制器传递函数为：

$$D(z)=\frac{K_d(z-z_0)}{z-z_p} \tag{8-71}$$

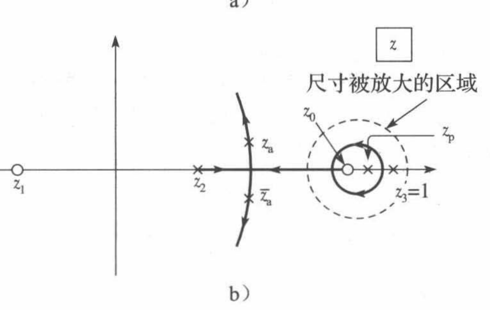
我们需要将控制器的直流增益置为单位 1($D(1)=1$)，以免影响稳态响应，因此，

$$K_d=\frac{1-z_p}{1-z_0} \tag{8-72}$$

上述设计中，增益 K 被用来满足稳态误差的需求，并限制控制器极点取单位圆内的实数。对于相位超前控制器来讲，$z_0>z_p$，于是$K_d>1$；而相位滞后控制器的$z_0<z_p$使$K_d<1$。

相位滞后设计 先来讨论相位滞后设计问题。我们会把针对式(8-70)的控制对象$G(z)$的设计结果图示出来。图 8-28a 给出的是未经补偿的根轨迹草图。假设根z_a和$\bar{z}_a$的位置能够给出令人满意的瞬态响应，但必须增加环路增益，以产生较小的稳态误差，必须提高干扰抑制能力，等等。为此，我们加入控制器的极点和零点如图 8-28b 所示，并设$z_3=1$。如果$z_3\neq 1$，就将控制器的极点和零点设置在 $z=1$ 的附近。因为控制器的极点和零点与 $z=1$ 的点靠得很近(可复习例 8.1)，我们将图中这个点的附近区域进行了尺度上膨胀调整，于是在z_a点确定根位置的时候，它们(2 个极点和 1 个零点)基本上作为一个极点出现在图 8-28 中。注意到，补偿器的极点和零点造成根z_a轻微偏移到z_a'，使$z_a'\approx z_a$。考虑到

a)



b)

图 8-28 相位滞后设计

$$K_cD(z)G(z)=\frac{K_cK_d(z-z_0)(z-z_1)}{(z-z_p)(z-z_2)(z-z_3)}$$

式中：K_c是经补偿的系统增益。

因此，对于在 z_a'出现的根，根据式(8-68)，得：

$$K_c=\frac{|z_a'-z_p||z_a'-z_2||z_a'-z_3|}{K_d|z_a'-z_0||z_a'-z_1|}\approx\frac{|z_a-z_2||z_a-z_3|}{K_d|z_a-z_1|} \tag{8-73}$$

令K_u为根于z_a所需的增益，如图 8-28a 所示，则有：

$$K_u=\frac{|z_a-z_2||z_a-z_3|}{|z_a-z_1|} \tag{8-74}$$

根据式(8-73)和式(8-74)，有：

$$K_c \approx \frac{K_u}{K_d}$$

式中：K_u是未经补偿的系统增益。

K_d因相位滞后补偿而小于 1，于是，经补偿的系统增益K_c大于未经补偿的系统增益K_u。由此可知，相位滞后补偿允许我们增加开环增益，同时维持特征方程的根近似相同。当然，正像我们可以从图 8-28b 看到的，增加一个靠近 $z=1$ 的根，会使瞬态时间变长，导致系统的稳定时间推后。

相位滞后根轨迹设计步骤归纳如下：

1）选出所期望的根z_a的位置，求出在z_a设置根所需的未经补偿的系统增益K_u；

2）根据设计指标，确定经补偿的系统增益K_c；

3）根据$K_d=K_u/K_c$，计算补偿器增益K_d；

4）在足够靠近 $z=1$ 的位置选择补偿器的极点，使式(8-73)得以满足；

5）根据式(8-72)，通过下式得到补偿器的零点：

$$z_0 = 1 - \frac{1-z_p}{K_d} \tag{8-75}$$

由式(8-73)知，这是一种近似的方法。

例 8.7 已知图 8-29 所示系统中，$T=1$s，控制对象传递函数为：

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{0.368(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}$$

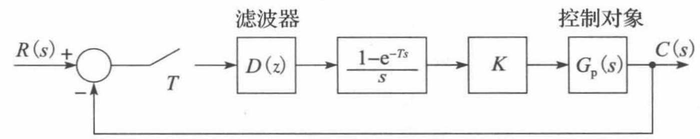


图 8-29　例 8.7 和例 8.8 系统

图 8-30a 给出了该系统未经补偿时的根轨迹，其中，$z_1=-0.718$、$z_2=0.368$、$z_3=1$。为了求出z_a和K_u，我们编写一个产生未经补偿的系统根轨迹的 MATLAB 程序，选z_a为临界阻尼点。MATLAB 代码如下：

```
>> T = 1; Gp=tf([1],[1 1 0]), Gz=c2d(Gp,T)
rlocus(Gz), axis([0 1 -0.5 0.5]), grid
```

该系统在 $K=0.196$ 时，获得 2 个相同极点 $z=0.648$，这时为临界阻尼状态。我们为该系统设计一个相位滞后补偿器，使补偿后的系统临界阻尼时，$K=0.8$，获得 2 个相同极点 $z\approx 0.65$。因此系统补偿后，稳定误差几乎降低了 4 倍。根据设计流程，有：

(1) $K_u=0.196$，$z_a=0.648$；

(2) $K_c=0.8$；

(3) $K_d=\dfrac{K_u}{K_c}=\dfrac{0.196}{0.8}=0.245$；

(4) 令$z_p=0.9990$(满足约束条件的随机数)；

(5) $z_0=1-\dfrac{1-0.999}{0.245}=0.9959$。

于是

$$D(z) = \frac{0.245(z-0.9959)}{z-0.999} = \frac{0.245z-0.2440}{z-0.999}$$

补偿后的系统根轨迹图如图 8-30b 所示。图中，$K=0.808$(更精准的值是 0.807 81)时，获得 2 个相同极点 $z=0.649$，这个位置的极点对很小的增益变化就极其敏感。闭环系统的第 3 个极点是 $z\approx 0.9959$(见图 8-28b)。设计完成后，使闭环系统获得如下性能指标：增益裕

度为 19.8dB、相位裕度为 69.1°、上升时间为 7.0s、稳定时间为 12.0s 和超调量为 1.46%。下面是完成设计任务的 MATLAB 程序：

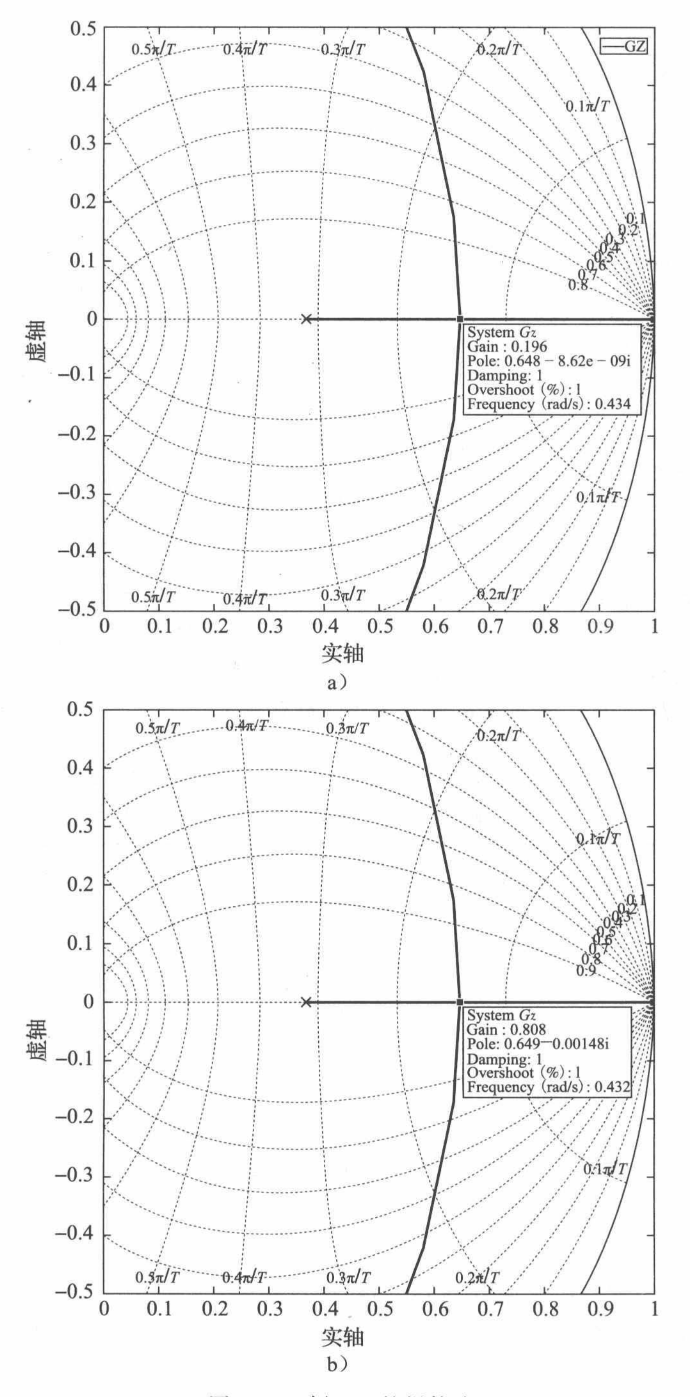


图 8-30 例 8.7 的根轨迹

资料来源：MathWorks 公司，具有转载许可

```
>> T = 1; Gp=tf([1],[1 1 0]); Gz=c2d(Gp,T);
Gz=zpk(Gz)
% Get Kc and za from system specifications
Kc = 0.8 % At critical damping
```

```
% Uncompensated Root Locus
rlocus(Gz), axis([0 1 -0.5 0.5]), grid
% Get Ku from rlocus and calculate Kd = Ku/Kc
Ku = 0.196
Kd = Ku/Kc
% Set zp=0.999 and calculate z0=1-(1-zp)/Kd
zp=0.9990
z0=1-(1-zp)/Kd
% Find D(z)
Dz=zpk(z0,zp,Kd,T)
DzGz=Dz*Gz
rlocus(DzGz,'-k'), axis([0 1 -0.5 0.5]), grid
% Root-locus near z = 0.995
% rlocus(DzGz,'-k'), axis([0.99 1.001 -0.00025 0.00025]), grid
% Set Kc to designed compensated system critical gain
% Closed-loop poles and zeroes
format long
Kc = 0.807813075
format short
Cz=feedback(Kc*DzGz,1); Cz=zpk(Cz)
disp('Gain and Phase Margin:')
[Gm,Pm] = margin(DzGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
disp('Unit-step performance metrics:')
Cz_stepinfo=stepinfo(Cz)
```

◀

相位超前设计 图 8-31 给出了相位超前设计的说明，下面进行简要介绍。首先，令控制器的零点与控制对象的极点相重合：$z=z_2$，将控制器的极点置于其零点的左侧，由此形成一个相位超前的控制器，它使根轨迹向左侧偏移，根z_b所对应的时间常数要小于根z_a所对应的时间常数，因此使系统的响应更快(宽频带)。

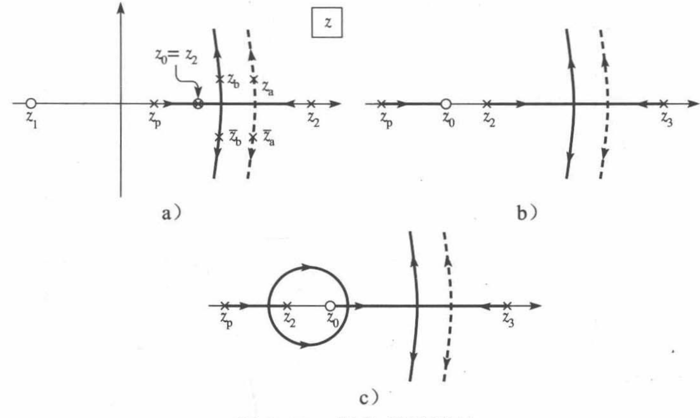


图 8-31 相位超前设计

相位超前设计流程归纳如下：

1) 选择所期望的根z_b的位置；

2) 选择补偿器的零点z_0，使其与$G(z)$的极点对消；

3) 选择经补偿的系统增益K_c和补偿器极点z_p的位置，且满足$z_p<z_0$，使补偿器具有超前性；

4) 根据式(8-67)求解未知量K_c和z_p，

$$K_c D(z_b)G(z_b)=-1 \tag{8-76}$$

正像我们从式(8-71)和式(8-72)中看到的，极点z_p在式(8-76)中出现了 2 次。

请注意，上述设计过程只设置了特征方程的一个根，其他根的位置有可能也不能满意我们的要求，这时，需要在步骤 3)和步骤 4)上进行迭代。在设计频率响应的时候，相位超前设计往往要伴随测试及误差分析。

实际上，精准的零极点对消不会发生，因此，我们实际上要面对 2 种情况。图 8-31b 所示的可以对第一种情况进行说明，即补偿器的零点位于被对消的控制对象极点的左侧，这时，闭环传递函数会有一个靠近补偿器零点左侧的附加极点；第二种情况是补偿器的零点位于控制对象极点的右侧，如图 8-31c 所示，这时，闭环传递函数会有一个靠近补偿器零点右侧的附加极点。这两种情况下，外加输入激励时，与附加极点相关联的瞬态响应项的幅度会很小，原因就是闭环传递函数有一个来自补偿器的零点总是与这个极点几乎重合。

总之，相位滞后控制器几乎不会造成根轨迹的偏移，它允许使用的开环增益较高。或如果使用相同的开环增益，系统将更稳定。相位超前控制器使根轨迹向左偏移，导致系统响应更快。

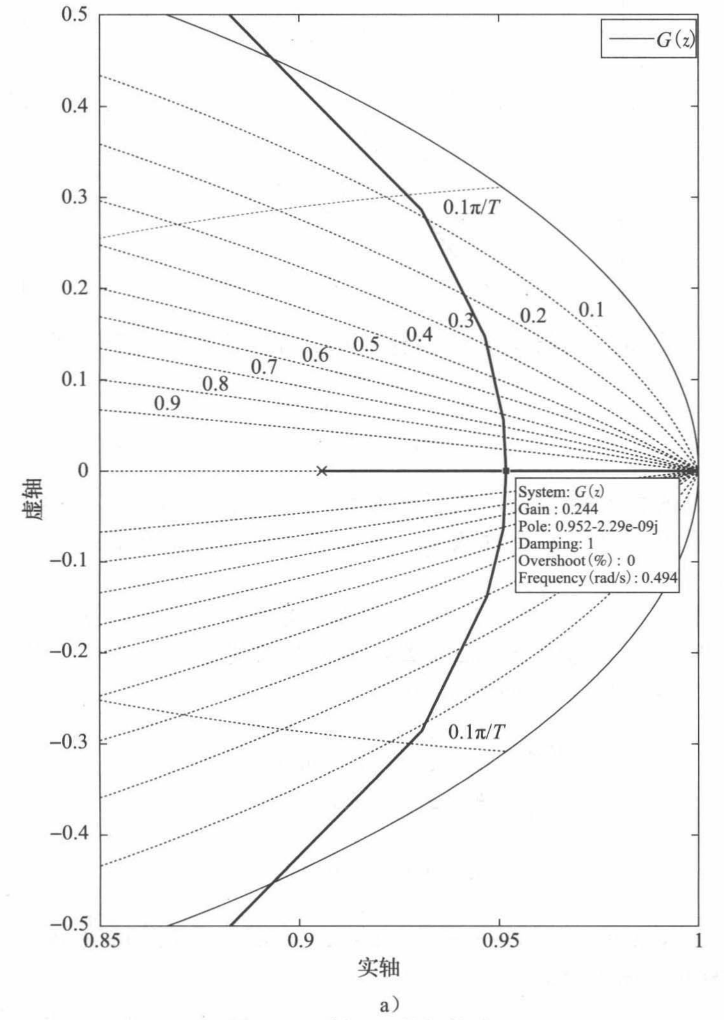
例 8.8 本例将说明相位超前设计往往要伴随测试及误差分析的问题。我们仍然使用图 8-29 所示系统，其控制对象的传递函数为：

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

鉴于极点 $s=-1$ 的时间常数为 1s，选 $T=0.1\mathrm{s}$，使

$$G(z)\,\frac{z-1}{z}\,\mathscr{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=\frac{0.004\,873(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)}$$

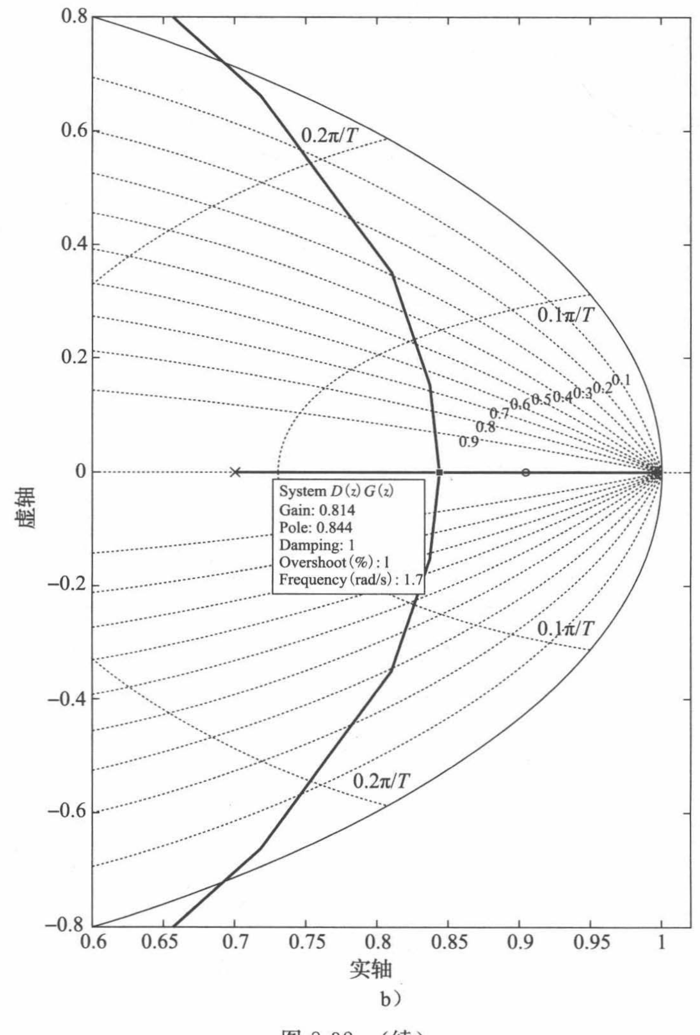
图 8-32a 给出了 $G(z)$ 的根轨迹。用于设计的 4 个步骤如下：



a)

图 8-32　例 8.8 的根轨迹

资料来源：MathWorks 公司，具有转载许可



b)

图 8-32 （续）

1）选择所期望的根z_b的位置，我们注意到，未经补偿的系统在 $K=0.244$ 时临界阻尼，在 $z=0.952$ 处相伴 2 个重合的极点，我们将设计一个临界阻尼补偿系统，使z_b位于实轴，且小于 0.952。

2）选择补偿器的零点z_0，使其与 $G(z)$的极点对消；把极点选择在 0.9048 处。

3）选择增益K_c和补偿器极点z_p的位置，我们尝试使用在 0.7 处设置 1 个极点(小于已选的z_0)，因为 $D(z)$的增益必须小于 1，得：

$$K_d=\frac{1-z_p}{1-z_0}=\frac{1-0.7}{1-0.9048}=3.15$$

$$D(z)=\frac{K_d(z-z_0)}{z-z_p}$$

$$=\frac{3.15(z-0.9048)}{z-0.7}$$

4)根据图 8-32b 绘制的补偿系统根轨迹，求得 $z_b=0.844$ 和 $K_c=0814$。可以用式(8-76)对上述结果进行核实：

$$K_c=\frac{-1}{D(z_b)G(z_b)}=-\left(\frac{z_b-0.7}{3.15(z_b-0.9048)}\right)\left(\frac{(z_b-1)(z_b-0.9048)}{0.004837(z_b+0.9672)}\right)$$

$$=-\left(\frac{z_b-0.7}{3.15}\right)\left(\frac{(z_b-1)}{0.004837\times(z_b+0.9672)}\right)\Big|_{z_b=0.844}=0.8136$$

本例我们选择设计临界阻尼系统，因此，实轴上要有两个闭环极点。一个极点位于 s 平面的 $s=-a$ 处，时间常数为 $\tau=1/a$，在 z 平面等效为 $e^{-aT}=e^{-T/\tau}$。对于未经补偿的临界阻尼系统：

$$e^{-0.1/\tau}=0.952$$

即 $\tau=0.03s$。对于经补偿的临界阻尼系统：

$$e^{-0.1/\tau}=0.844$$

即 $\tau=0.59s$。可见，补偿后的系统其响应速度快了 3.4 倍。图 8-33 给出了未经补偿和补偿后的系统的阶跃响应。未经补偿的系统阶跃响应特性指标为，上升时间 6.80s、稳定时间 11.9s 和超调 0%；补偿后的系统阶跃响应特性指标为，上升时间 1.90s、稳定时间 3.50s 和超调 0%。可以看出，系统补偿后其上升时间和稳定时间的确快了约 3.4 倍。

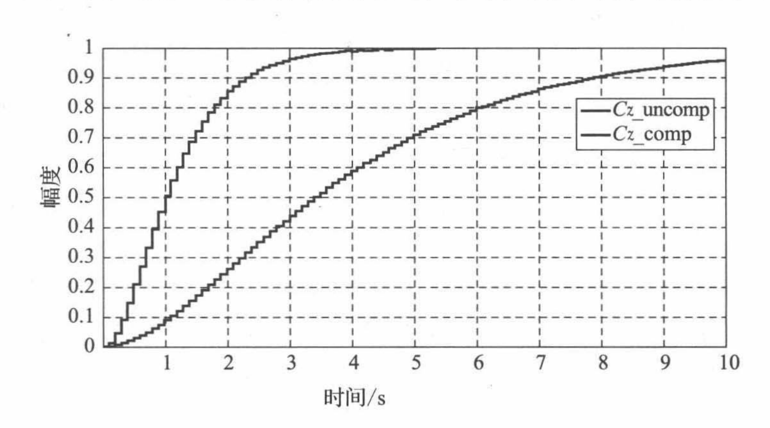


图 8-33 例 8.8 的阶跃响应

完成本例工作的 MATLAB 程序如下：

```
>> Gp=tf([1],[1 1 0]); T = 0.1; Gz=c2d(Gp,T); Gz=zpk(Gz)
% Uncompensated rlocus
% Plot Figure 8-32a
figure(1), rlocus(Gz), axis([0.85 1 -0.5 0.5]), grid
% Critical damping at Ku=0.244 with za = 0.952
% Choose zb as critically-damped compensated poles
% Choose z0 to cancel the Gp pole at 0.9048
Ku = 0.244, z0 = 0.9048
% Try the compensator at 0.7
zp = 0.7
% Find D(z)
Kd = (1-zp)/(1-z0)
Dz = zpk(z0,zp,Kd,T)
% Find Kc and zb from the compensated rlocus
DzGz=Dz*Gz
% Plot Figure 8-32b
figure(2), rlocus(DzGz), axis([.6 1.02 -0.8 0.8]), grid
% At Kc = 0.814, zb = 0.844
% Check results using equation (8-76)
zb = 0.844
Kc = -(zb-0.7)*(zb-1)/0.015244/(zb+0.9672)
Cz_uncomp=feedback(Ku*Gz,1); Cz_comp=feedback(Kc*DzGz,1);
% Plot Figure 8-33
figure(3), step(Cz_uncomp, '-k',Cz_comp,'-k',10), grid
disp('Unit-step performance metrics:')
Cz_uncomp_info=stepinfo(Cz_uncomp), Cz_comp_info=stepinfo(Cz_comp)
```

◀

上例中，我们应该关注这样一个问题，就是通过将控制器极点向左移动的简单办法就可以增加被补偿系统的响应速度。然而，这种极点的移动同时会增加控制器的高频增益，而这又有可能并不合设计者的意图。为了说明这一点，假设图 8-29 所示系统的控制对象是一台伺服电动机，K 是用来驱动电动机的功率放大器的增益。系统未经补偿时，其阶跃输入下的最大误差为 1，出现在 $t=0$ 的时刻(见图 8-33)。因为放大器的增益为 0.244，所以该放大器的最大输出就是 0.244。系统补偿后，最大误差也为 1，出现在 $t=0$ 时刻，这时，控制器的输出为 3.15(感兴趣的读者可以证明这一点)，该输出经增益为 0.814 的放大器之后，得到 2.56 的输出，是未经补偿系统放大器输出的 10 倍多，这就解释了电动机在高电压输入下的快速响应。不过，这种相位超前补偿所产生的高电压有可能迫使系统进入非线性工作区。关于进入非线性工作区可能带来的影响的讨论已超出本书的范围，但应强调，对工作在非线性区域对象的线性分析结果将不再适用。

我们利用例 8.1 的系统再举最后一例，例中，我们首先用根轨迹法设计临界阻尼超前控制器，然后适当增加开环增益，以使相位裕度达到 55°。

例 8.9 可以利用例 8.8 的 MATLAB 程序，计算出该例控制器的参数。首先，核实离散开环传递函数 $G(z)$：

$$G(z)=\frac{4.014\times10^{-5}\times(z+3.595)(z+0.258)}{(z-1)(z-0.9512)(z-0.9048)}$$

确定控制器时，可以用控制器的零点对消离散控制对象在 0.9512 处的极点。倘若我们依然假设控制器的极点随机地确定为 0.7，则为使 $D(1)=1$，控制器增益必须取为 $K_d=6.146$。接下来，绘制 $D(z)G(z)$ 的根轨迹。由根轨迹可知，闭环增益 $K_c=0.42$ 时，控制系统临界阻尼，此时，闭环的根为 0.957、无超调。我们希望对这样的系统通过增加 K_c 加快系统的响应速度，同时允许出现一些超调。通过测试及误差分析，获得用于提高增益的因数为 2.57，最终形成的控制器传递函数为：

$$D(z)=\frac{(2.57\times0.42\times6.148)\times(z-0.9512)}{(z-0.7)}$$

$$=\frac{6.46(z-0.9512)}{(z-0.7)}$$

该控制器使系统获得相位裕度为 55.1°、增益裕度为 16.7dB、上升时间为 1.2s、稳定时间为 4.2s、超调为 12.9%，利用式(6-21)算得单位斜坡误差为 0.916。

上述工作也可以用 MATLAB 的 sisotool()函数来完成，为使用 sisotool()函数，首先需要用 MATLAB 组件创建 $G(z)$，然后启用 sisotool()函数，将控制对象的模型导入 System Data。

MATLAB 的 sisotool 函数语句如下：

```
>> Gp = tf([2],[1 3 2 0]); Gz = c2d(Gp,.05); Gz=zpk(Gz)
sisotool
```

下一步，进入补偿编辑器并加入零极点。所供选择的是实数极点、复数极点、积分器、实数零点、复数零点、微分器、超前、滞后以及阶次。本例选超前选项，然后，sisotool()函数设置 1 个实数零点为 0.951 23 和 1 个实数极点为 0.606 53、阻尼系数为 1.0，以及直流增益为 1.0。变实数零点为 0.9512、实数极点为 0.70(上面设计的值)，调整补偿器增益以达到 55°的相位裕度。上述工作可以通过以下操作来完成：在 Control and Estimation Tools Manager 窗口(见图 8-34)尝试不同的滤波器直流增益值(从 1.0 变到 1.08)，或在 SISO Design Task 窗口(见图 8-35)的 open-loop Bode 栏调节曲线(点击正方形标记提升曲线，以使增益裕度降低到 16.7dB)。最后给出滤波器增益为：

$$K_d=a_0\frac{1-z_p}{1-z_0}=1.08\left(\frac{1-0.70}{1-0.9512}\right)=6.64$$

与上面获得的结果相同。

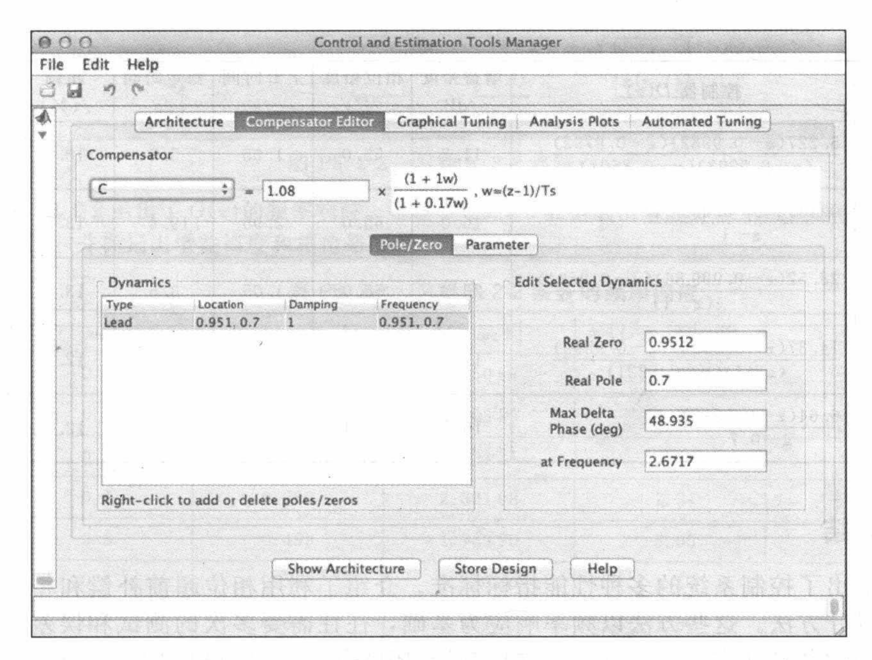


图 8-34　MATLAB sisotool 的 Control and Estimation Tools Manage 窗口

资料来源：MathWorks 公司，具有转载许可

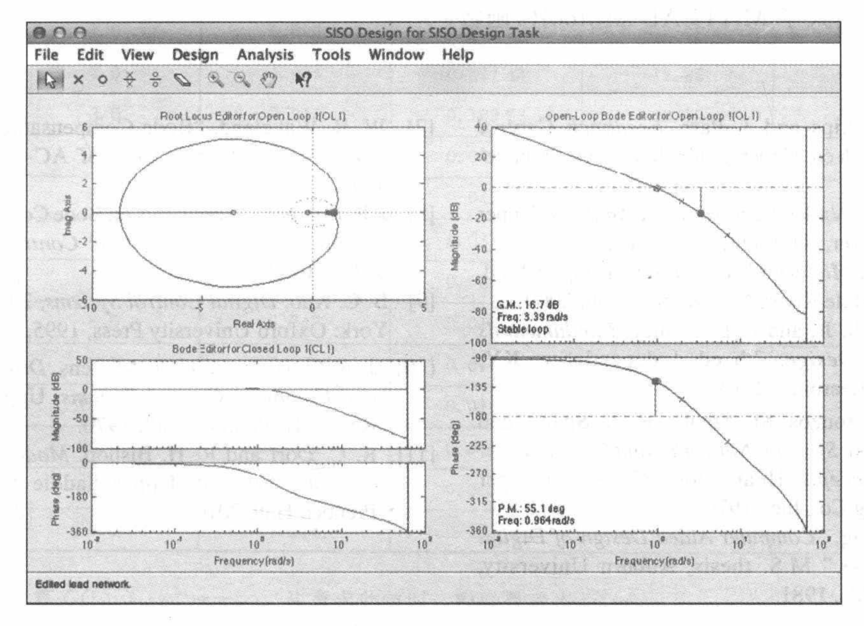


图 8-35　MATLAB sisotool 的 SISO Design Task 窗口

资料来源：MathWorks 公司，具有转载许可

本章围绕例 8.1 的系统设计出来几种控制器，表 8-3 对这些设计结果进行了归纳。

表 8-3　例 8.1-8.6 及 8.9 所得控制器的性能指标对比

设计类型	控制器 $D(z)$	增益裕度 /dB	相位裕度 /(°)	上升时间 /s	稳定时间 /s	超调 /(%)	斜坡误差
8.1 lag	$\frac{0.389(z-0.9982)}{z-0.9993}$	16.8	55.9	3.15	32.4	14.1	1.00
8.2 lead	$\frac{6.528(z-0.9711)}{z-0.8111}$	12.4	55.0	1.05	5.2	11.4	1.00

（续）

设计类型	控制器 $D(z)$	增益裕度/dB	相位裕度/(°)	上升时间/s	稳定时间/s	超调/(%)	斜坡误差
8.3 lag-lead	$\frac{5.227(z-0.9982)(z-0.9792)}{(z-0.9993)(z-0.8604)}$	11.2	55.0	1.05	5.3	10.7	0.50
8.4 PI	$\frac{0.4393(z-0.99954)}{z-1}$	16.0	55.0	2.95	19.4	13.8	0
8.5 PID	$\frac{28.52(z-0.99986)(z-0.9504)}{z(z-1)}$	23.3	55.0	1.05	3.6	13.0	0
8.6 pidtool	$\frac{14.37(z-0.9995)(z-0.9569)}{(z-1)(z-0.5221)}$	17.8	55.0	1.0	3.45	12.9	0
8.9 sisotool	$\frac{6.64(z-0.9512)}{z-0.7}$	16.7	55.1	1.25	4.25	12.6	0.98

8.12 小结

本章给出了控制系统的多种性能指标标准。介绍了利用相位超前补偿和相位滞后补偿的控制器设计方法。这些方法以频率响应为基础，往往需要多次的测试和误差分析，是比较常用的补偿器设计方法。讨论了三项控制器(PID)设计，PID控制器是一种特殊的滞后-超前型控制器。用一个例子说明了MATLAB pidtool()函数的使用。最后，研究了根轨迹设计方法并引入了MATLAB sisotool()函数。

参考文献

[1] C. L. Phillips and J. Parr, *Feedback Control Systems,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[2] M. E. Van Valkenberg, *Network Analysis.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1974.

[3] K. Ogata, *Modern Control Engineering,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2009.

[4] C. H. Roth, Jr. and L. L. Kinney, *Fundamentals of Logic Design,* 7th ed. Independence, KY: Cengage Learning, 2013.

[5] M. L. Dertouzos, M. Athans, R. N. Spann, and S. J. Mason, *Systems, Networks, and Computation: Basic Concepts.* Huntington, NY: R.E. Krieger Publishing Co., Inc., 1979.

[6] C. I. Huang, "*Computer Aided Design of Digital Controllers,*" M.S. thesis, Auburn University, Auburn, AL, 1981.

[7] W. R. Wakeland, "Bode Compensator Design," *IEEE Trans. Autom. Control* AC-21, p. 771, 1976.

[8] J. R. Mitchell, "Comments on Bode Compensator Design," *IEEE Trans. Autom. Control* AC-22, p. 869, 1977.

[9] B. C. Kuo, *Digital Control Systems,* 2d ed. New York: Oxford University Press, 1995.

[10] J. A. Cadzow and H. R. Martens, *Discrete-Time and Computer Control Systems.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1970.

[11] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems,* 12th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2010.

习题

8.2-1 二阶模拟系统描述如下：

$$T(s)=\frac{G_p(s)}{1+G_p(s)},\quad G_p(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

式中：$T(s)$为闭环传递函数；$G_p(s)$为控制对象传递函数。证明：相位裕度ϕ_m和阻尼系数ζ具有关系$\phi_m\approx 100\zeta$，请在图8-2上勾勒出这个关系。

8.2-2 在图P8.2-2所示系统中，$T=0.2$。

(1) 证明：控制对象的脉冲传递函数为：

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=\frac{0.01873z+0.01752}{(z-1)(z-0.8187)}$$

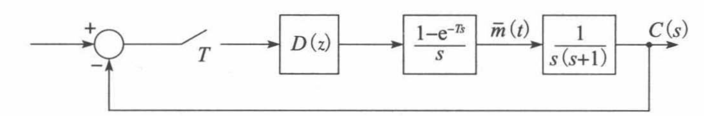


图 P8. 2-2　习题 8. 2-2 系统

(2) 表 P8. 2-2 给出了 $G(z)$ 的频率响应。根据表 P8. 2-2 数据画出未经补偿系统的伯德图及奈奎斯特图，并标记出增益裕度和相位裕度。

表 P8. 2-2　习题 8. 2-2 系统的频率响应

ω_w	ω	$\lvert G(\mathrm{j}\omega_w)\rvert$	$\lvert G(\mathrm{j}\omega_w)\rvert$/dB	$\angle G(\mathrm{j}\omega_w)$
0. 1	0. 100	9. 950 54	19. 95	−96. 28
0. 2	0. 200	4. 903 25	13. 80	−102. 45
0. 3	0. 299	3. 193 31	10. 08	−108. 41
0. 4	0. 399	2. 321 98	7. 31	−114. 08
0. 5	0. 499	1. 789 90	5. 05	−119. 40
0. 6	0. 599	1. 430 46	3. 10	−124. 36
0. 7	0. 698	1. 171 91	1. 37	−128. 95
0. 8	0. 798	0. 977 94	−0. 19	−133. 17
0. 9	0. 897	0. 827 99	−1. 63	−137. 05
1. 0	0. 996	0. 709 45	−2. 98	−140. 61
2. 0	1. 974	0. 227 43	−12. 86	−164. 43
3. 0	2. 914	0. 109 73	−19. 19	−177. 74
4. 0	3. 805	0. 065 11	−23. 72	−187. 04
5. 0	4. 636	0. 043 72	−27. 18	−194. 33
6. 0	5. 404	0. 031 86	−29. 93	−200. 38
7. 0	6. 107	0. 024 59	−32. 18	−205. 55
8. 0	6. 747	0. 019 80	−34. 06	−210. 03
9. 0	7. 328	0. 016 46	−35. 67	−213. 95
10. 0	7. 854	0. 014 03	−37. 05	−217. 40
20. 0	11. 071	0. 005 58	−45. 07	−236. 77
30. 0	12. 490	0. 003 52	−9. 07	−243. 95
40. 0	13. 258	0. 002 59	−51. 73	−246. 94

(3) 计算 $G(\mathrm{j}\omega_w)$，$\omega_w \to +\infty$。注意求此值时，没必要求出 $G(w)$。

(4) 用(2)问的结果估计单位阶跃响应的超调量。

(5) 根据(4)问的结果回答：该未经补偿系统的特征方程的零点是实数还是复数，为什么？

(6)用 MATLAB 程序求上升时间 t_r，其阶跃响应将有 21% 的超调。

8. 2-3　对习题 8. 2-2 系统，如果希望其单位斜坡输入下的稳态误差常数 K_v（见式(6-20)）为 4，所产生的稳态误差为 0. 25。

(1) 对该系统，重复习题 8. 2-2 的(1)问、(2)问、(3)问和(4)问。

(2) 用相位裕度 ϕ_m 和图 8-2 所示特性，估计特征 ζ，M_r 和 M_p。

(3) 用 MATLAB 程序验证 M_p 的取值，其阶跃响应的 $M_p \approx 1.62$。

8. 2-4　对于习题 8. 2-2 系统，控制对象频率响应 $G(\mathrm{j}\omega_w)$ 见表 P8. 2-2。

(1) 令数字控制器为增益 K，即 $D(z)=K$，求使相位裕度达到 45° 的 K 值。

(2) 用 MATLAB 程序获得(1)问系统的阶跃响应，求上升时间 t_r 和百分比超调。

8.4-1　在图 P8.2-2 给出的系统中，$T=1\text{s}$，控制对象频率响应$G(\mathrm{j}\omega_w)$如表 P8.4-1 所示。

表 P8.4-1　习题 8.4-1 的频率响应

ω_w	ω	$\lvert G(\mathrm{j}\omega_w)\rvert$	$\lvert G(\mathrm{j}\omega_w)\rvert$ /dB	$\angle G(\mathrm{j}\omega_w)$
0.1	0.099	9.954 73	19.96	−98.56
0.2	0.199	4.911 92	13.82	−106.98
0.3	0.297	3.206 93	10.12	−115.10
0.4	0.394	2.341 03	7.38	−122.83
0.5	0.490	1.814 74	5.17	−130.10
0.6	0.582	1.461 24	3.29	−136.87
0.7	0.673	1.208 53	1.64	−143.14
0.8	0.761	1.020 11	0.17	−148.92
0.9	0.845	0.875 30	−1.15	−154.24
1.0	0.927	0.761 40	−2.36	−159.13
2.0	1.570	0.300 58	−10.44	−190.88
3.0	1.965	0.182 20	−14.78	−205.37
4.0	2.214	0.132 44	−17.55	−212.26
5.0	2.380	0.105 79	−19.51	−215.43
6.0	2.498	0.089 42	−20.97	−216.61
7.0	2.585	0.078 48	−22.10	−216.68
8.0	2.651	0.070 73	−23.00	−216.11
9.0	2.704	0.065 02	−23.73	−215.18
10.0	2.746	0.060 68	−24.33	−214.06
20.0	2.942	0.044 55	−27.02	−203.02
30.0	3.008	0.040 97	−27.75	−196.54
40.0	3.041	0.039 64	−28.03	−192.77

(1) 令 $D(z)=1$，如果系统稳定，求其相位裕度；

(2) 令数字控制器为增益 K，即 $D(z)=K$，求使相位裕度达到 45°的 K 值；

(3) 用 MATLAB 程序获得(2)问系统的阶跃响应，求上升时间t_r和百分比超调；

(4) 设计一个直流增益为单位 1 的、相位滞后补偿器，使其产生约 45°的相位裕度；

(5) 用 MATLAB 程序获得(4)问系统的阶跃响应，求上升时间t_r和百分比超调。

8.4-2　出于使习题 8.2-3 系统满足稳态约束的考虑，必须将数字控制器直流增益取 4。

(1) 设计一个直流增益为 4、相位裕度为 45°的相位滞后控制器；

(2) 对经补偿的系统估计其阶跃响应中的超调百分比；

(3) 用 MATLAB 程序验证(2)问的阶跃响应结果，其阶跃响应的超调约为 24%。

8.4-3　习题 1.6-1 给出了一个温度控制系统的框图描述，如图 P8.4-3 所示。在此，我们忽略干扰输入，将增益 $H=0.04$ 的传感器移到前向通路，以形成单位反馈系统。与习题 1.6-1 相比，因环路传递函数未变，故稳定性不变。注意，$c(t)$是测试室温度，单位取℃。习题 6.2-4 证明 $T=0.6\text{s}$ 时，函数 $G(z)$为：

$$G(z)=(0.04)\,\frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{2}{s(s+0.5)}\right]=\frac{0.041\,47}{z-0.7408}$$

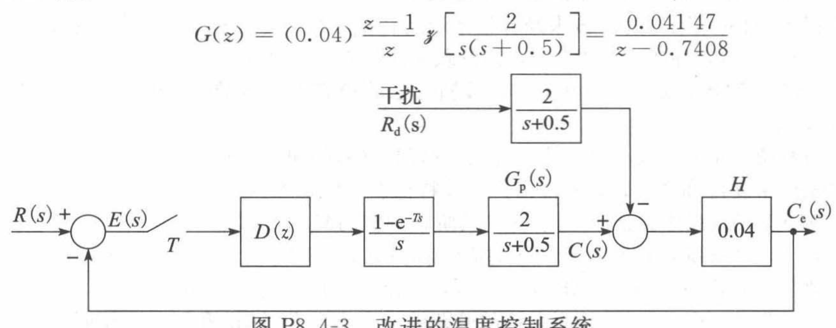


图 P8.4-3　改进的温度控制系统

$G(z)$的频率响应见表 P8.4-3，传感器增益 $H=0.04$ 未出现在该表中。

表 P8.4-3　习题 8.4-3 的频率响应

ω_w	ω	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$	$\lvert G(j\omega_w)\rvert$/dB	$\angle G(j\omega_w)$
0.1	0.100	3.922 95	11.87	−13.11
0.2	0.199	3.716 73	11.40	−25.38
0.3	0.299	3.437 00	10.72	−36.29
0.4	0.398	3.136 70	9.92	−45.71
0.5	0.496	2.849 38	9.09	−53.74
0.6	0.593	2.590 43	8.26	−60.60
0.7	0.690	2.363 93	7.47	−66.52
0.8	0.785	2.168 51	6.72	−71.68
0.9	0.879	2.000 67	6.02	−76.23
1.0	0.971	1.856 49	5.37	−80.30
2.0	1.801	1.123 45	1.01	−107.02
3.0	2.442	0.878 30	−1.12	−122.59
4.0	2.920	0.769 32	−2.27	−133.12
5.0	3.276	0.712 25	−2.94	−140.64
6.0	3.545	0.678 95	−3.36	−146.21
7.0	3.754	0.657 96	−3.63	−150.48
8.0	3.920	0.643 93	−3.82	−153.83
9.0	4.053	0.634 11	−3.95	−156.52
10.0	4.163	0.626 98	−4.05	−158.72
20.0	4.685	0.603 57	−4.38	−169.11
30.0	4.867	0.599 12	−4.44	−172.71
40.0	4.958	0.597 56	−4.47	−174.52

(1) 设 $D(z)=1$，计算系统的前向通路增益和闭环系统增益；

(2) 用式(6-19)求单位阶跃输入下的稳态误差$e_{ss}(kT)$；

(3) 设系统稳定，$D(z)=K$(纯比例)，求使(2)问的稳态误差等于 0.05(即 5%)时的 K 值；

(4) 图 P7.5-3 所示系统指出，当 $K>41.96$ 后，该系统将不再稳定，能做到使(3)问的系统产生 5%的稳态误差吗？请做出解释。

(5) 设计一个直流增益为 118.8 的相位滞后型补偿器，要求其相位裕度为 45°；

(6) 对(5)问的系统，求恒定输入下的稳态误差(%)；

(7) 用 MATLAB 软件对(5)问的系统进行仿真，以证明其稳态误差等于 5%。

8.4-4 本题以习题 8.4-3 为基础，如果将图 P8.4-3 中 $H=0.04$ 的传感器移到反馈通路上，那么会对习题 8.4-3 的稳态误差产生怎样的影响，这里的误差定义如下：

$$\text{稳态误差}=\frac{\text{期望输出}-\text{实际输出}}{\text{期望输出}}$$

注意，这个结果告诉我们，可以把非单位反馈系统转变成单位反馈系统，而不影响系统的稳态误差百分比。

8.6-1 对于习题 8.4-1 的系统：

(1) 设计一个直流增益为 1 的相位滞后补偿器，使系统获得 45°的相位裕度；

(2) 用 MATLAB 程序获得(1)问系统的阶跃响应，求上升时间t_r和百分比超调；

(3) 将(2)问的阶跃响应指标与习题 8.2-2 的(3)问(5)问进行对比。

8.6-2 用相位超前补偿器重做习题 8.4-2，其中，(3)问的超调量近似为 26%。

8.6-3 8.6 节讨论的相位超前补偿器设计时，对相位裕度频率ω_{w1}给出了三个约束条件。请用式(8-33)为相位滞后控制器设计推导出三个等效的约束。

8.6-4 机器人手臂关节控制系统框图如图 P8.6-4 所示。该系统在习题 1.5-4 中给出了描述，在习

题 4.3-8 中，令 $T=0.1\text{s}$，传递函数为：

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{2}{s^2(0.5s+1)}\right]=\frac{0.01873z+0.01752}{(z-1)(z-0.8187)}$$

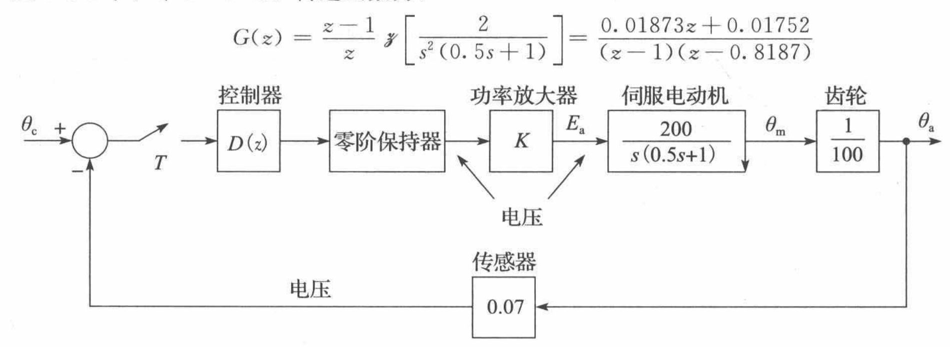


图 P8.6-4 机器人手臂关节控制系统

$G(z)$的频率响应如表 P7.7-1，请注意，传感器增益 $H=0.07$ 未出现在该表中。

(1) 求 $D(z)=1$ 时的系统相位裕度；

(2) 设计一个直流增益为 10 的相位滞后控制器，使系统的相位裕度达到 45°；

(3) 设计一个直流增益为 10 的相位超前控制器，使系统的相位裕度达到 45°；

(4) 设$\theta_c=0.07u(t)$，用 MATLAB 程序求(2)问和(3)问系统的阶跃响应，对这两个系统的上升时间和超调百分比进行对比，其中，超调百分比定义如下：

$$\text{超调百分比}=\frac{\text{最大值}-\text{终止}}{\text{最大值}}\times 100$$

8.6-5 天线控制系统框图如图 P8.6-5 所示。该系统在 1.5 节中给出了描述。令 $T=0.01\text{s}$，传感器增益为 1，习题 7.5-5 给出了传递函数为：

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{20}{s^2(s+6)}\right]=\frac{0.02268z+0.02052}{(z-1)(z-0.7408)}$$

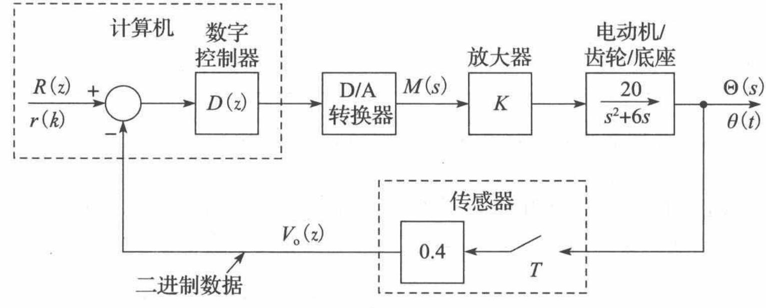


图 P8.6-5 天线控制系统框图

$G(z)$的频率响应见表 P7.7-2。

(1) 求 $K=1$、$D(z)=1$ 时的系统相位裕度；

(2) 为了降低稳态误差，将 K 提高到 5。设计一个直流增益为 1 的相位滞后控制器，使系统的相位裕度达到 45°；

(3) 设计一个直流增益为 1 的相位超前控制器($K=5$)，使系统的相位裕度达到 45°；

(4) 用 MATLAB 程序求(2)问和(3)问系统的单位阶跃响应，对这两个系统的上升时间和超调百分比进行对比。

8.6-6 卫星控制系统如图 P8.6-6 所示。该系统在习题 1.4-1 已有涉足，那时，我们令 $T=0.1\text{s}$、$K=1$、$J=0.1$、$H_k=0.02$，习题 7.5-6 给出：

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{10}{s^3}\right]=\frac{0.05(z+1)}{(z-1)^2}$$

$G(z)$的频率响应见表 P7.7-3，请注意，传感器增益$H_k=0.02$ 未出现在该表中。

(1) 设 $D(z)=1$，勾勒出完整的奈奎斯特图，请问：该系统稳定吗？

(2) 该系统不可能通过任意的相位滞后控制器稳定下来，为什么？提示：借助奈奎斯特准则和(1)问给出的奈奎斯特图回答这一问题。

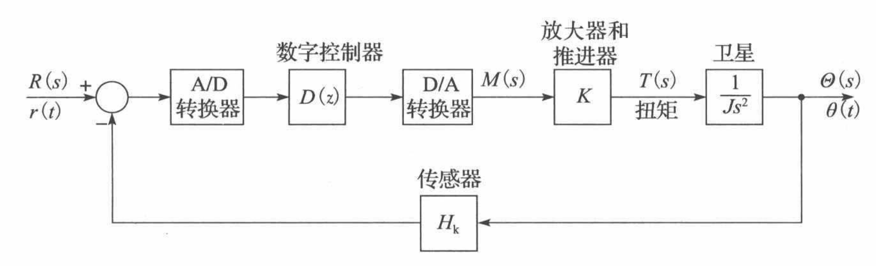


图 P8.6-6 卫星控制系统框图

(3) 设计一个直流增益为 1 的相位超前控制器，使系统的相位裕度达到 45°。提示：用$\omega_{w1}=1$。

(4) 用 MATLAB 求(3)系统的单位阶跃响应，求其上升时间和超调百分。

8.7-1 对于习题 8.4-1 的系统，设计一个滞后-超前补偿器。其中，$G_p(s)=1/(s^2+s)$，$T=1\text{s}$，$H=1$。

(1) 使用习题 8.4-1 的滞后补偿器并用因子 3 降低其增益。

(2) 设计一个级联的超前补偿器，形成滞后-超前组合，以实现 55°的相位裕度，这种做法很难实现预期的目标，为什么？

(3) 针对习题 8.4-1 给出的相位滞后补偿系统、习题 8.6-1 给出的相位超前补偿系统，以及本习题设计的相位滞后-超前补偿系统，绘制各自的阶跃响应。

8.7-2 对于习题 8.2-2 的系统，设计一个滞后-超前补偿器。其中，$G_p(s)=1/(s^2+s)$，$T=0.2\text{s}$，$H=1$。

(1) 使用习题 8.4-2 的滞后补偿器并用因子 2 提高其增益；

(2) 设计一个超前补偿器，形成滞后-超前组合，以实现 60°的相位裕度；

(3) 针对习题 8.4-2 给出的相位滞后补偿系统、习题 8.6-2 给出的相位超前补偿系统，以及本习题设计的相位滞后-超前补偿系统，绘制各自的阶跃响应。

8.9-1 为实现式(8-52)给出的 PID 控制器的传递函数，写出所需的差分方程。令 $E(z)$是控制器的输入、$M(z)$是控制器的输出。

8.9-2 如果式(8-52)给出的 PID 控制器传递函数使用矩形积分(见式(8-38)后面的讲述)，得到控制器传递函数为：

$$\frac{M(z)}{E(z)}=D(z)=K_p+K_I\left[\frac{Tz}{z-1}\right]+K_D\left[\frac{z-1}{Tz}\right]$$

许多数字控制器产品实现的就是上述传递函数。请写出实现此控制器所需的差分方程。

8.10-1 用比例-积分滤波器重做习题 8.4-1。

8.10-2 用比例-微分滤波器重做习题 8.6-1。

8.10-3 重新考虑习题 8.4-2，但要设计一个比例-积分(PI)滤波器。

(1) 在习题 8.4-6 的系统中增加增益以降低稳态误差这一做法不再需要。为什么？

(2) 用一个比例-积分滤波器重做习题 8.4-6(省略增益 4)。

8.10-4 用比例-微分(PD)滤波器重做习题 8.6-2。

8.10-5 用比例-积分(PI)滤波器补偿器重做习题 8.4-3，注意，这时系统在恒定输入下的稳态误差为 0。

8.10-6 我们要考虑图 P8.4-3 的干扰输入。

(1) 假设干扰输入为单位阶跃信号，用来模拟房门停留在打开状态。对于习题 8.4-3 的未经补偿的系统，求温度 $c(t)$的稳态误差。

(2) 对于习题 8.4-3 的(5)问的相位滞后补偿系统，重做(1)问。

(3) 对于习题 8.10-5 的 PI-补偿系统，重做(1)问。

8.10-7 (1) 对于习题 8.6-4 的(2)问，设计一个 PI 控制器；

(2) 对于习题 8.6-4 的(3)问，设计一个 PD 控制器；

(3) 用(1)问和(2)问的结果，重做习题 8.6-5 的(4)问。

8.10-8 (1) 对于习题 8.6-5 的(2)问，设计一个 PI 控制器；

(2) 对于习题 8.6-5 的(5)问，设计一个 PD 控制器；

(3) 用(1)问和(2)问的结果，重做习题 8.6-5 的(4)问。

8.10-9 (1) 重做习题 8.6-6 的(1)问和(2)问；

(2) 对于习题 8.6-6 的(3)问，设计一个 PD 控制器，提示：使用$\omega_{w1}=1$；

(3) 用(2)问的结果，重做习题 8.6-6 的(4)问。

8.10-10 对于例 8.1 的系统：

(1) 设计一个 PI 滤波器，以使系统获得 60°的相位裕度。

(2) 用 MATLAB 程序获得本例系统的阶跃响应。将其结果与图 8-14 给出的例 8.1 的系统的阶跃响应进行对比。

8.10-11 用 MATLAB pidtool()函数为习题 8.6-1 的系统设计一个 PID 控制器。初始设置为($G_p=1/(s^2+s)$，$T=1s$，$H=1$，$P_m=45$，$\omega_{w1}=1.0$)，然后，试着改进设计。

8.10-12 用 MATLAB pidtool()函数为习题 8.6-2 的系统设计一个 PID 控制器。初始设置为($G_p=1/(s^2+s)$，$T=0.2s$，$H=1$，$P_m=45$，$\omega_{w1}=3.0$)，然后，试着改进设计。

8.10-13 用 MATLAB pidtool()函数为习题 8.6-4 的系统设计一个 PID 控制器。初始设置为($G_p=4/(s^2+2s)$，$T=0.1s$，$H=0.07$，$P_m=45$，$\omega_{w1}=6.0$)，然后，试着改进设计。

8.10-14 用 MATLAB pidtool()函数为习题 8.6-5 系统设计一个 PID 控制器。初始设置为($G_p=20/(s^2+6s)$，$T=0.05s$，$H=1$，$P_m=45$，$\omega_{w1}=20.0$)，然后，试着改进设计。

8.10-15 用 MATLAB pidtool()函数为习题 8.6-6 系统设计一个 PID 控制器。初始设置为($G_p=10/s^2$，$T=0.1s$，$H=0.02$，$P_m=45$，$\omega_{w1}=1.0$)，然后，试着改进设计。

8.11-1 对于习题 8.4-3 的室温控制系统，假设将一个可变增益 K 赋予控制对象，该系统的脉冲传递函数由习题 8.4-3 给出。

(1) 绘制该系统的根轨迹，并求使系统稳定的 K 的值域($K>0$)。

(2) 求 $K=1$ 时系统的时间常数。

(3) 设计一个相位滞后控制器，使补偿后的系统在 $K=3$ 的情况下其特征方程的根与(2)问的结果几乎相同。提示：选$z_p=0.999$。

(4) 分别对(2)问的未经补偿的系统和(3)问的被补偿的系统，求稳态误差。

(5) 通过用计算机求解特征方程根，验证(3)问的设计结果。

8.11-2 对于习题 8.4-3 的室温控制系统，假设将一个可变增益 K 赋予控制对象，该系统的脉冲传递函数由习题 8.4-3 给出。

(1)绘制该系统的根轨迹，并求使系统稳定的 K 的值域($K>0$)。

(2) 求 $K=1$ 时系统的时间常数。

(3) 假设所得的系统是稳定的，求 K，使系统补偿前的稳态误差为 0.05，即 5%。，那么所得系统稳定吗？(见(1)问)

(4) 设计一个相位滞后控制器，使补偿后的系统在(3)问求得的增益 K 下其特征方程的根与(3)问的结果几乎相同。提示：选$z_p=0.99999$。

(5) 通过用计算机求解特征方程根，验证(4)问的设计结果。

8.11-3 对于习题 8.10-10 的系统：

(1) 绘制该系统的根轨迹，并求使系统稳定的 K 的值域($K>0$)。

(2) 求 $K=1$ 时系统的时间常数。

(3) 设计一个相位超前控制器，造成(2)问的特征方程的根发生移动，使 $K=1$ 时获得 0.5s 的时间常数。

(4) 用计算机验证(3)问的设计所得的特征方程的零点是合适的。

8.11-4 设习题 8.2-2 的系统有一个增益因子 K 赋予了控制对象。

(1) 证明其脉冲传递函数为：

$$\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=\frac{0.368(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

(2) 绘制该系统的根轨迹，并求系统临界阻尼时的 K 值，即系统特征方程获得 2 个相等的实数极点。

(3) 求(2)问的两极点的时间常数。

(4) 期望(2)问的增益乘以 1.8，而特征方程的根依然大致相同，设计一个相位滞后控制器满足这一性能指标。提示：使用$z_p=0.999$。

(5)用计算机对(4)问的特征方程的根进行验证。

8.11-5 对于例题 8.7 的系统：

(1) 设计一个相位滞后补偿器，使系统在 $K=0.5$ 时临界阻尼，这时的时间常数为 2.03s，且与未经补偿系统 $K=0.244$ 时的时间常数相同。

(2) 用计算机对(1)问的特征方程的根进行验证。

第9章 极点配置与状态估计

9.1 引言

在第 8 章，我们从频域响应及根轨迹两个方面介绍了离散系统的设计。所列举的每个案例都假定系统只有一个反馈信号。但是如果可以检测到更多的当前系统的状态值，并将它们作为补充信息形成控制输入，从某种意义上讲，就有可能得到更好的控制结果。当然，如果能检测到系统的全状态向量，便可以得到关于系统状态的完整描述。因此我们推断：如果希望在数学上给出系统的最佳描述，则很可能需要将所有可用的系统状态作为系统的反馈。通常，这种系统的设计的确需要假定全状态向量能用作反馈。

对于大部分控制系统来说，检测到全状态向量是不切实际的。为了实现基于全状态反馈的系统设计，就必须利用那些可得到的检测值去估计系统的状态。状态估计指的是通过所有可用信息设计一个由计算机实现的动态系统(一组方程)来估计系统的各状态。所幸，我们可以把设计过程分成两个阶段。在第一阶段，假设所有系统状态均可测，并以此为基础进行系统设计。第二阶段，设计状态观测器。在这一章，我们将具体介绍这两个设计阶段以及状态观测器对闭环系统的影响。另外，在介绍过恰当的数学知识后，本书的第 11 章还会介绍一种称为卡尔曼(Kalman)滤波器的最优状态观测器。

9.2 极点配置

在这一节，主要介绍一种极点配置或称极点替换的设计方法，以将闭环传递函数的极点(特征方程的零点)配置到任意期望的位置。同时会谈到极点配置的实用价值。

在介绍极点配置方法之前，我们先来回顾第 1 章提到的伺服电动机模型，它是二阶的，如图 9-1 所示。这个系统的状态方程已由例 4.13 给出，即

图 9-1　伺服电动机系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.095\,163\\ 0 & 0.904\,837\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.004\,837\,4\\ 0.951\,63\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)\tag{9-1}$$

在这个状态方程中，状态 $x_1(k)$表示电动机轴的位置(角度)，很容易测得；状态 $x_2(k)$表示轴速，可以通过转速表或其他适宜的传感器测得。因此，这个系统中全状态向量均可测。

我们把控制输入 $\boldsymbol{u}(k)$选为上述两状态的线性组合，即

$$u(k)=-K_1x_1(k)-K_2x_2(k)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k)\tag{9-2}$$

这里，增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为：

$$\boldsymbol{K}=(K_1\quad K_2)$$

因此，可将式(9-1)改写为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.095\,163\\ 0 & 0.904\,837\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)-\begin{pmatrix}0.004\,837\,4\\ 0.095\,163\end{pmatrix}[Kx_1(k)+K_2x_2(k)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1-0.0048374K_1 & 0.095163-0.0048374K_2 \\ -0.095163K_1 & 0.904837-0.95163K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{9-3}$$

将式(9-3)给出的闭环系统矩阵记为$\boldsymbol{A}_f$，则可将闭环系统方程写成：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_f\boldsymbol{x}(k) \tag{9-4}$$

特征方程为：

$$\alpha(z) = |z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_f| = 0 \tag{9-5}$$

对式(9-5)进行一系列运算(见后面的 MATLAB 代码)，特征方程具体化为：

$$\begin{aligned} &z^2 + (0.0048374K_1 + 0.095163K_2 - 1.904837)z + \\ &0.0046788K_1 - 0.095163K_2 + 0.904837 = 0 \end{aligned} \tag{9-6}$$

假设经过运算选中了特征方程的期望零点λ_1和λ_2。那么，就得到了期望的特征多项式$\alpha_c(z)$：

$$\alpha_c(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2) = z^2 - (\lambda_1+\lambda_2)z + \lambda_1\lambda_2 \tag{9-7}$$

令式(9-6)和式(9-7)的方程对应系数相等，得方程：

$$\begin{aligned} 0.0048374K_1 + 0.095163K_2 &= -(\lambda_1+\lambda_2) + 1.904837 \\ 0.0046788K_1 - 0.095163K_2 &= \lambda_1\lambda_2 - 0.904837 \end{aligned} \tag{9-8}$$

可以看出，这两个方程对 K_1与 K_2是线性的，可以解得：

$$\begin{aligned} K_1 &= 105.0833[\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2) + 1.0] \\ K_2 &= 14.67494 - 5.34172\lambda_1\lambda_2 - 5.16661(\lambda_1+\lambda_2) \end{aligned} \tag{9-9}$$

这就是增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，可以用来实现任意需要的特征方程。

至此，希望大家注意到以下几点。首先，通过极点的配置，使满足诸如瞬态响应的响应速度、超调量等设计要求(详见 6.4 节)的极点位置选定下来。然而，由于这时并未显示输入，因此无法指出阶跃输入下的超调量。再就是特征方程的零点λ_1和λ_2一旦选定，就可以用式(9-9)算出增益矩阵。那么，如果式(9-1)是实际伺服电动机的精确模型，我们就可以在物理系统中实现这两个零点。但是，事实上我们并不能像理论推导的那样无限度地提高一个控制系统的响应速度。如果硬是把系统的响应速度调得过快，就会生成大信号，被控对象将会进入非线性运行模式，从而不再与式(9-1)所描述的模型相吻合。因此，在选择λ_1和λ_2时，应该将它们限定在可物理实现的位置上。

下面给出极点配置的具体过程。设控制对象是 n 阶的，描述模型如下：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{9-10}$$

通过如下关系式得到控制输入：

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k) \tag{9-11}$$

式中：

$$\boldsymbol{K} = [K_1\ K_2\ \cdots\ K_n] \tag{9-12}$$

可将式(9-10)改写为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(k) \tag{9-13}$$

对照式(9-4)，有$\boldsymbol{A}_f = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$，选择期望的极点位置为：

$$z = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \tag{9-14}$$

于是有闭环系统的特征多项式：

$$\alpha_c(z) = |z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}| = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n) \tag{9-15}$$

上式左侧有 n 个未知参量K_1，K_2，…，K_n，右边有 n 个已知参量。于是，可以参照上述伺服电动机例子的做法，令式(9-15)中对应项系数相等，解得未知增益。下面给出举例说明。

例 9.1 在这个例子中，仍然要用到图 9-1 所示的伺服电动机系统，以及式(9-1)的状态方程。采用全状态反馈，式(9-6)给出它的状态方程。设该闭环系统为最常规的单位反

馈系统，则 $K_1=1$，$K_2=0$。将 K_1、K_2 代入式(9-6)，可得状态方程为：

$$z^2-1.900\,00z+0.909\,52=0$$

解得方程的根为：

$$z_{1,2}=0.953\,69\angle(\pm 0.087\,944\text{rad})=r\angle(\pm\theta)$$

根据式(6-8)，算得这两个根的阻尼系数为：

$$\zeta=\frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2+\theta^2}}=\frac{-\ln(0.953\,69)}{\sqrt{(\ln(0.953\,69))^2+(0.087\,944)^2}}=0.474\,62$$

根据式(6-10)，算得时间常量为：

$$\tau=\frac{-T}{\ln r}=\frac{-0.1}{\ln(0.953\,69)}=2.109\text{s}$$

我们假定阻尼系数 ζ 的值符合设计要求，但需要把时间常数缩短到 1.0s，因此，

$$\ln r=-\frac{T}{\tau}=-0.1$$

即 $r=0.904\,837$。通过求解式(6-8)，得到：

$$\theta^2=(\ln r)^2\left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)=(\ln(0.904\,837))^2\left(\frac{1}{(0.474\,62)^2}-1\right)$$

即或写作 $\theta=0.185\,453\text{rad}$ 或 $10.63°$。则期望的根为：

$$z_{1,2}=0.904\,837\angle(\pm 0.185\,453)=0.889\,322\pm \text{j}0.166\,845$$

期望的特征方程为：

$$\begin{aligned}\alpha_c(z)&=z^2-2r\cos(\theta)z+r^2\\&=z^2-2(0.904\,837)\cos(0.185\,453)z+(0.904\,837)^2\\&=z^2-1.778\,644z+0.818\,731\end{aligned}$$

带入式(9-9)，解得

$$\begin{aligned}K_1&=105.0833[\lambda_1\lambda_2-(\lambda_1+\lambda_2)+1.0]\\&=105.0833[0.818\,731-1.778\,64+1.0]=4.212\\K_2&=14.674\,94-5.341\,72\lambda_1\lambda_2-5.166\,61(\lambda_1+\lambda_2)\\&=14.674\,94-5.34172\times 0.818\,731-5.166\,61\times 1.778\,64=1.112\end{aligned}$$

该系统在初始条件 $x_1(0)=1.0$、$x_2(0)=0$ 下的响应如图 9-2 所示。其中，图 9-2a 所示的是输出 $y(t)$、图 9-2b 所示的是采样器输入 $u(t)$。

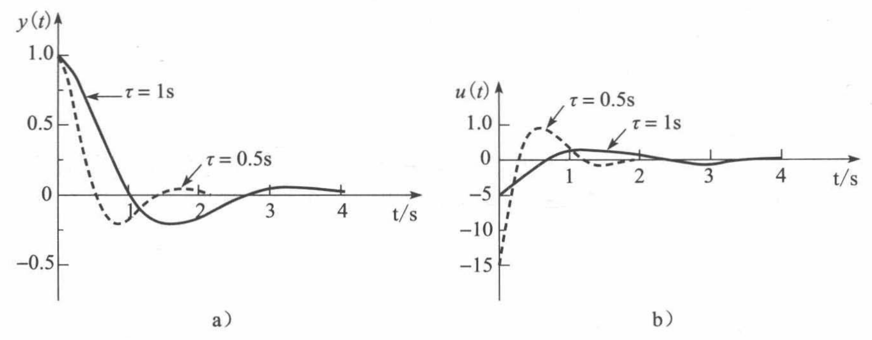


图 9-2　例 9.1 系统的在初始条件下的响应

我们假定 $\zeta=0.475$ 的阻尼系数符合设计要求，但需要把时间常数再缩短到 $\tau=0.5\text{s}$，我们将这个问题留作习题 9.2-1，经设计，得到增益 $K_1=15.15$，$K_2=3.21$，图 9-2 同时绘出了此时的初始条件下的响应曲线。比较图 9-2 所示的两个控制输入 $u(t)$：$u(t)$ 的最大幅值在 $\tau=1\text{s}$ 时为 4.21，而在 $\tau=0.5\text{s}$ 时变为 15.15。由此可见，增大系统的响应速度会导致输入给控制对象的信号变大，过大的信号输入会迫使系统进入非线性工作区，这在一些情况下是违背控制期望的。

下面给出实现本例任务的 MATLAB 程序(注意为了使参数获得足够高的精度，程序中使用的是 long 型变量)：

```
% First verify the closed loop roots with K1=1, K2=0
format long
disp(' ')
disp('Using MATLAB damp function')
Gp = tf([1],[1 1 0]); T = 0.1; Gz = c2d(Gp,T);
Cz = feedback(Gz,1); Cz_zpk = zpk(Cz); [Wn,zeta,P]= damp(Cz)
disp(' ')
disp('Given system roots and gains K1 & K2:')
% Using the format of Equation (1-18)
Ac =[0 1;0 -1]; Bc =[0;1]; Cc =[1 0]; Dc=0;
Sysc = ss(Ac,Bc,Cc,Dc); T = 0.1; Sysd = c2d(Sysc,T);
[A,B,C,D]=ssdata(Sysd);
a12=A(1,2); a22=A(2,2); b11=B(1,1); b21=B(2,1); K1=1; K2=0;
% Find alphac using Equation (9-6)
C1=b11, C2=b21, C3=-1-a22 % For Equation (9-6)
C4=-a22*b11+a12*b21, C5=-b21, C6=a22 % For Equation (9-6)
alphac =[1 C1*K1+C2*K2+C3 C4*K1+C5*K2+C6]
% alphac =[1 b11*K1+b21*K2-1-a22 (-a22*b11+a12*b21)*K1-b21*K2+a22]
root = roots(alphac); real =(root(1)+root(2))/2;
imag = abs(root(1)-root(2))/2; r = sqrt(real^2+imag^2)
r_squared = r^2, theta = atan(imag/real)
two_r_cos_theta = 2*r*cos(theta), theta_deg = theta*180/pi
zeta = -log(r)/sqrt(log(r)^2+theta^2), tau = -T/log(r)
alphac_check = [1 -2*r*cos(theta) r^2]
% Gains check using Equation (9-9): K1=1, K2=0
% Constants for Equation (9-9)
C1=1/(b11-a22*b11+a12*b21), K1 = C1*(r^2-2*r*cos(theta)+1)
X=b11/b21/(b11-a22*b11+a12*b21);
C2=(1+a22)/b21-X, C3=-X, C4=-1/b21+X
K2=C2+C3*r^2+C4*2*r*cos(theta)
% Desired zeta is 0.47462 with new tau of 1.0 s
disp(' ')
tau = input('Desired tau = '); % enter 1.0
disp('Desired new roots and gains K1 & K2:')
r = exp(-T/tau), theta = sqrt(log(r)^2*(1/zeta^2-1))
theta_deg=theta*180/pi
alphac = [1 -2*r*cos(theta) r^2], roots_alphac=roots(alphac)
zeta_check=-log(r)/sqrt(log(r)^2+theta^2), tau_check=-T/log(r)
% Find new K1 and K2 using Equation (9-9)
K1 = C1*(r^2-2*r*cos(theta)+1)
K2=C2+C3*r^2+C4*2*r*cos(theta)
```

◀

例 9.1 的系统可以通过图 9-3 给出的硬件结构来实现。在 9-3a 所示系统中，假定传感器的增益为单位 1，而实际上，这些增益可能并不为 1。例如，假定在闭环系统带宽内，定位传感器和测速传感器可以分别模拟为常量增益 H_p 和常量增益 H_v，使系统的硬件结构成为图 9-3b 所示系统，其中，

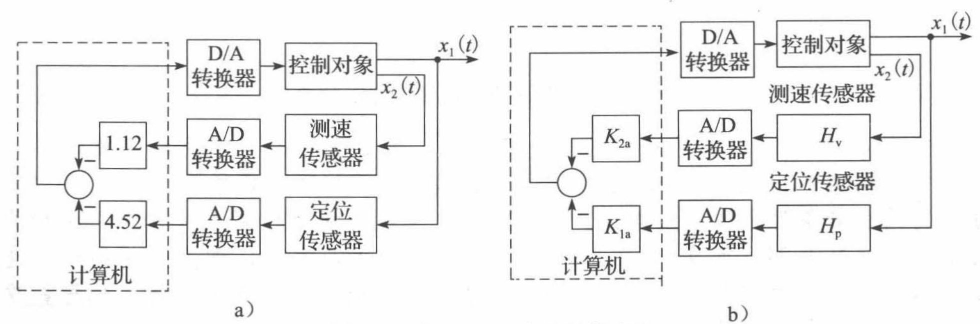


图 9-3 例 9.1 设计的硬件实现

$$H_p K_{1a} = 4.212, \quad H_v K_{2a} = 1.112$$

上述增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是通过令特征方程式(9-15)中对应项系数相等计算得来的。如果控制对象的状态模型是如下的能控标准型(详见 2.9 节)模型，这个计算过程将会大大简化为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(k) \tag{9-16}$$

从 2.10 节我们获知，这个系统的特征方程为：

$$\alpha(z) = |z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{9-17}$$

在这个状态模型中，式(9-15)对应的 $\boldsymbol{BK}$ 项为：

$$\boldsymbol{BK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} [K_1 \; K_2 \cdots K_n] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{pmatrix} \tag{9-18}$$

因此，闭环系统矩阵为：

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ -(a_0 + K_1) & -(a_1 + K_2) & \cdots & -(a_{n-1} + K_n) \end{pmatrix} \tag{9-19}$$

那么，特征方程变为：

$$|z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}| = z^n + (a_{n-1} + K_n)z^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_2)z + (a_0 + K_1) = 0 \tag{9-20}$$

设我们所期望的特征方程为：

$$\alpha_c(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0 \tag{9-21}$$

那么，通过式(9-20)和式(9-21)中对应项系数相等就可算出增益 K 为：

$$K_{i+1} = \alpha_i - a_i, \; i = 0,1,\cdots,n-1 \tag{9-22}$$

一般来讲，调整控制对象的状态模型并不总能得到用能控标准型表述(见 4.10 节)。计算增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的另一种更实用的方法是使用阿克曼(Ackermann)公式[1]。该公式的证明是以将系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转换为能控标准型为基础展开的，证明过程可以在参考文献[1][2]中找到，这里不再赘述。

我们从如下控制对象模型开始介绍这个方法

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k) \tag{9-23}$$

用式(9-21)给出的特征方程的期望系数构建出矩阵多项式$\alpha_c(\boldsymbol{A})$：

$$\alpha_c(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n + \alpha_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_0\boldsymbol{I} \tag{9-24}$$

计算增益矩阵 K 的阿克曼公式如下：

$$\boldsymbol{K} = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{A}) \tag{9-25}$$

式(9-25)中逆矩阵的存在问题在 9.6 节讨论。下面我们用阿克曼公式重解例 9.1 的问题。

例 9.2 控制对象模型如下：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix} 0.004\,837\,4 \\ 0.095\,163 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(k)$$

期望的特征方程为：

$$\alpha_c(z) = z^2 - 1.778\,644z + 0.818\,731$$

因此，

$$\alpha_c(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0.951\,63 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix}^2 - 1.778\,67\begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix} + 0.818\,731\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\alpha_c(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 0.040\,087 & 0.012\,009 \\ 0 & 0.028\,078 \end{pmatrix}$$

同时

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.004\,837\,4 \\ 0.095\,163 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.013\,87 \\ 0.086\,11 \end{pmatrix}$$

因此

$$(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.004\,837\,4 & 0.013\,893\,4 \\ 0.095\,163 & 0.086\,107\,0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -95.082 & 15.342 \\ 105.082 & -5.342 \end{pmatrix}$$

那么，增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可以通过式(9-25)计算得到：

$$\boldsymbol{K} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} -95.082 & 15.342 \\ 105.082 & -5.342 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.040\,087 & 0.012\,009 \\ 0 & 0.028\,078 \end{pmatrix} = (4.212 \quad 1.112)$$

可见，所得结果与例 9.1 一致。

得到上述增益矩阵的 MATLAB 程序如下：

```
% Use the MATLAB acker function to find gains K
A = [1 0.095163;0 0.904837]; B =[0.0048374; 0.095163]; T=0.1;
% Set tau and zeta for desired roots of characteristic equation
tau = 1.0; zeta = 0.47462;
r = exp(-T/tau), theta = sqrt(log(r)^2*(1/zeta^2-1))
alphac =[1 -2*r*cos(theta) r^2], roots_alphac=roots(alphac)
% P specifies the desired roots
P = roots(alphac)
K = acker(A,B,P) % Ackermann computation
```

◀

9.3 状态估计

在 9.2 节，我们讨论了一种需要检测到控制对象所有状态的极点配置方法。通常来说，这种检测出控制对象所有状态的要求难以实现，就是说，除了最简单的系统以外，几乎都是不可能的。在这一节，我们提出一种根据控制对象的可用信息来估计其状态的方法。这种用于估计其他系统状态的系统通常称为状态观测器[3]或状态估计器。本节主要介绍观测器的设计。

假设控制对象可以通过如下方程描述：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{Cx}(k) \tag{9-26}$$

式中：$\boldsymbol{y}(k)$为控制对象的可测信号。因此，式(9-26)中的矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 以及 $\boldsymbol{y}(k)$和 $\boldsymbol{u}(k)$均为已知，其中，控制输入 $\boldsymbol{u}(k)$是给定的。观测器的设计问题如图 9-4 所示，图中，观测器就是一组通过数字计算机求解的差分方程。

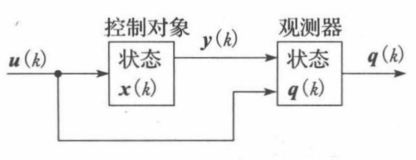


图 9-4 用于说明状态估计的系统

令待观测的系统状态为 $\boldsymbol{x}(k)$，观测器的状态为 $\boldsymbol{q}(k)$，我们期望 $\boldsymbol{q}(k)$无限接近 $\boldsymbol{x}(k)$。因为观测器是在计算机上实现的，因此可以用信号 $\boldsymbol{q}(k)$来反馈计算。

1. 观测器模型

观测器的模型可以通过几种不同的方式得到，在这里，我们选择传递函数法来求得。

通常，观测器的设计准则是：从输入 $\boldsymbol{u}(k)$ 到观测器状态 $q_i(k)$ 的转移矩阵与从输入 $\boldsymbol{u}(k)$ 到系统状态 $x_i(k)$ 的转移矩阵相等，其中，$i=1, 2, \cdots, n$。基于以上准则，即可得到图 9-4 所示系统的观测器描述方程。

首先，我们对式(9-26)进行 Z 变换：

$$z\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{AX}(z) + \boldsymbol{BU}(z) \tag{9-27}$$

解出 $\boldsymbol{X}(z)$：

$$\boldsymbol{X}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(z) \tag{9-28}$$

考虑到观测器有 $\boldsymbol{y}(k)$ 和 $\boldsymbol{u}(k)$ 两个输入，可以把观测器的状态方程写成：

$$\boldsymbol{q}(k+1) = \boldsymbol{Fq}(k) + \boldsymbol{Gy}(k) + \boldsymbol{Hu}(k) \tag{9-29}$$

式中：矩阵 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 未知。

对式(9-29)做 Z 变换，并解出 $\boldsymbol{Q}(z)$：

$$\boldsymbol{Q}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}[\boldsymbol{GY}(z) + \boldsymbol{HU}(z)] \tag{9-30}$$

根据式(9-26)，得：

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{CX}(z) \tag{9-31}$$

再将式(9-31)和式(9-28)代入式(9-30)，得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}(z) &= (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}[\boldsymbol{GCX}(z) + \boldsymbol{HU}(z)] \\ &= (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}[\boldsymbol{GC}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{H}]\boldsymbol{U}(z)\end{aligned} \tag{9-32}$$

使用上述设计准则，即 $\boldsymbol{U}(z)$ 到 $\boldsymbol{Q}(z)$ 的转移矩阵与 $\boldsymbol{U}(z)$ 到 $\boldsymbol{X}(z)$ 的转移矩阵相等，于是，根据式(9-28)，下式一定成立：

$$\boldsymbol{Q}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(z) \tag{9-33}$$

根据式(9-32)和式(9-33)，可以得到：

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{GC}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{H} \tag{9-34}$$

即

$$[\boldsymbol{I} - (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{GC}](z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{H} \tag{9-35}$$

再将上式整理成：

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}[z\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{GC})](z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{H}$$

两边约掉矩阵 $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}$，得到：

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = [z\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{GC})]^{-1}\boldsymbol{H} \tag{9-36}$$

若 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$，且

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{GC} \tag{9-37}$$

则方程式(9-36)成立。根据式(9-29)和式(9-37)，可将观测器的状态方程写成：

$$\boldsymbol{q}(k+1) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k) + \boldsymbol{Gy}(k) + \boldsymbol{Bu}(k) \tag{9-38}$$

设计准则式(9-33)得以满足。请注意这里的 $\boldsymbol{G}$ 是不确定的。因此，观测器是一个由式(9-38)描述的动态系统，$\boldsymbol{y}(k)$ 和 $\boldsymbol{u}(k)$ 是它的输入，下式是它的特征方程：

$$|z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{GC}| = 0 \tag{9-39}$$

我们把满足式(9-38)的观测器叫做预观测器，它依据 kT 时刻的测量值对 $(k+1)T$ 时刻的状态进行估计。

2. 观测误差

下面我们讨论状态观测过程所产生的误差。首先，误差向量 $\boldsymbol{e}(k)$ 定义为：

$$\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{q}(k) \tag{9-40}$$

然后，根据式(9-40)、式(9-26)和式(9-38)，得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(k+1) &= \boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{q}(k+1) \\ &= \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k) - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k) - \boldsymbol{GCx}(k) - \boldsymbol{Bu}(k)\end{aligned} \tag{9-41}$$

将上式整理成：

$$\boldsymbol{e}(k+1) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})[\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{q}(k)] = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})\boldsymbol{e}(k) \tag{9-42}$$

可见，该误差是动态的，特征方程为：

$$|z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})|=0 \tag{9-43}$$

显然，这与观测器的特征方程相同(见式(9-38))。

接下来，我们讨论状态观测中的误差源。首先，假定我们讨论的物理系统具有准确的模型。例如，对于式(9-41)，我们假定控制对象状态方程的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与观测器方程的矩阵完全相同。而在实际案例中，我们获得的系统模型只是对物理系统的近似。因此，如果我们花费更多精力去得到控制对象更为准确的模型，无疑会降低状态观测误差。

状态观测误差的另一个来源是观测器初始状态的选择。由于控制对象的初始状态往往未知，初始误差可能不为 0。不过，我们假设所设计的观测器是稳定的，因此，随着时间的推移，由式(9-43)描述的动态观测误差会逐渐趋近于 0(设模型是精准的)。

第 3 种误差源当属控制对象所遭遇的干扰及传感器的测量误差。设控制对象的干扰向量为 $\boldsymbol{w}(k)$、传感器的测量误差为 $\boldsymbol{v}(k)$，则由式(9-26)描述的控制对象状态方程变成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{Cx}(k)+\boldsymbol{v}(k)\end{aligned} \tag{9-44}$$

因此，如果用式(9-44)来计算状态方程式(9-42)的误差，不难得到：

$$\boldsymbol{e}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})\boldsymbol{e}(k)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}(k)-\boldsymbol{Gv}(k) \tag{9-45}$$

在这个例子中，如果观测器是稳定的(这是设计所要求的)，状态观测的误差就会逐渐趋近于 0；然而，式(9-45)中的激励项又会使误差无法到达 0 值。

3. 动态误差

式(9-38)给出了观测器状态方程：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{Gy}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)$$

在这个方程中，除 $\boldsymbol{G}$ 以外的所有矩阵均由控制对象方程式(9-26)所决定；观测器的设计准则式(9-33)也与选择怎样的 $\boldsymbol{G}$ 无关。但是由式(9-43)可知，$\boldsymbol{G}$ 决定动态误差。一般就以此为事实依据来选择 $\boldsymbol{G}$，再为动态误差选择特征多项式$\alpha_e(z)$。请注意，根据式(9-38)和式(9-43)，这也是观测器的特征多项式，即

$$\alpha_e(z)=|z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})|=z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0 \tag{9-46}$$

在单输出情况下[即 $\boldsymbol{y}(k)$为标量]：

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}G_1\\G_2\\\vdots\\G_n\end{bmatrix} \tag{9-47}$$

式(9-46)通过对应系数相等得到 n 个方程，对这 n 个方程进行求解就可得到式(9-47)的矩阵 $\boldsymbol{G}$。对于这种情况，还可使用阿克曼方程。首先，将式(9-46)与式(9-15)进行对比，即

$$\alpha_c(z)=|z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})| \qquad [(9\text{-}15)]$$

求解上式的阿克曼方程由式(9-25)给出：

$$\boldsymbol{K}=(0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 1)(\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{A}) \qquad [(9\text{-}25)]$$

因此，式(9-46)中，$\boldsymbol{G}$ 的阿克曼方程为：

$$\boldsymbol{G}=\alpha_e(\boldsymbol{A})\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{9-48}$$

上述结果的推导见习题 9.3-4。

因此可以说，只要确定好特征方程(式(9-46))，就可以设计出观测器。有一个设定$\alpha_e(z)$的常规化建议，即设定$\alpha_e(z)$使观测器的速度比闭环控制系统快 2 到 4 倍。所以，要

先算出闭环系统时间常数的最小值，该最小值根据如下闭环系统的特征方程计算：

$$|z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})|=0 \tag{9-49}$$

然后将观测器的时间常量设置为上述时间常数最小值的1/4～1/2。

可以从不同的角度来探讨如何选择矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的问题。根据式(9-38)，可将观测器状态方程写为：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=\boldsymbol{Aq}(k)+\boldsymbol{G}[\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{Cq}(k)]+\boldsymbol{Bu}(k)$$

由此，带控制对象观测器的系统可以抽象为图9-5所示的形式。

我们用如下方式来选择 $\boldsymbol{G}$：如果图9-5所示的 $\boldsymbol{x}(k)$ 与 $\boldsymbol{q}(k)$ 特别的接近，那么，经 $\boldsymbol{G}$ 形成的反馈影响则甚微，这时的 $\boldsymbol{q}(k)$ 主要由 $\boldsymbol{u}(k)$ 决定。然而，如果控制对象因遭受干扰侵袭造成 $\boldsymbol{q}(k)$ 与 $\boldsymbol{x}(k)$ 的值明显不同，那么，$\boldsymbol{G}$ 的作用就至关重要了。这时，在确定 $\boldsymbol{q}(k)$ 时，实施对 $\boldsymbol{y}(k)$ 的测量就比第一种情况更显重要。如此一来，我们可以把选择 $\boldsymbol{G}$ 的工作与那样一种相对重要性关联起来，就是着重于 $\boldsymbol{u}(k)$ 的影响呢，还是着重于干扰对 $\boldsymbol{x}(k)$ 的影响。当然，也会存在测量误差对 $\boldsymbol{y}(k)$ 形成的影响。如果这些影响较大，即测到的 $\boldsymbol{y}(k)$ 误差很大，观测器的设计过程中就要降低 $\boldsymbol{y}(k)$ 决定 $\boldsymbol{q}(k)$ 的话语权。

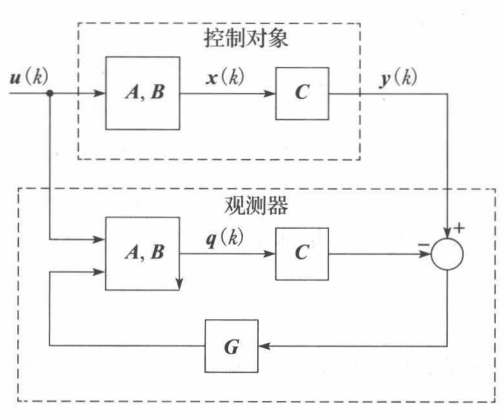


图9-5　状态观测的不同视角

现在我们来总结一下上面的内容。正如图9-5所示，我们可以认为 $\boldsymbol{G}$ 向观测器中的控制对象模型提供一个校正输入，以此来弥补控制对象中未知的量。如果未知量太多，$\boldsymbol{G}$ 就应该相应变大。然而，如果测量 $\boldsymbol{y}(k)$ 的噪声很大，就不能过分依赖 $\boldsymbol{y}(k)$，$\boldsymbol{G}$ 就应该相应减小。因此，对实际系统来讲，选择 $\boldsymbol{G}$ 的最佳方式或许就是使用类似图9-5所示的那样的包括干扰和测量噪声的精确仿真系统。在不同的 $\boldsymbol{G}$(经选择不同的 $\alpha_e(z)$ 而得)下运行仿真系统，最终选定的 $\boldsymbol{G}$ 使系统响应最佳。

下面举例说明预观测器的设计过程。

例9.3 我们为例9.2中的系统设计一个观测器，该系统控制对象的状态方程如下：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.095\,163\\0 & 0.904\,837\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.004\,837\,4\\0.095\,163\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

其增益矩阵为：

$$\boldsymbol{K}=(4.212\quad 1.112)$$

闭环系统的特征方程为

$$\alpha_c(z)=z^2-1.778\,644z+0.818\,731$$

从例9.1可知，该方程的根对应的时间常数为1.0s。因此，选观测器的时间常数为0.5s。我们把观测器设置成临界阻尼形式，则根为：

$$z=\mathrm{e}^{-T/\tau}=\mathrm{e}^{-0.1/0.5}=0.818\,731$$

那么，观测器的特征方程即为：

$$\alpha_e(z)=(z-0.818\,731)^2=z^2-1.637\,462z+0.670\,320=0$$

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 可以通过式(9-48)求得：

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\alpha}_e(\boldsymbol{A})\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.090\,483\,7 \end{pmatrix}^2 - 1.637\,462 \begin{pmatrix} 1 & 0.951\,63 \\ 0 & 0.090\,483\,7 \end{pmatrix} + 0.670\,320 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.032\,858 & 0.025\,444 \\ 0 & 0.007\,414 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.095\,163 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10.508\,286 & 10.508\,286 \end{pmatrix}$$

整理得：

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0.032\,858 & 0.025\,444 \\ 0 & 0.007\,414 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10.508\,286 & 10.508\,286 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.267\,376 \\ 0.077\,913 \end{pmatrix}$$

观测器的系统矩阵即为：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC} = \begin{pmatrix} 0.732\,624 & 0.095\,163 \\ -0.077\,913 & 0.904\,837 \end{pmatrix}$$

根据式(9-38)，可得观测器状态方程为：

$$\boldsymbol{q}(k+1) = \begin{pmatrix} 0.736\,24 & 0.095\,163 \\ -0.077\,913 & 0.904\,837 \end{pmatrix} \boldsymbol{q}(k) + \begin{pmatrix} 0.267\,376 \\ -0.077\,913 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(k) + \begin{pmatrix} 0.004\,837\,4 \\ 0.095\,163 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(k)$$

由于

$$u(k) = -\boldsymbol{Kq}(k) = -4.212q_1(k) - 1.112q_2(k)$$

使观测器的状态方程变为：

$$\boldsymbol{q}(k+1) = \begin{pmatrix} 0.712\,246 & 0.089\,784 \\ -0.478\,776 & 0.799\,022 \end{pmatrix} \boldsymbol{q}(k) + \begin{pmatrix} 0.267\,375 \\ -0.077\,913 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(k)$$

基于观测器的控制系统的初始条件响应如图 9-6 所示。图中给出了两种初始条件下的响应：一种初始条件为：

$$\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

另外一种初始条件为：

$$\boldsymbol{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此可以看到初始条件对系统响应所造成的影响。应该注意到，$\boldsymbol{q}(0)$ 与 $\boldsymbol{x}(0)$ 相同时，基于观测器的控制系统响应与例 9.1 的全状态反馈系统的响应一致。

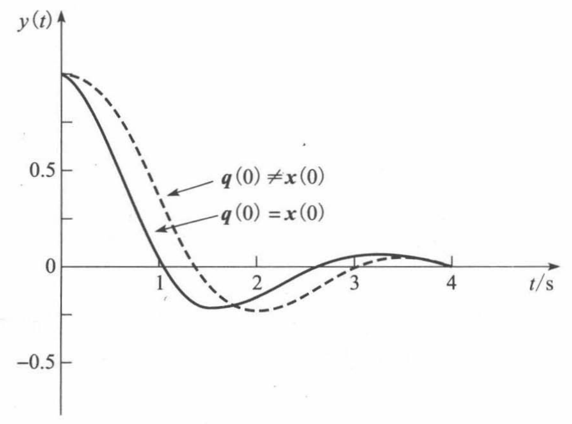


图 9-6　例 9.3 的初始条件响应

下面来说明单位阶跃干扰对系统的影响，此干扰进入系统的方式如式(9-44)所示，这里假定：

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

图 9-7 展示了基于观测器的控制系统和全状态反馈系统对单位阶跃干扰的响应。

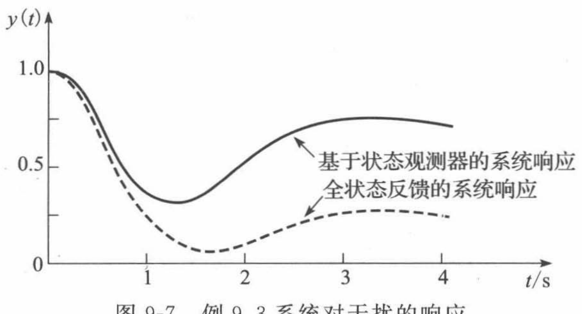


图 9-7 例 9.3 系统对干扰的响应

由于在观测器的设计过程中没有考虑干扰的影响，所以基于观测器的控制系统与全状态反馈系统的响应并不相同。下面给出一段计算观测器增益的 MATLAB 程序：

```
% Compute the plant's discrete state-space matrices
Ac=[0 1;0 -1]; Bc=[0;1]; Cc=[1 0]; Dc=0;
Sysc=ss(Ac,Bc,Cc,Dc); T=0.1; Sysd=c2d(Sysc,T);
[A,B,C,D]=ssdata(Sysd);
% Set tau and zeta for desired alphac roots
tau = 1.0; zeta = 0.47462;
r = exp(-T/tau), theta = sqrt(log(r)^2*(1/zeta^2-1))
alphac = [1 -2*r*cos(theta) r^2], roots_alphac=roots(alphac)
P = roots(alphac) % P specifies the acker desired roots
K = acker(A,B,P) % Ackermann computation
% Set tau and zeta for desired alphae roots
tau = 0.5, zeta = 1
r = exp(-T/tau), theta = sqrt(log(r)^2*(1/zeta^2-1))
alphae =[1 -2*r*cos(theta) r^2],
roots_alphae=roots(alphae)
Perr = roots(alphae) % Perr specifies the acker desired roots
G =(acker(A',C',Perr))' % Ackermann computation
```
◀

4. 控制器传递函数

现在我们将极点配置-状态观测器设计与第 8 章介绍的控制器设计的内容联系起来。由式(9-38)给出的观测器方程为：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{Gy}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)$$

控制律(规则)为：

$$\boldsymbol{u}(k)=-\boldsymbol{Kq}(k) \tag{9-50}$$

将上式代入观测器方程，得：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{Gy}(k)$$

对上式进行 z 变换，并解出 $\boldsymbol{Q}(z)$：

$$\boldsymbol{Q}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{GC})^{-1}\boldsymbol{GY}(z)$$

将上式代入到 $\boldsymbol{U}(z)$ 中，得到关系式为：

$$\boldsymbol{U}(z)=-\boldsymbol{K}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{GC})^{-1}\boldsymbol{GY}(z)$$

因此，我们将控制器和观测器结合成为一个数字控制器，且其传递函数为：

$$D_{\mathrm{ce}}(z)=-\frac{\boldsymbol{U}(z)}{\boldsymbol{Y}(z)}=\boldsymbol{K}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{GC})^{-1}\boldsymbol{G} \tag{9-51}$$

对应的闭环系统模型如图 9-8 所示。

需要注意的是，对于这个控制器来说，$-Y(z)$ 为其输入，$U(z)$ 为其输出。图 9-8a 给出的是一个等效的单位反馈系统，系统输入为 0；图 9-8b 所示的是硬件结构图；同时不难看出，图 9-8c 所示的不存在系统输入。该系统的特征方程为：

$$1+D_{\mathrm{ce}}(z)G(z)=0 \tag{9-52}$$

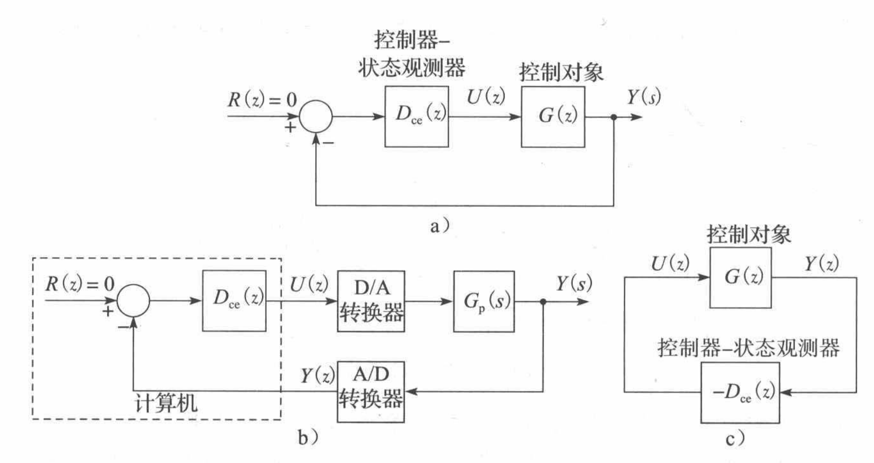


图 9-8　系统中数字控制器的实现

接下来我们为例 9.3 给出的设计确定等效的数字控制器传递函数 $D_{ce}(z)$。

例 9.4　例 9.3 系统的系统方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.095\,163\\0 & 0.904\,837\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.004\,837\,4\\0.095\,163\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

控制增益为：

$$\boldsymbol{K}=(4.212\quad 1.112)$$

例 9.3 所得观测器方程为

$$\boldsymbol{q}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{Gy}(k)$$

$$=\begin{pmatrix}0.712\,247 & 0.089\,784\\-0.478\,776 & 0.799\,022\end{pmatrix}\boldsymbol{q}(k)+\begin{pmatrix}0.267\,376\\0.077\,913\end{pmatrix}\boldsymbol{y}(k)$$

$$\boldsymbol{u}(k)=-\boldsymbol{Kq}(k)=-(4.212\,40\quad 1.111\,95)\boldsymbol{q}(k)$$

式(9-51)中的

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{GC})^{-1}=\begin{pmatrix}z-0.472\,247 & -0.089\,784\\0.478\,785 & z-0.799\,021\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Delta=|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{GC}|=z^2-1.511\,27z+0.612\,087$$

于是，根据式(9-51)，数字控制器传递方程为：

$$D_{ce}(z)=\boldsymbol{K}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{GC})^{-1}\boldsymbol{G}$$

$$=(4.212\,46\quad 1.111\,95)\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}z-0.799\,02 & 0.089\,784\\-0.478\,74 & z-0.712\,245\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.267\,38\\0.077\,913\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}(4.212\,46z-3.898\,17\quad 1.111\,95z-0.413\,77)\begin{pmatrix}0.267\,38\\0.077\,913\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1.2129(z-0.8859)}{z^2-1.511z+0.6121}$$

可以看出，我们通过现代控制方法为这个系统设计了一个二阶数字控制器。上例用到的 MATLAB 代码如下：

```
% Append this code to the program for Example 9.3
Aq = A-B*K-G*C, Bq = G, Cq = -K
[NUMce, DENce]=ss2tf(Aq,Bq,Cq,0);
```

```
Dce=tf(-NUMce, DENce,0.1);
Dce=zpk(Dce)
% Alternative method using (9-51)
% Store this NICE function
function [nr2,dr2]= nice(old,z)
% NICE takes the original expression and makes it look nice
% Input: (a*z^2 + b*z + c)/(d*z^2 + e*z + f)
% Output: (a1*z^2 + b1*z + c1)/(z^2 + e1*z + f1)
% old contains symbol of z
% rearrange the expression to collect coefficients
new = collect(old,z);
% obtain the coefficients of numerator and denominator
dr = fliplr(coeffs(feval(symengine,'denom',new)));
nr = fliplr(coeffs(feval(symengine,'numer',new)));
% normalize the coefficients with the coeff of dr z^2 term
dr2 = double(dr/dr(1)); nr2 = double(nr/dr(1));
end

syms z, Dce=K*inv((z*eye(2)-A+B*K+G*C))*G;
[num,den]=nice(Dce,z);
Dce=tf(num,den,T); Dce=zpk(Dce)
```
◀

5. **闭环系统特征方程**

我们有必要探究一下增加观测器对闭环系统特征方程的影响。对于全状态反馈系统，其特征方程为：

$$\alpha_c(z) = |z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}| = 0$$

接下来，我们来推导基于观测器的控制系统的特征方程。

为了得到这个方程，利用式(9-40)的观测误差：

$$\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{q}(k)$$

使式(9-26)的系统状态方程表示为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) - \boldsymbol{BKq}(k) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{BKe}(k) \tag{9-53}$$

观测误差的状态方程为(式(9-42))：

$$\boldsymbol{e}(k+1) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})\boldsymbol{e}(k)$$

将式(9-53)与式(9-42)的变量联合起来，形成一个状态向量，即如下方程：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \boldsymbol{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ 0 & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{e}(k) \end{bmatrix} \tag{9-54}$$

其观测器的状态是 $\boldsymbol{x}(k)$ 与 $\boldsymbol{e}(k)$ 的线性组合，由式(9-40)给出：

$$\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{q}(k)$$

因此，式(9-54)给出的状态方程的特征方程也是闭环系统特征方程，视为：

$$|z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}|\,|z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{GC}| = \alpha_c(z)\alpha_e(z) = 0 \tag{9-55}$$

由此可知，闭环系统特征方程的根就是极点配置获得的根加上观测器设计获得的根。因此认为极点配置的设计工作与观测器的设计工作相互独立。

例 9.5　通过本例，我们来计算例 9.4 系统的特征方程：

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = \frac{0.004\,837z + 0.004\,679}{z^2 - 1.905z + 0.9048}$$

根据例 9.4 和图 9-8，可将闭环系统特征方程表述为：

$$1 + D_{ce}(z)G(z) = 1 + \left(\frac{1.2129(z-0.8859)}{z^2 - 1.511z + 0.6121}\right)\left(\frac{0.004\,837z + 0.004\,679}{z^2 - 1.905z + 0.9048}\right) = 0$$

该方程等价于：

$$z^4 - 3.416z^3 + 4.401z^2 - 2.533z + 0.5488 = 0$$

根据例 9.1 和例 9.2，写出 $\alpha_c(z)$ 与 $\alpha_e(z)$ 的乘积：

$$\alpha_c(z)\alpha_e(z) = (z^2 - 1.7786z + 0.8187)(z^2 - 1.6375z + 0.6703)$$

其展开式即为上述的四阶多项式。◀

6. 闭环系统状态方程

图 9-8 给出了闭环系统的传递函数模型。下面推导闭环系统的状态模型。据式(9-26)和式(9-50)，不难得到：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(k)$$

再据式(9-26)、式(9-38)和式(9-50)，得：

$$\boldsymbol{q}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{q}(k)$$

将上两个方程组合起来，形成闭环状态方程：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \boldsymbol{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{q}(k) \end{bmatrix} \tag{9-56}$$

该模型在编写闭环系统仿真程序时非常有用。如果把干扰输入和传感器噪声输入加到式(9-44)中来考虑，闭环系统模型会更加复杂(见习题 9.3-5)。

例 9.6 现计算例 9.5 系统的闭环状态矩阵式(9-56)。根据例 9.3，有：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0.0048374 \\ 0.095163 \end{bmatrix} (4.21246 \quad 1.11195) = \begin{bmatrix} 0.020377 & 0.0053790 \\ 0.40087 & 0.10582 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.26738 \\ 0.077913 \end{bmatrix} (1 \quad 0) = \begin{bmatrix} 0.26738 & 0 \\ 0.077913 & 0 \end{bmatrix}$$

根据例(9.4)，有：

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0.71225 & 0.089784 \\ -0.47878 & 0.79902 \end{bmatrix}$$

根据式(9-56)，得到闭环系统矩阵为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.09516 & -0.02038 & -0.00538 \\ 0 & 0.90484 & -0.40087 & -0.10582 \\ 0.26738 & 0 & 0.71225 & 0.08978 \\ 0.07791 & 0 & -0.47878 & 0.79902 \end{bmatrix}$$

生成闭环系统矩阵的 MATLAB 语句为[A- B* K;G* CA- G* C- B* K]。当然，这个矩阵的特征方程与式(9-52)及式(9-55)的特征方程相同。有兴趣的读者可以证明由此例算出的闭环系统矩阵与例 9.5 中式(9-52)的特征方程也相同。◀

本节对观测器进行了简要介绍。更详细的内容见参考文献[2]、[4]、[5]、[6]。

9.4 降维观测器

在 9.3 节的例子中，我们对状态$x_1(k)$[位置]和$x_2(k)$[速度]进行了估计，给出了位置的测量值。然而，如果得到的位置测量值足够准确，就没有必要再去估计之。通常来说，如果一些状态的测量值可以达到一定精度，就可以直接用于反馈，而只需去观测剩下的状态。我们称这种观测器为降维观测器。然而，如果测量不够准确(含噪声干扰)，全维观测器的效果会更好。

为了得到降维观测器的设计方程，首先把状态向量分组：

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_a(k) \\ \boldsymbol{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{x}_a(k)$是要测量的状态；$\boldsymbol{x}_b(k)$是要观测的状态。

然后，再将式(9-26)的控制对象状态方程分组：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_a(k+1) \\ \boldsymbol{x}_b(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{aa} & \boldsymbol{A}_{ab} \\ \boldsymbol{A}_{ba} & \boldsymbol{A}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_a(k) \\ \boldsymbol{x}_b(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_a \\ \boldsymbol{B}_b \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = (\boldsymbol{I} \quad 0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_a(k) \\ \boldsymbol{x}_b(k) \end{pmatrix} \tag{9-57}$$

请注意，这时，我们面对的是多输入、多输出的问题。

可测状态的方程可以写作：

$$\boldsymbol{x}_a(k+1) = \boldsymbol{A}_{aa}\boldsymbol{x}_a(k) + \boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{x}_b(k) + \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k)$$

将已知项集中在方程左边，得到：

$$\boldsymbol{x}_a(k+1) - \boldsymbol{A}_{aa}\boldsymbol{x}_a(k) - \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{x}_b(k) \tag{9-58}$$

对于降维观测器来说，上式左侧为已知观测量。根据式(9-57)，可得到用于观测状态的方程：

$$\boldsymbol{x}_b(k+1) = \boldsymbol{A}_{ba}\boldsymbol{x}_a(k) + \boldsymbol{A}_{bb}\boldsymbol{x}_b(k) + \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{u}(k) \tag{9-59}$$

式中：多项式$[\boldsymbol{A}_{ba}\boldsymbol{x}_a(k)+\boldsymbol{B}_b\boldsymbol{u}(k)]$被认为是已知输入。

下面我们比较一下全维观测器与降维观测器的状态方程。因

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{x}_b(k+1) = \boldsymbol{A}_{bb}\boldsymbol{x}_b(k) + [\boldsymbol{A}_{ba}\boldsymbol{x}_a(k) + \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{u}(k)]$$

及

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}_a(k+1) - \boldsymbol{A}_{aa}\boldsymbol{x}_a(k) - \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{x}_b(k)$$

为获得降维观测器方程，做如下替换：

$$\boldsymbol{x}(k) \leftarrow \boldsymbol{x}_b(k)$$

$$\boldsymbol{A} \leftarrow \boldsymbol{A}_{bb}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \leftarrow \boldsymbol{A}_{ba}\boldsymbol{x}_a(k) + \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) \leftarrow \boldsymbol{x}_a(k+1) - \boldsymbol{A}_{aa}x_a(k) - \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{C} \leftarrow \boldsymbol{A}_{ab}$$

如果将替换结果代入如下全维观测器方程式(9-38)：

$$\boldsymbol{q}(k+1) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C})\boldsymbol{q}(k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$

就可以得到方程：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_b(k+1) = &(\boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{ab})\boldsymbol{q}_b(k) + \boldsymbol{G}[\boldsymbol{x}_a(k+1) - \boldsymbol{A}_{aa}\boldsymbol{x}_a(k) - \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k)] \\ &+ \boldsymbol{A}_{ba}\boldsymbol{x}_a(k) + \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{u}(k) \end{aligned} \tag{9-60}$$

根据式(9-57)，有：

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{x}_a(k) \tag{9-61}$$

则可将式(9-60)写成：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_b(k+1) = &(\boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{ab})\boldsymbol{q}_b(k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k+1) + (\boldsymbol{A}_{ba} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{aa})\boldsymbol{y}(k) \\ &+ (\boldsymbol{B}_b - \boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_a)\boldsymbol{u}(k) \end{aligned} \tag{9-62}$$

就降维观测器问题，应该指出：其一，观测器的特征方程为：

$$\alpha_e(z) = |z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{bb} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{ab}| = 0 \tag{9-63}$$

其二，这里确定 $\boldsymbol{G}$ 矩阵的方法与确定全维观测器中 $\boldsymbol{G}$ 矩阵的方法相同，前者依据的是式(9-46)，后者是式(9-63)。对于单一测量的情况[即 $y(k)$就是$x_1(k)$]，我们可以得到如下的阿克曼方程：

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\alpha}_e(\boldsymbol{A}_{bb}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{ab} \\ \boldsymbol{A}_{ab}A_{bb} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{A}_{bb}^{n-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9-64}$$

请注意，由式(9-62)可以看出，为实现对$\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}(k+1)$的估计，需要测量$\boldsymbol{y}(k+1)$。而对于全维观测器来说，式(9-38)指出，估计$\boldsymbol{q}(k+1)$时，仅需要测量$\boldsymbol{y}(k)$。

与全维观测器中的情况类似，也可以对等效的数字控制器进行其传递函数$D_{\mathrm{ce}}(z)$(见图 9-8)的推导，因其推导过程与全维观测器时相同，我们将这一推导工作留给读者于习题 9.4-4 中完成。设$y(k)=x_1(k)$，则将增益矩阵$\boldsymbol{K}$分成两部分：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(k) &= -\boldsymbol{K}[y(k)\ \boldsymbol{q}_b(k)]^{\mathrm{T}} = -(K_1\quad \boldsymbol{K}_b)[y(k)\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}(k)]^{\mathrm{T}} \\ &= -K_1 y(k) - \boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}(k)\end{aligned} \tag{9-65}$$

式中：符号$[\cdot]^{\mathrm{T}}$表示矩阵$[\cdot]$的转置。

则传递函数的推导结果为：

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{ce}}(z) &= \frac{-U(z)}{Y(z)} \\ &= K_1 + \boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{bb}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ab}} + (\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}]^{-1} \\ &\quad \cdot [\boldsymbol{G}z + \{\boldsymbol{A}_{\mathrm{ba}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aa}} - K_1(\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_{\mathrm{a}})\}]\end{aligned} \tag{9-66}$$

下面给出一个降维观测器的具体例子。

例 9.7 我们仍然使用例 9.1 中的系统设计的例子。系统的控制对象模型为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix}1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.948\,37\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix}0.004\,837\,4 \\ 0.095\,163\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = (1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

增益矩阵为：

$$\boldsymbol{K} = (4.212\quad 1.112)$$

闭环系统特征方程为：

$$\alpha_{\mathrm{c}}(z) = z^2 - 1.778\,644z + 0.818\,731$$

我们测量位置变量$x_1(k)$、估计速度变量$x_2(k)$。例 9.3 中，观测器的特征根选为 $z=0.819$；这里我们做同样的选择。由于降维观测器是一阶的，因此

$$\alpha_{\mathrm{e}}(z) = z - 0.818\,731 = 0$$

从上述控制对象的状态方程以及式(9-57)，得到的分块矩阵为：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{aa}} = 1, \boldsymbol{A}_{\mathrm{ab}} = 0.095\,163, \boldsymbol{B}_{\mathrm{a}} = 0.004\,837\,4$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{ba}} = 0, \boldsymbol{A}_{\mathrm{bb}} = 0.904\,837, \boldsymbol{B}_{\mathrm{b}} = 0.095\,163$$

至此，式(9-64)的阿克曼方程需要的所有项均已获得，有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} &= \alpha_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{bb}})[\boldsymbol{A}_{\mathrm{ab}}]^{-1}[1] = [0.904\,837 - 0.818\,731][0.095\,163]^{-1}[1] \\ &= 0.9048\end{aligned}$$

观测器方程由式(9-62)给出：

$$\begin{aligned}q(k+1) = &[0.904\,837 - (0.9048 \times 0.095\,163)]q(k) + 0.9048y(k+1) \\ &+ [0 - (0.9048 \times 1)]y(k) + [0.095\,163 - (0.9048 \times 0.004\,837\,4)]u(k)\end{aligned}$$

进一步算得：

$$q(k+1) = 0.8187q(k) + 0.9048y(k+1) - 0.9048y(k) + 0.0908u(k)$$

这里，$q(k)$是对速度$x_2(k)$的观测值。因为我们假定 $y(k)$的测量是实时的，所以如果用$(k-1)$替换观测器方程中的 k，如下式：

$$q(k) = 0.8187q(k-1) + 0.9048y(k) - 0.9048y(k-1) + 0.0908u(k-1)$$

会使观测器的执行力更为明显，即使 $q(k)$也为实时估计。例 9.1 给出的控制律为：

$$u(k) = -4.212x_1(k) - 1.112x_2(k)$$

在这里转换为：

$$u(k) = -4.212y(k) - 1.112q(k)$$

至此，可将观测器方程写为：

$$q(k+1) = 0.8187q(k) + 0.9048y(k+1) - 0.9048y(k) + 0.0908[-4.212y(k) - 1.112q(k)]$$

即

$$q(k+1) = 0.7177q(k) + 0.9048y(k+1) - 1.2872y(k)$$

则控制系统就按如下方式执行。首先，在 $T=kT$ 时刻测量 $y(k)$，然后，根据下式计算观测器状态：

$$q(k) = 0.7177q(k-1) + 0.9048y(k) - 1.2872y(k-1)$$

再通过下式算出控制输入：

$$u(k) = -4.212y(k) - 1.112q(k)$$

通过仿真得到的初始条件响应与使用全维状态反馈所获得的响应几乎一致。此外，干扰输入的影响要比全维观测器系统小。

本例的观测器增益由如下 MATLAB 程序计算得到：

```
A =[1 0.095163; 0 0.904837]; B=[0.0048374; 0.095163];
alphae =[1 -0.818731];
Aaa = A(1,1); Aab = A(1,2); Aba = A(2,1); Abb = A(2,2);
Ba=B(1,1); Bb=B(2,1);
Perr = -alphae(2)
G =(acker(Abb',Aab',Perr))' % Substitute Abb-->A and Aab-->C
```

◀

例 9.8 下面我们计算例 9.7 系统的控制器-观测器的传递函数。根据例 9.7，知 $G=0.9048$ 及

$$A_{aa} = 1, A_{ab} = 0.095\,163, B_a = 0.004\,837\,4, K_1 = 4.212$$
$$A_{ba} = 0, A_{bb} = 0.904\,837, B_b = 0.095\,163, K_b = 1.112$$

据式(9-66)，可得：

$$\begin{aligned} D_{ce}(z) &= \frac{-U(z)}{Y(z)} \\ &= K_1 + K_b[z+C_1]^{-1}[Gz+C_2] \\ &= K_1 + \frac{K_b(Gz+C_2)}{z+C_1} = \frac{K_1(z+C_1)+K_b(Gz+C_2)}{z+C_1} \\ &= \frac{(K_1+K_bG)z+(K_1C_1+K_bC_2)}{z+C_1} = (K_1+K_bG)\frac{z+\dfrac{K_1C_1+K_bC_2}{K_1+K_bG}}{z+C_1} \\ &= \frac{C_3(z+C_4)}{z+C_1} \\ &= \frac{5.2181(z-0.8537)}{z-0.7178} \end{aligned}$$

式中：

$$C_1 = -A_{bb} + GA_{ab} + (B_b - GB_a)K_b;$$
$$C_2 = A_{ba} - GA_{aa} - K_1(B_b - GB_a);$$
$$C_3 = K_1 + K_bG;$$
$$C_4 = (K_1C_1 + K_bC_2)/C_3$$

从以上结果可以看出，此控制器-观测器传递函数的零点比极点更靠近 $z=1$，因此，该控制器-观测器属于相位超前型的。这部分一定要独立于设计过程，原因是要求所设计的系统提升响应速度(正如例 9.1 所指定的)。该例的 MATLAB 代码如下：

```
% Using (9-66)
syms z
Aaa=1; Aab=0.095163; Aba=0; Abb=0.904837;
Ba=0.0048374; Bb=0.095163;
K1=4.212; Kb=1.112; G=0.9048;
Dce=K1+Kb*inv(z*eye(1)-Abb+G*Aab+(Bb-G*Ba)*Kb)*(G*z+(Aba-G*Aaa-K1*
(Bb-G*Ba)));
[num,den]=nice(Dce,z);
Dce=tf(num,den,-1); Dce=zpk(Dce)
```
◀

9.5 实时观测器

9.3 节推出的观测器属于预观测器，这时，$x(k)$的估计主要依赖于 $y(k-1)$的测量。然而，9.4 节的降维观测器使用 kT 时刻的测量值来观测 kT 时刻的状态。我们把这种观测器叫做实时估计器，或称实时观测器。下面我们讨论全维实时观测器。

与前面一样，我们给出系统模型为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{Cx}(k)$$

我们希望用向量 $\boldsymbol{q}(k)$观测状态向量 $\boldsymbol{x}(k)$。一种形式的全维实时观测器由以下两个方程组成

$$\bar{\boldsymbol{q}}(k+1)=\boldsymbol{Aq}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)$$
$$\boldsymbol{q}(k+1)=\bar{\boldsymbol{q}}(k+1)+\boldsymbol{G}[y(k+1)-\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{q}}(k+1)] \tag{9-67}$$

在上述方程中，首先，基于系统的当前值和 kT 时刻的信号，对$(k+1)T$ 时刻状态$\bar{\boldsymbol{q}}(k+1)$进行估计；待$(k+1)T$ 时刻的测量值一到，即刻用第二个方程对该估值进行修正；修正式中，观测器增益 $\boldsymbol{G}$ 作为$(k+1)T$ 时刻测量值与该时刻期望值之间差值的权重。最终得到估计值 $\boldsymbol{q}(k+1)$。

在式(9-67)中，可以通过将第一个方程代入第二个方程的办法，取消对$\bar{\boldsymbol{q}}(k+1)$的首次估计，这时，得到如下单观测方程：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GCA}]\boldsymbol{q}(k)+[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{GCB}]\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{Gy}(k+1) \tag{9-68}$$

不难看出，$(k+1)T$ 时刻的估计值是基于$(k+1)T$ 时刻的测量值的。可用如下特征方程描述这个观测器：

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{GCA}|=0 \tag{9-69}$$

可见，这种观测器与预观测器具有相同的性质；其转移矩阵 $\boldsymbol{Q}(z)/\boldsymbol{U}(z)$与 $\boldsymbol{X}(z)/\boldsymbol{U}(z)$也一致。这个性质的证明比较简单，请读者在习题 9.5-6 中完成。

按照预观测器的做法，我们通过如下关系式来定义观测误差向量 $\boldsymbol{e}(k)$：

$$\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{q}(k) \tag{9-70}$$

根据式(9-26)和式(9-68)，可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(k+1)&=\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{q}(k+1)\\&=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)-[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GCA}]\boldsymbol{q}(k)\\&\quad-[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{GCB}]\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{GC}[\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)]\\&=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GCA}][\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{q}(k)]=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GCA}]\boldsymbol{e}(k)\end{aligned} \tag{9-71}$$

因此，误差向量也是迭代完成的，与式(9-69)给出的观测器具有相同的特征方程。

预观测器的特征方程[式(9-43)]为：

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{GC}|=0$$

而实时观测器的特征方程[式(9-69)]为：

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{GCA}|=0$$

因此，对于一个单输入单输出系统来说，得到实时观测器阿克曼方程的方法是：将预观测器的式(9-48)中的 $\boldsymbol{C}$ 置换成$\boldsymbol{CA}$，即对于实时观测器来说，有：

$$G = \boldsymbol{\alpha}_{e}(\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^{2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9-72}$$

可以将通过实时观测器实施的极点配置设计视为是图 9-8 所展示的数字控制器的设计，其控制器-观测器的传递函数(见习题 9.5-6)为：

$$D_{ce}(z) = z\boldsymbol{K}\left[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{GCA} + \boldsymbol{BK} - \boldsymbol{GCBK}\right]^{-1}\boldsymbol{G} \tag{9-73}$$

下面用一个例子说明实时观测器的设计。

例 9.9 我们仍然利用前面的例子

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix} 0.004\,837\,4 \\ 0.095\,163 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = (1 \quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

增益矩阵为：

$$\boldsymbol{K} = (4.212 \quad 1.112)$$

闭环特征方程为：

$$\alpha_{c}(z) = z^{2} - 1.778\,644z + 0.818\,731$$

使用与例 9.3 预观测器相同的观测器特征方程为：

$$\alpha_{e}(z) = (z - 0.818\,731)^{2} = z^{2} - 1.637\,462z + 0.670\,320 = 0$$

例 9.3 给出：

$$\boldsymbol{\alpha}_{e}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 0.032\,858 & 0.025\,444 \\ 0 & 0.007\,414 \end{pmatrix}$$

且

$$\boldsymbol{CA} = (1 \quad 0.095\,163)$$

因此

$$\boldsymbol{CA}^{2} = (\boldsymbol{CA})\boldsymbol{A} = (1 \quad 0.095\,163)\begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix} = (1 \quad 0.181\,27)$$

整理可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 1 & 0.181\,27 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.105\,171 & -1.105\,171 \\ -11.613\,46 & 11.613\,46 \end{pmatrix}$$

根据式(9-72)，可知，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= \boldsymbol{\alpha}_{e}(\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.032\,858 & 0.025\,444 \\ 0 & 0.007\,414 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.105\,171 & -1.105\,171 \\ -11.613\,46 & 11.613\,46 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.032\,858 & 0.025\,444 \\ 0 & 0.007\,414 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1.105\,171 \\ 11.613\,456 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.259\,181 \\ 0.086\,106 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而，计算：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{GCA} &= \begin{pmatrix} 0.259\,434 \\ 0.086102 \end{pmatrix}(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.259\,434 \\ 0.086\,102 \end{pmatrix}(1 \quad 0.095\,163) = \begin{pmatrix} 0.259\,434 & 0.024\,689 \\ 0.086\,102 & 0.008\,194 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

及

$$A - GCA = \begin{pmatrix} 0.740\,566 & 0.070\,474 \\ -0.086\,102 & 0.896\,643 \end{pmatrix}$$

再计算($B-GCB$)的值：

$$B - GCB = \begin{pmatrix} 0.003\,582 \\ 0.094\,746 \end{pmatrix}$$

整理之后，式(9-68)具体为：

$$q(k+1) = \begin{pmatrix} 0.740\,566 & 0.070\,474 \\ -0.086\,102 & 0.896\,643 \end{pmatrix} q(k) + \begin{pmatrix} 0.003\,582 \\ 0.094\,746 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} 0.259\,181 \\ 0.086\,106 \end{pmatrix} y(k+1)$$

计算增益矩阵 G 的 MATLAB 程序如下：

```
A=[1 0.095163; 0 0.904837];
alphae=[1 -1.637462 0.670320];B=[0.0048374; 0.0951630];C=[1 0];
Perr = roots(alphae); % Perr specifies the desired roots
CA = C*A;
G =(acker(A',CA',Perr))' % Substitute C*A-->A
```

◀

例 9.10 作为例 9.9 的延续，本例根据式(9-73)计算控制器-观测器的传递函数。例 9.9 指出：

$$A - GCA = \begin{pmatrix} 0.740\,566 & 0.070\,474 \\ -0.086\,102 & 0.896\,643 \end{pmatrix}, B - GCB = \begin{pmatrix} 0.003\,582 \\ 0.094\,746 \end{pmatrix}$$

因此

$$(B - GCB)K = \begin{pmatrix} 0.003\,583\,6 \\ 0.094\,746\,5 \end{pmatrix} (4.212 \quad 1.112) = \begin{pmatrix} 0.015\,096 & 0.003\,984\,8 \\ 0.399\,110 & 0.105\,353\,2 \end{pmatrix}$$

并且

$$A - GCA - BK + GCBK = \begin{bmatrix} 0.725\,723 & 0.066\,514 \\ -0.485\,210 & 0.791\,290 \end{bmatrix}$$

$$[zI - A + GCA + BK - GCBK]^{-1} = \begin{pmatrix} z - 0.791\,290 & -0.066\,514 \\ 0.485\,210 & z - 0.791\,290 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} z - 0.791\,290 & -0.066\,514 \\ 0.485\,210 & z - 0.725\,723 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = |zI - A + GCA + BK - GCBK|$$

$$= z^2 - 1.517z + 0.6065$$

将以上各计算结果代入式(9-73)，不难得到：

$$D_{ce}(z) = zK[zI - A + GCA + BK - GCBK]^{-1}G$$

$$= \frac{z}{\Delta}(4.212 \quad 1.112) \begin{pmatrix} z - 0.791\,290 & 0.066\,514 \\ -0.485\,210 & z - 0.725\,723 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.259\,181 \\ 0.086\,100 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{z}{\Delta}(4.212 \quad 1.112) \begin{pmatrix} 0.259\,181z - 0.199\,360 \\ 0.861\,00z - 0.188\,242 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1.188z - 1.049}{z^2 - 1.517z + 0.6065} = \frac{1.188z(z - 0.8834)}{z^2 - 1.517z + 0.6065}$$

下面是一段利用式(9-73)计算传递方程的代码。在程序中我们使用例 9.4 提供的最优函数来生成 z 的传递函数，其 MATLAB 程序如下：

```
%Compute the digital filter using Equation (9-73)
T=0.1; syms z
A=[1 0.095163;0 0.904837];B=[0.0048374;0.0951630];C=[1 0];
alphae=[1 -1.637462 0.670320]; Perr=roots(alphae); CA=C*A;
K =[4.212 1.112]; G =(acker(A',CA',Perr))';
Dce=z*K*inv(z*eye(2)-A+G*C*A+B*K-G*C*B*K)*G % Eqn (9-73)
[num,den]= nice(Dce,z);
Dce = tf(num,den,T)
Dce = zpk(Dce)
```
◀

在实现基于观测器的控制器设计时，有可能会出现问题。至今，我们并没有考虑这些控制系统的相对稳定性。一个具有足够稳定裕度的系统称为是鲁棒的；而根据控制对象呈现的幅值裕度和相位裕度，发现基于观测器的控制系统很可能不具鲁棒性。由图 9-8 可以看出，为确定这些稳定性裕度，必须计算开环传递函数 $D_{ce}(z)G(z)$ 的频域响应。我们对例 9.4 的预观测器系统和例 9.9 的实时观测系统都进行了上述计算。在两个系统中，相位裕度都是 49°，幅值裕度都大于 8dB。这两个系统没有出现相对稳定性的问题。在第 11 章，讲到卡尔曼滤波器(最优实时观测器)时还将深入讨论这个问题。

按照式(9-56)的预观测器的做法，可以推导出利用实时观测器的闭环系统状态模型如下：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \boldsymbol{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{GCA} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{GCA}-\boldsymbol{BK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{q}(k) \end{bmatrix} \tag{9-74}$$

上述方程的推导比较简单，请读者作为练习完成习题 9.5-7。

9.6　能控性与能观性

在前面的小节中，极点配置(式(9-25))与观测器设计(式(9-48))均使用了阿克曼公式。在进行极点配置的设计中，下述矩阵的逆必须存在：

$$(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}) \tag{9-75}$$

而在预观测器的设计中，下述矩阵得逆也必须存在：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9-76}$$

下面，我们把式(9-75)矩阵的逆和式(9-76)矩阵的逆必须存在的条件分别与能控性和能观性联系起来。

我们借助图 9-9 所示的系统来介绍能控性的概念。

这个系统的特征方程为：

$$(z-0.9)(z-0.8)=0$$

然而，输入 $u(k)$ 不会激励出 $(0.9)^k$ 这样的瞬态响应模式，因此该系统不能被 $u(k)$ 控制。我们称这个系统是不能控的。

定义 1　对于系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k) \tag{9-77}$$

倘若存在一个输入系列 $\boldsymbol{u}(0)$，$\boldsymbol{u}(1)$，$\boldsymbol{u}(2)$，…，$\boldsymbol{u}(n)$，使得该系统可以在有限的时间 N 内，从任意初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 转移到任意终止状态 $\boldsymbol{x}(N)$，则这个系统是能控的。

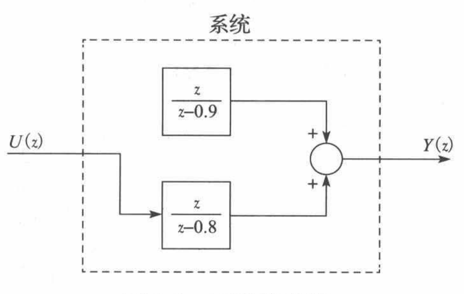


图 9-9　不能控系统

注意，在图 9-9 所示的系统中，输入 $u(k)$对上面方框中的状态没有影响；因此该系统是不能控的。

下面我们推导式(9-77)系统是能控的条件。首先，递推地写出下面的结果：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) \\
\boldsymbol{x}(2) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}(N) &= \boldsymbol{A}^N\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \cdots + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(N-2) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(N-1)
\end{aligned}
\tag{9-78}
$$

$$
= \boldsymbol{A}^N\boldsymbol{x}(0) + (\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B})\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(N-1) \\ \boldsymbol{u}(N-2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(0) \end{pmatrix}
\tag{9-79}
$$

$\boldsymbol{x}(N)$和 $\boldsymbol{x}(0)$已知时，可将上述方程改写为：

$$
(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B})\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(N-1) \\ \boldsymbol{u}(N-2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}(N) - \boldsymbol{A}^N\boldsymbol{x}(0)
\tag{9-80}
$$

因为状态向量的阶次是 n，所以由式(9-80)可得 n 个联立的线性方程。因此，为了方程有解，下面矩阵的秩(式(9-75)中 $N=n$)必须为 n[7]：

$$
(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B})
\tag{9-81}
$$

在单输入情况下，$\boldsymbol{B}$ 是列矩阵，$N=n$ 时，矩阵式(9-81)即为 $n\times n$ 的矩阵。那么，矩阵式(9-81)的逆矩阵一定存在；这也是式(9-25)中阿克曼方程解存在的条件。

下面讨论能观性的概念。

定义 2 对于系统

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\
\boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)
\end{aligned}
\tag{9-82}
$$

倘若任意初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$可以根据有限的 N 个测量值 $\boldsymbol{y}(0)$，$\boldsymbol{y}(1)$，$\boldsymbol{y}(2)$，…，$\boldsymbol{y}(n)$计算出来，则该系统是能观的。

在图 9-10 所示系统中，上侧方框的状态对输出 $y(k)$没有贡献，显然，该系统是不能观的。

能观性条件的推导与能控性的推导非常相似。为了使推导简便，我们假设 $u(k)$为 0；$u(k)$不为 0 的推导与 $u(k)$为 0 的推导是相似的，此问题留给读者在习题 9.6-1 中完成。首先，根据式(9-82)递推地写出下面的结果：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(0) \\
\boldsymbol{y}(1) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y}(N-1) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(N-1) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{x}(0)
\end{aligned}
\tag{9-83}
$$

图 9-10 不能观系统

整理成：

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(0) \\ \boldsymbol{y}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(0)
\tag{9-84}
$$

类比能控性的讨论过程，如下系数矩阵的秩(式(9-76)在 $N=n$ 的情况下)也必须为 n：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N-1} \end{pmatrix} \tag{9-85}$$

对于单输出系统，$\boldsymbol{C}$ 是行向量，式(9-85)在 $N=n$ 的情况下为 $n\times n$ 的矩阵。那么，式(9-85)中矩阵的逆一定存在；这也是阿克曼公式(9-48)的解存在的条件。

例 9.11 下面我们来测试图 9-11 所示系统的能控性和能观性。这个系统由两个串联的一阶子系统构成，经检验可知，两个子系统都是能控且能观的。系统的状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(-1\quad 1)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}(k)$$

图 9-11 例 9.11 的系统

首先，利用矩阵式(9-81)检验其能控性。计算

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

和

$$(\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB})\begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

上述矩阵的秩为 1，逆矩阵不存在，因此该系统是不能控的。

我们再利用矩阵式(9-85)来检验其能观性。计算

$$\boldsymbol{CA}=(-1\quad 1)\begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{pmatrix}=(-0.8\quad 0.8)$$

和

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

上述矩阵的秩也为 1，因此该系统是不能观的。不妨计算一下该系统的传递函数。根据梅森增益公式以及图 9-11，可得：

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1(1-0.6z^{-1}-0.16z^{-2})-z^{-1}(1-0.8z^{-1})+z^{-1}(1+0.2z^{-1})-z^{-2}}{1+0.2z^{-1}-0.8z^{-1}-0.16z^{-2}}$$

$$=1$$

$$\frac{X_2(z)}{U(z)}=\frac{z^{-1}(1+0.2z^{-1})-z^{-2}}{1-0.6z^{-1}-1.6z^{-2}}=\frac{z^{-1}}{1+0.2z^{-1}}$$

$$\frac{X_1(z)}{U(z)}=\frac{z^{-1}}{1+0.2z^{-1}}$$

$$\frac{Y(z)}{X_1(z)}=\frac{\boldsymbol{Y}(z)}{U(z)}\,\frac{U(z)}{X_1(z)}=\frac{1+0.2z^{-1}}{z^{-1}}$$

从 $X_2(z)/U(z)$ 的传递函数中，不难发现输入 $u(k)$ 不会激励出 $(0.8)^k$ 这样的响应模式；从 $Y(z)/X_{(z)}$ 的传递函数也会看到 $(-0.2)^k$ 的响应模式不会出现在输出中。

下面是完成本例工作的 MATLAB 代码：

```
A=[-0.2 0;-1 0.8]; B=[1; 1]; C=[-1 1]; D=[1];
T=1; %Choose any sampling interval
Sysd=ss(A,B,C,D,T)

S_control=[B A*B]
Rank_S_control=rank(S_control)
S_observe=[C; C*A]
rank_S_observe=rank(S_observe)
Yz_over_Xz = tf(Sysd)
```

◀

9.7　具有输入的系统

以本章的极点配置方法设计实现的系统，其初始条件被以某种预定的方式迫使为 0，且该系统并没有输入。这种系统称为调节器控制系统。然而，在许多控制系统中，有必要使系统输出 $y(t)$ 跟随（即跟踪）系统输入 $r(t)$。这种系统的一个典型的例子就是飞机自动着陆的垂直（或高度）控制系统。飞机必须按照预定的下降坡度，即斜坡函数来着陆。因此，高度控制系统的输入是斜坡函数。在这一节，我们将要修改极点配置的设计方法来实现系统跟踪输入的要求。

首先讨论低阶的、单输入单输出的、所有状态均可测的系统，对这种系统不需要再设置观测器。系统方程为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{9-86}$$

式中：对于调节器控制系统来说，

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k) \tag{9-87}$$

控制输入 $\boldsymbol{u}(k)$ 是唯一一个可操作的变量，因此这个输入一定是系统输入 $\boldsymbol{r}(k)$ 的函数。我们把 $\boldsymbol{u}(k)$ 调整为 $\boldsymbol{r}(k)$ 的线性函数：

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k) + N\boldsymbol{r}(k) \tag{9-88}$$

式中：N 是待定常量。

那么，根据式(9-86)和式(9-88)，得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}N\boldsymbol{r}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{9-89}$$

对上述方程做 z 变换，并解出传递函数为：

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}]^{-1}\boldsymbol{B}N \tag{9-90}$$

注意，N 的大小不会影响系统的相对频率响应，但会影响频率响应的幅度；除了倍增系数外传递函数也不受 N 的影响。

有一个特例值得注意，即系统的输出就是系统的一个状态，不失一般性，我们将其记为 $x_1(t)$，这时，可以将输出方程写成：

$$y(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) = [1\ 0\ \cdots\ 0]\boldsymbol{x}(k) = x_1(k)$$

这时，可以将 $u(k)$ 的方程表述为系统误差 $e(k)=r(k)-y(k)$ 的函数。根据式(9-88)，令 $N=K_1$，及

$$\begin{aligned} u(k) &= -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k) + K_1 r(k) \\ &= K_1[r(k) - y(k)] - K_2 x_2(k) - \cdots - K_n x_n(k) \end{aligned} \tag{9-91}$$

可见，就像传统的控制器设计一样，控制量是系统误差的函数。其系统框图如图 9-12 所示。在例 9.12 中我们还将深入研究这个系统。

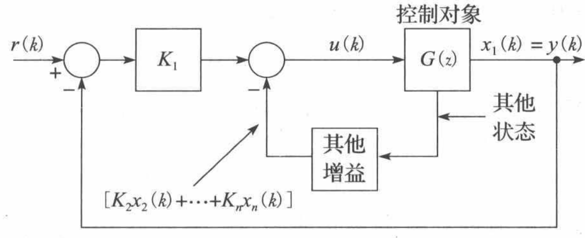


图 9-12　带输入的系统

决定系统传递函数（式(9-90)）的零点是很有意义的。为了定位零点，对式(9-89)进行 z 变换：

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(z)-\boldsymbol{B}N\boldsymbol{R}(z)=0$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(z)=\boldsymbol{Y}(z) \tag{9-92}$$

如果 $z=z_0$ 是传递函数式(9-90)的一个零点，则 $\boldsymbol{Y}(z_0)=0$，而 $\boldsymbol{R}(z_0)$ 与 $\boldsymbol{X}(z_0)$ 不为 0。因此，可将式(9-92)表述成：

$$\begin{pmatrix} z_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{B}N \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}(z_0) \\ \boldsymbol{R}(z_0) \end{pmatrix}=0 \tag{9-93}$$

因为 $\boldsymbol{R}(z_0)$、$\boldsymbol{X}(z_0)$ 均不为 0，所以这个方程有一个非平凡解。因此，系数矩阵的行列式（z_0 的多项式）一定为 0[7]。该多项式的根即为系统传递函数的零点。

传递函数零点的位置并不能从式(9-93)中明显的看出来。但是如果将式(9-93)改写为：

$$\begin{pmatrix} z_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}(z_0) \\ N\boldsymbol{R}(z_0)-\boldsymbol{KX}(z_0) \end{pmatrix}=0 \tag{9-94}$$

这里系数矩阵与 $\boldsymbol{K}$ 和 N 均无关，且实际上只与控制对象无关。因此，闭环传递函数的零点与控制对象传递函数的零点相同，且不受设计过程的影响。即这种设计过程的影响有限。下面举例说明上述设计过程。

例 9.12　仍然引用例 9.1 的系统，不过加入了式(9-88)的系统输入。该系统中控制对象的状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix} 1 & 0.095\,163 \\ 0 & 0.904\,837 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)\begin{pmatrix} 0.004\,837\,4 \\ 0.095\,163\,0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

经例 9.1 的设计，得到了增益矩阵为：

$$\boldsymbol{K}=(4.212\quad 1.112)$$

因此

$$\boldsymbol{BK}=\begin{pmatrix} 0.004\,837\,4 \\ 0.095\,163\,0 \end{pmatrix}(4.212\quad 1.112)=\begin{pmatrix} 0.0204 & 0.0054 \\ 0.4008 & 0.1058 \end{pmatrix}$$

而

$$z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}=\begin{pmatrix} z-0.9796 & -0.0898 \\ 0.4008 & z-0.7990 \end{pmatrix}$$

且

$$[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}]^{-1}=\frac{1}{z^2-1.7786z+0.8187}\begin{pmatrix} z-0.7990 & -0.0898 \\ 0.4008 & z-0.9796 \end{pmatrix}$$

代入式(9-90)的系统传递函数为：

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}]^{-1}\boldsymbol{B}N=\frac{0.004\,837(z+0.9672)N}{z^2-1.7786z+0.8187}$$

注意，该系统的直流增益为：

$$\left.\frac{Y(z)}{R(z)}\right|_{z=1}=0.2373N$$

可见，可以通过重选 N 来增加该系统的直流增益。因为 $y(k)=x_1(k)$，可以像式(9-91)那样选定 $N=K_1$，这时，控制量就变成了输入与输出间误差的函数。又因为 $K_1=4.212$，容易算出此时的直流增益等于1；位于图9-12所示内环的系统属于第一类系统。图9-13展示了上述情况下系统的阶跃响应，其稳态误差为0。该例的MATLAB代码如下：

```
% Append this code to that of Example 9.3
syms z
N=1; Tz=C*inv(z*eye(2)-A+B*K)*B*N; % Equation (9-90)
[num,den]=nice(Tz,z);
Tz=tf(num,den,-1)
```

◀

接下来，我们考虑用预观测器来实现控制系统的情况。控制对象可以描述为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\tag{9-95}$$

根据式(9-38)，得到的观测器的描述：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$

控制量为：

$$\boldsymbol{u}(k)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(k)\tag{9-96}$$

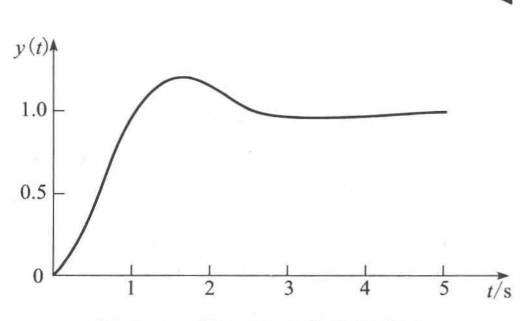


图9-13　例9.12中的阶跃响应

一般来说，允许输入进入式(9-38)和式(9-96)，使上述方程变为：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{G}y(k)+\boldsymbol{B}u(k)+\boldsymbol{M}r(k)\tag{9-97}$$

$$u(k)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(k)+Nr(k)\tag{9-98}$$

这时，设计问题也就变成选择合适的 $\boldsymbol{M}$ 和 N 来实现特定的设计目标，如系统传递函数的零点、稳态误差，等等。

下面，我们讨论仅系统误差可测及仅系统误差可控的情况。其中，系统误差为：

$$e(t)=r(t)-y(t)\tag{9-99}$$

例如，在雷达追踪系统中，雷达回波代表的仅是天线指向与目标方向之间的误差。通过选择 N 为0，$\boldsymbol{M}$ 等于 $-\boldsymbol{G}$，误差控制条件可以在式(9-97)与式(9-98)中得到满足。那么，式(9-97)和式(9-98)分别变为：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{G}[y(k)-r(k)]+\boldsymbol{B}u(k)\tag{9-100}$$

$$u(k)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(k)\tag{9-101}$$

请注意，这个设计过程中同样不对系统传递函数的零点做出选择。下面给出一个例子解释上述设计过程。

例9.13 我们依然使用例9.12的系统，并采用例9.3给出的观测器。例9.12给出了控制对象的状态方程，例9.3给出了控制器和观测器的增益矩阵，现再列于此：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0.09516\\ 0 & 0.90484\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.00484\\ 0.09516\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=(1\quad 0)$$

$$\boldsymbol{K}=(4.2124\quad 1.1119),\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0.2674\\ 0.0779\end{pmatrix}$$

将这些矩阵代入式(9-100)和式(9-101)，再将式(9-101)代入式(9-100)，得观测器方程：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=\begin{pmatrix}0.7122 & 0.0898\\ -0.4788 & 0.7990\end{pmatrix}\boldsymbol{q}(k)+\begin{pmatrix}0.2674\\ 0.0779\end{pmatrix}[y(k)-r(k)]$$

注意，除例9.3的设计工作以外不再需要进行其他的设计。图9-14给出了这个系统的框图，图中，控制器传递函数按照例9.4的方法算得，并假设输入$r(kT)$经历了计算机的计算处理（通常如此）。上述设计结果的阶跃响应如图9-15的实线曲线所示，它所对应的控制对象及观测器的初值均为0；图中虚线是采用如下初值的阶跃响应：

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-0.5\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{q}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

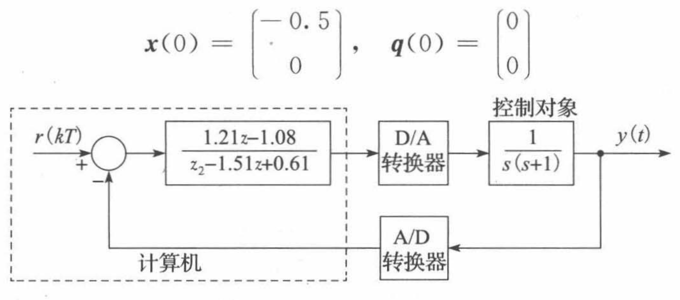


图9-14 例9.13系统

从本例所做的设计结果来看，该系统的瞬态响应令人满意，且稳态误差为0。◀

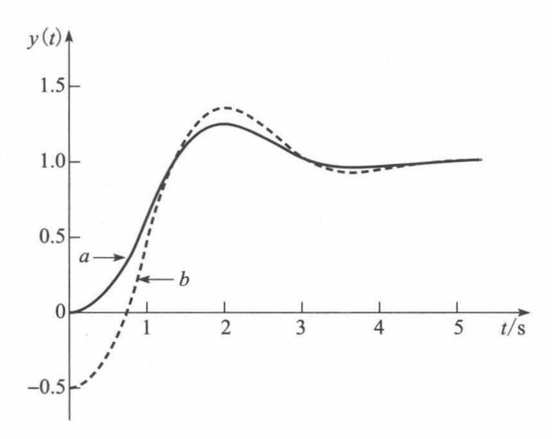


图9-15 例9.13的系统响应

9.8 小结

本章给出了一种基于系统状态模型的设计方法，而第8章讨论的则是基于传递函数的设计方法。本章方法又称为极点配置法或极点安置法。这种方法允许我们把系统状态方程中的所有零点配置到希望的位置；不过，它要求系统的所有状态均已知，这一要求一般来讲很难得以满足。为了满足这个要求，需构建观测器，即用观测器来估计系统状态，这时需要系统输入已知，系统输出可测。对于极点配置的设计而言，那些估计出来的状态（非实际状态）用来计算反馈信号。

上述设计结束后，会给出一个调节器控制系统，这是一种没有参考输入的控制系统。另外，我们还给出了一种改变系统极点配置、增加参考输入的方法，在这种情况下，用来控制系统的信号是系统误差，所需的修改简单易行。

基于观测器的设计方法有一个问题，就是对控制对象输入的相对稳定裕度可能不够大。这是一个比较严重的问题，这源于分析设计工作所存在的主要缺陷，即人们使用线性的控制对象模型着手系统的设计，但这并不准确。一般来说，物理系统是非线性的，系统的特征随着时间、温度等诸多因素的变化而改变。因此，提出足够的安全裕度是必要的，其中，相对稳定性就是对安全裕度的一种度量。在本章提出的设计方法中，必须计算闭环系统的开环频率响应，以确保系统具有足够的稳定裕度。

参考文献

[1] J. E. Ackermann, “Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum,” *Regelungstech Process-Datenverarb.*, 7, pp. 297–300, 1972.

[2] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

[3] D. G. Luenberger, “An Introduction to Observers,” *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-16, pp. 596–602, 1971.

[4] Part II, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-26, 1981.

[5] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation and Control*, Vol. 3. New York: Academic Press, Inc., 1982.

[6] J. O'Reilly, *Observers for Linear Systems.* London: Academic Press, Inc. (London) Ltd., 1983.

[7] P. M. De Russo, R. J. Roy, C. M. Close, and A. A. Desrochers, *State Variables for Engineers,* 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[8] J. C. Williams and S. K. Mitter, "Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction," *IEEE Trans. Autom. Control,* AC-16, pp. 582–602, 1971.

[9] W. M. Wonham, "On Pole Assignment in Multi-input Controllable Linear Systems," *IEEE Trans. Autom. Control,* AC-12, pp. 660–665, 1967.

[10] C. T. Leondes and L. M. Novak, "Reduced-Order Observers for Linear Discrete-Time Systems," *IEEE Trans. Autom. Control,* AC-19, pp. 42–46, 1974.

[11] R. F. Wilson, "An Observer Based Aircraft Automatic Landing System," M.S. thesis, Auburn University, Auburn, AL, 1981.

习题

9.2-1 例 9.1 的控制对象状态方程如式(9-1)所示。试用极点配置的设计方法，求出使闭环特征方程零点的阻尼系数为 0.46，时间常数为 0.5s 的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$。

9.2-2 对于习题 9.2-1 系统的控制对象，使用例 9.5 给出的传递函数：

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=\frac{0.00484z+0.00468}{z^2-1.905z+0.905}$$

(1) 用极点配制设计法，求出使闭环特征方程零点的阻尼系数为 0.707，时间常数为 0.8s 的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$。

(2) 验证设计结果，说明式(9-15)给出的是期望的闭环特征方程。

(3) 仿照图 4-20 画出该控制对象的信号流图，再在其中加入(1)问的反馈增益。

(4) 写出(3)问绘出的流图对应的状态方程，以检验(2)问求得的系统矩阵($\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$)。

(5) 列出(3)问中所有的环路增益，然后用梅森增益公式验证(3)问的流图具有(1)问和(2)问的特征方程。

9.2-3 图 P9.2-3 中展示了一个室温控制系统的模型。该系统在习题 1.6-1 中已有描述，在该题中，忽略干扰输入，选 $T=0.6$s，令 $D(z)=1$。在习题 6.2-4 中我们得到：

$$(0.04)\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{2}{s(s+0.5)}\right]=\frac{0.04147}{z-0.7408}$$

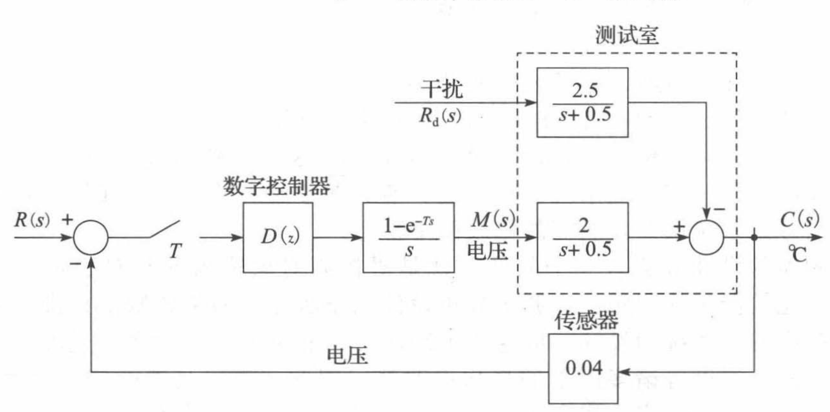


图 P9.2-3 室温控制系统

注意，传感器增益已经包含在传递函数中。

(1) 画出控制对象和传感器的流图。写出状态方程，其中，状态变量 $x(k)$等于系统输出，而系统输出 $y(k)$又等于传感器输出。

(2) 求该闭环系统的时间常数 τ。

(3) 用极点配置设计法，求使闭环时间常数 $\tau=1$s 的系统增益 $\boldsymbol{K}$。注意传感器增益不介入这些计算。

(4) 利用式(9-15)证明(2)问给出的增益 $\boldsymbol{K}$ 能够得到期望的特征方程。

(5) 画出系统框图(包括传感器)。令数字计算机实现增益 K_1，以使闭环系统时间常数如(2)问中所求。传感器必须具有给定的增益。

(6) 对(5)问的框图用如下特征方程证明该框图特征方程是所期望的：

$$1+K_1G(z)H=0$$

9.2-4　一卫星控制系统如图 P9.2-4 所示。习题 1.4-1 给出了该系统的描述。令 $D(z)=1$，$K=1$，$T=1s$，$J=4$，$H_k=1$。查 z 变换表，得：

$$\frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\frac{1}{4s^3}\right]=\frac{0.125(z+1)}{(z-1)^2}$$

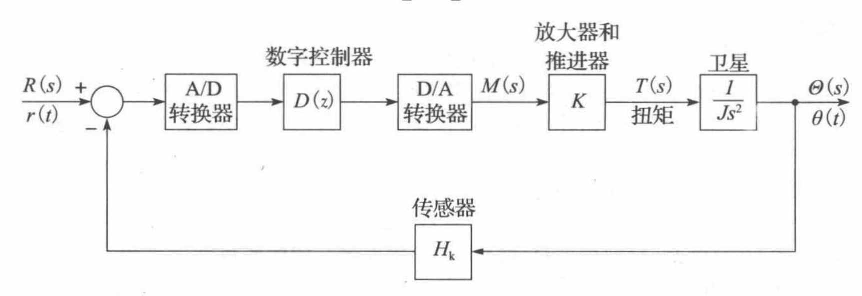


图 P9.2-4　卫星控制系统框图

则该系统的状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.125\\ 0.25\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

其中，$x_1(k)$是角位置，$x_2(k)$为角速度。

(1) 证明该闭环系统不稳定。

(2) 用极点配置设计法，求出使闭环系统阻尼系数为 0.707、时间常量为 4s 的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$。

(3) 利用式(9-15)证明(2)问给出的增益 $\boldsymbol{K}$ 能够得到期望的特征方程。

9.3-1　继续习题 9.2-2 中极点配置的设计问题。

(1) 为这个系统设计一个预观测器，使时间常数是习题 9.2-2 的(1)问时间常数的一半，且观测器处于临界阻尼。

(2) 为检验(1)问的结果，用式(9-46)来证实这些结果能够得到所期望的观测器特征方程。

(3) 写出图 9-8 所示系统对应的控制观测器传递函数$D_{ce}(z)$，其中，控制增益矩阵沿用习题 9.2-2 (1)求得的结果。

(4) 图 9-8 所示的闭环系统特征方程为：

$$1+D_{ce}(z)G(z)=0$$

把给定的 $G(z)$以及(3)中的$D_{ce}(z)$代入上述方程，证明所得特征方程与由$\alpha_c(z)\alpha_e(z)=0$ 得到的特征方程相同。

9.3-2　继续讨论习题 9.2-3 的室内温度控制系统。

(1) 为该系统设计一个预观测器，使时间常数是习题 9.2-3 的(2)问所给时间常数的一半。

(2) 为检验(1)问的结果，用式(9-46)来证实这些结果能够得到所期望的观测器特征方程。

(3) 写出图 9-8 所示系统对应的控制观测器传递函数$D_{ce}(z)$，其中，控制增益矩阵沿用习题 9.2-3 的(2)问求得的结果。$D_{ce}(z)$中不应包括传感器增益。

(4) 画出(2)问的系统框图，其中，图 P9.2-3 中的 $D(z)$等于$D_{ce}(z)$。

(5) 利用(4)问的框图证明该系统的特征方程。

(6) 请问：为这个系统设计一个降维观测器会有哪些影响？

9.3-3　考虑习题 9.2-4 中的卫星控制系统。

(1) 为这个系统设计一个预观测器，使时间常量是习题 9.2-4 的(2)问所给时间常数的一半，且观测器处于临界阻尼。

(2) 为检验(1)问的结果，用式(9-46)来证实这些结果能够得到所期望的观测器特征方程。

(3) 写出图 9-8 所示系统对应的控制观测器传递函数$D_{ce}(z)$，其中，控制增益矩阵沿用习题 9.2-4 的(2)问求得的结果：$\boldsymbol{K}=(0.3893\quad 1.769)$。

(4) 图 9-8 所示的闭环系统特征方程为：

$$1+D_{ce}(z)G(z)=0$$

把给定的 $G(z)$以及(3)问的$D_{ce}(z)$代入上述方程，证明所得特征方程与由$\alpha_c(z)\alpha_e(z)=0$ 得到

的特征方程相同。

9.3-4　假设方程式(9-25)，这个极点配置设计过程中的阿克曼方程是式(9-15)的解。基于此，证明式(9-48)，这个观测器设计过程中的阿克曼方程是式(9-46)的解。

9.3-5　式(9-56)给出了带预观测器的极点配置的闭环系统状态模型。拓展这个模型，使其像式(9-44)一样包含控制对象的干扰及传感器噪声。

9.4-1　继续讨论习题 9.2-2 的控制系统。

(1) 为该系统设计一个降维观测器，使时间常数是习题 9.2-2(1)问所求时间常数的一半。

(2) 为检验(1)问的结果，用式(9-63)来证实这些结果能够得到所期望的观测器特征方程。

(3) 写出图 9-8 所示系统对应的控制观测器传递函数$D_{ce}(z)$，其中，控制增益矩阵沿用习题 9.2-2 的(1)问求得的结果。

(4) 图 9-8 所示闭环系统特征方程为：

$$1+D_{ce}(z)G(z)=0$$

把给定的 $G(z)$以及(3)问中的$D_{ce}(z)$代入上述方程，证明所得特征方程与由$\alpha_c(z)\alpha_e(z)=0$ 得到的特征方程相同。

9.4-2　讨论习题 9.2-4 的卫星控制系统。

(1) 为该系统设计一个降维观测器，使时间常数是习题 9.2-4(2)问所求结果的一半。

(2) 为检验(1)问中的结果，用式(9-63)证实这些结果能够得到所期望的观测器特征方程。

(3) 写出图 9-8 所示系统对应的控制观测器传递函数$D_{ce}(z)$，其中，控制增益矩阵沿用习题 9.2-4 的(2)问求得的结果：$\boldsymbol{K}=(0.3893\quad 1.769)$。

(4) 图 9-8 所示的闭环系统特征方程为：

$$1+D_{ce}(z)G(z)=0$$

把给定的 $G(z)$以及(3)问中的$D_{ce}(z)$代入上述方程，得到与$\alpha_c(z)\alpha_e(z)=0$ 一致的特征方程。

9.4-3　继续讨论习题 9.4-2 设计的降维观测器。设速率[$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$]是用位置[y]及其他信息估计的量。我们可以用 8.8 节描述的数值微分器简便地计算速率。然后再用这个速度计算值代替系统中的估计值(这是 PID 控制器中的常用方法)。

(1) 认为控制对象观测器是一个开环系统，如图 9-4 所示。计算 $U(z)=0$ 条件下的传递函数 $Q(z)/Y(z)$，其中，$q(kT)$是速率的观测器估计值。提示：利用式(9-62)，并使 $u(k)=0$。

(2) 针对(1)问给出的传递函数，画出关于ω_w的伯德图。

(3) 8.8 节给出的数值微分器为：

$$D(z)=\frac{z-1}{Tz}$$

请在(2)问的同一张图上画出该传递函数的伯德图。

(4) 比较两个频率响应的异同。

9.4-4　在图 9-8 所示系统中，观测器是降维的，系统是单输入单输出的情况，试证明等效控制器的传递函数$D_{ce}(z)$为式(9-66)。

9.5-1　设计实时观测器，重复习题 9.3-1 的所有问题。

9.5-2　设计实时观测器，重复习题 9.3-2 的所有问题。

9.5-3　(1) 写出习题 9.3-2 的(1)问系统的闭环状态方程，使其具有式(9-56)的形式。

(2) 用(1)问的结果列出系统特征方程，证实其为期望的方程。

(3) 对习题 9.2-2 的闭环系统，重复问题(1)和问题(2)。

9.5-4　讨论图 P9.2-3 的室温控制系统。其中，传感器增益由 $H=0.04$ 替换为 $H=1$，使其成为单位反馈系统。

(1) 在 $H=1$ 的情况下，完成习题 9.2-3 的要求。

(2) 在 $H=1$ 的情况下，完成习题 9.3-2 的要求。

(3) 在 $H=1$ 的情况下，完成习题 9.5-2 的要求。

(4) 在 $H=1$ 的情况下，完成习题 9.5-3 的要求。

9.5-5　(1) 对于 9.5 节提出的实时观测器，证明从输入 $\boldsymbol{U}(z)$到观测状态 $\boldsymbol{Q}(z)$的转移矩阵等于从输入到状态 $\boldsymbol{X}(z)$的转移矩阵；即证明 $\boldsymbol{Q}(z)/\boldsymbol{U}(z)=\boldsymbol{X}(z)/\boldsymbol{U}(z)$。

(2) 对于 9.5 节提出的实时观测器，证明图 9-8 所示的观测器-控制器组合传递函数为式(9-73)，即

$$D_{ce}(z)=z\boldsymbol{K}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{GCA}+\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{GCBK}]^{-1}\boldsymbol{G}$$

9.5-6　推导由式(9-74)给出的闭环实时观测器极点配置系统状态模型。

9.6-1　对于式(9-82)所描述的系统：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)$$

推导该系统在 $\boldsymbol{u}(k)$不为 0 情况下的能观性条件。

9.6-2　对于例 9.2 中控制对象的状态描述：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.9048\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.00484\\ 0.0952\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

设输出为

$$\boldsymbol{y}(k)=(0\quad 1)\boldsymbol{x}(k)$$

(1) 该系统能观吗？

(2) 从系统的物理性质角度对(1)问的结论做出解释。

9.6-3　对于习题 9.2-4 的卫星控制系统，设输出是角速度的测量值，即

$$\boldsymbol{y}(k)=(0\quad 1)\boldsymbol{x}(k)$$

(1) 该系统能观吗？

(2) 从系统的物理性质角度对(1)问的结论做出解释。我们试图在给定速度下估计位置。

9.6-4　对习题 9.2-3 的温度控制系统。

(1) 判断该系统是否能控。

(2) 将一个观测器加入到习题 9.3-2 的系统中，方程如下[见式(9-38)]：

$$\begin{aligned}q(k+1)&=(A-GC)q(k)+Gy(k)+Bu(k)\\&=0.3012q(k)+10.99y(k)+1.0368u(k)\end{aligned}$$

以$(x(k)\quad q(k))^{\mathrm{T}}$为状态向量、以 $u(k)$为输入，构建一组控制对象观测系统的状态方程(即没有反馈)。

(3) 证明这个控制对象观测器系统是不能控的。

(4) 基于(1)问的结果，判断哪个状态是不能控的？

9.6-5　一阶控制对象的描述如下：

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$
$$y(k)=Cx(k)$$

它的预观测器描述见式(9-38)。

(1) 以向量$(x(k)\quad q(k))^{\mathrm{T}}$为状态、以 $u(k)$为输入，构建一组控制对象观测系统的状态方程(即没有反馈)。

(2) 证明该系统总是不能控的，忽略观测器增益 G。

9.6-6　用实时观测器重复完成习题 9.6-5 的问题。

9.6-7　对于习题 9.6-5 的系统，用传递函数法证明传递函数 $Q(z)/U(z)$是一阶的(即便系统是二阶的)，且等于 $X(z)/U(z)$。因此，$Q(z)$的模型$(A-GC)^k$不受输入信号 $u(k)$所激励。

9.6-8　用实时观测器重复完成习题 9.6-7 的问题，其中 $Q(z)$等于$(A-GC)^k$。

9.7-1　在习题 9.2-3 中，通过对卫星控制系统的极点配置设计得到增益矩阵 $\boldsymbol{K}=(0.3893\quad 1.769)$。我们期望有一个输入信号 $r(t)$作用于系统，以实现图 9-12 的系统。所得到的状态方程为如下形式：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{r}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}(k)$$

计算其中所有矩阵。

9.7-2　对于习题 9.2-3 的温度控制系统，重复完成习题 9.7-1 问题，其中，状态方程为：

$$x(k+1)=0.7408x(k)+1.0368u(k)$$
$$y(k)=0.04x(k)$$

控制增益 $K=0.1852$。

第10章

离散时间系统的系统辨识

10.1 引言

系统辨识指的是为系统构建数学模型的过程，所依据的是从测出的系统输出与可能的一些输入之间找到一种合理的结合。当一个系统底层运作的物理原理未知的时候，系统辨识就显得尤为重要。我们对许多工程系统以及自然界中的系统工作的物理机制往往就是未知的。举例来说，机器人在执行给定任务时，人们很难得出在外部干扰力矩下机器人偏转角度的确切数学关系。事实上，这一关系在机器人的设计过程中是至关重要的，需要让它能够在任务中克服最坏的情况以扭转逆境。一种解决方案是，在机器人上施加转矩，并令转矩强度持续增大，同时使用精密运动传感器测量各转矩下的转角，然后启用系统辨识，即利用输入(转矩)与测到的输出(转角)数据推导二者的数学关系。那么，就可以通过这个导出的关系预测任意转矩下，机器人将会旋转的角度。也可以利用得到的这个关系来设计适当的控制器，以使机器人能够经受得住最恶劣的扭矩输入。

系统辨识器的复杂度依赖于已掌握的目标系统的先验知识。例如，辨识前可能对要研究的系统如何工作，或该系统的行为被怎样的物理规律所掌控，或系统的动力学模型是几阶的知之甚少甚至一无所知，这种情况下的辨识也称作是非结构化辨识或黑箱辨识。然而有时候，人们是可以获知几条有关系统的先验信息的，这要视具体情况而定，系统的先验信息会有助于系统辨识。例如，对于两个不同的机器人，我们事先已知它们的运动都符合牛顿定律，这就可以帮助我们对它们的数学模型的结构化形式进行可视化，但是我们可能并不知道它们各自的转动惯量和时间常数。这样的案例称作结构化辨识或灰箱辨识，这意味着寻找系统完美模型的工作并非完全无据可循。通常，灰箱辨识又称为参数估计，意思是模型的总体结构已知，而模型参数未知，这时，要做的只是从系统的输入和输出测量值中将未知的参数估计出来。一旦系统的可靠数学模型被辨识出来，就可以用它来进行系统的预测和控制。

在本章，我们将介绍几种静态和动态的离散时间系统的辨识方法。尽管关于非线性系统辨识的研究文献也很丰富，但为简单起见，我们把要讨论的问题限制在LTI系统上。首先介绍未知静态系统代数方程的构建方法，然后介绍如何利用输入和输出的测量数据，辨识动态系统的状态变量模型(时域辨识)和传递函数模型(频域辨识)的方法。大家应把兴趣点放在辨识特别是动态辨识是相当开放的问题上来，就是说，如果向待辨识的模型中加入不计其数的快速极点或快速零点，所得到的输入输出轨迹与原始轨迹近乎一致，这表明辨识模型并不是唯一的。本章介绍的辨识方法是辨识出能够与输入输出测量值相匹配的、在其传递函数中不存在任何进一步的零极点相消的、尽可能的最简模型。决定辨识方法准确性的另一个重要因素是能否选出合适的采样间隔。比如说，若输出的采样间隔选得过大，就可能难以捕获状态变量瞬态响应的全部重要特性，从而使所构建的模型是错误的。因此，必须确保采样率相对于系统的时间常数足够高，以捕捉所有零极点在输出中的作用。

10.2 静态系统的辨识

静态系统是无记忆的系统，这类系统的模型表现的是输入 $u(k)$ 与输出 $y(k)$ 之间的代数关系，其中，k 表示采样次数。对这类系统模型的辨识要比动态系统相对容易且直接得多。一种具有代表性的方法就是利用 $y(k)$ 与 $u(k)$ 的非线性函数之间的参数相关性，这里

的$u(k)$的非线性函数通常称为基函数。关系模型具有如下形式：

$$y(k) = \beta_0 + \beta_1\varphi_1(u(k)) + \beta_2\varphi_2(u(k)) + \cdots + \beta_n\varphi_n(u(k)) \tag{10-1}$$

式中：参数β_i是未知实数；$\varphi_i(u(k))$是已知的关于输入 $u(k)$的实值函数；$n>0$ 且为整数（已知或未知），用于表示$\varphi_i(u(k))$的阶。

待解决的问题是用$u(k)$与$y(k)$的测量值来估计常数β_i。如果常数 n 未知，那么通常的做法是先给 n 一个初猜值，然后估计β_0，β_1，…，β_n，检验此时的辨识模型输出$\hat{y}(k)$是否与相同输入 $u(k)$下测到的输出 $y(k)$足够接近。如果二者相差较大，就加大 n 值重新估计，直到获得合理的结果为止。如果常数 n 已知，估计参数β_i的方法就是把所有的输出测量值整理成矩阵 $\boldsymbol{y}$，把所有的β_i整理成向量$\boldsymbol{\beta}$，把所有的$\varphi_i(u(k))$整理成矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，然后，用如下的矩阵表示式(10-1)的方程：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(u(0)) & \varphi_2(u(0)) & \cdots & \varphi_n(u(0)) \\ 1 & \varphi_1(u(1)) & \varphi_2(u(1)) & \cdots & \varphi_n(u(1)) \\ 1 & \varphi_1(u(2)) & \varphi_2(u(2)) & \cdots & \varphi_n(u(2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_1(u(N)) & \varphi_2(u(N)) & \cdots & \varphi_n(u(N)) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} \tag{10-2}$$

采样数 N 一定要选的远大于n，这意味着矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 属于瘦型矩阵，即行数比列数多。未知的参数向量$\boldsymbol{\beta}$就可以用下面的公式来估计：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underbrace{(\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{\Phi}^{+}}\boldsymbol{y} \tag{10-3}$$

式中：矩阵$\boldsymbol{\Phi}^{+}$称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的 P-M(Penrose-Moore)伪逆矩阵。

诚然，还有另一种导出同样结果的方法，这种方法以下述方式切入该问题：对于每一个采样点 k，定义一个误差项：

$$\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\beta} \tag{10-4}$$

式中：$\boldsymbol{y}(k)$是输出的测得值；$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)=(1\quad \varphi_1(u(k))\quad \varphi_2(u(k))\cdots \varphi_n(u(k)))$，这时的未知参数向量$\boldsymbol{\beta}$可以作为优化问题的一个解来估计：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} e^2(k)} \tag{10-5}$$

求解上式会得到式(10-3)的结果。这是一种通常称作最小二乘的求解方法，所得$\hat{\boldsymbol{\beta}}$也称为最小二乘估计，由式(10-5)可以看出，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$是使得理论输出与测量输出间误差的平方和达到最小的最优解。

在这一步，有一个问题必须解决，就是面对任意一组给定输入下的输出测量值，如何选择式(10-1)中的基函数φ_i。当然，问题的答案取决于我们掌握了多少关于系统行为的先验知识，在许多实际系统的辨识实践中，普遍的做法是把φ_i设定为输入 $u(k)$的多项式函数。例如，选择一个阶数 n，则式(10-1)的一个多项式近似为：

$$y(k) = \beta_0 + \beta_1 u(k) + \beta_2 u^2(k) + \cdots + \beta_{n-1}u^{n-1}(k) + \beta_n u^n(k) \tag{10-6}$$

这时，方程式(10-2)便获得了它的特定形式：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u(0) & u^2(0) & \cdots & u^n(0) \\ 1 & u(1) & u^2(1) & \cdots & u^n(1) \\ 1 & u(2) & u^2(2) & \cdots & u^n(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u(N) & u^2(N) & \cdots & u^n(N) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} \tag{10-7}$$

遵循式(10-3)求解上式。MATLAB 软件中有一个多项式拟合函数，可以用来求解式(10-7)，解出未知的参数向量 $\boldsymbol{\beta}$。下面我们引入一个例子来重点说明这个多项式拟合函数对一组特定的输入输出测量值的应用。

例 10.1 已知数据集如表 10-1 所示。其中，$u(k)$ 是某一静态系统的输入(自变量)，$y(k)$ 是输入下所得输出(因变量)，$k=1, 2, \cdots, 10$。找出一个多项式，用于拟合 $y(k)$ 与 $u(k)$ 间的关系。

表 10-1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(k)$	0	100	800	4200	15 800	46 900	108 000	262 600	532 000	1 000 700

利用 MATLAB 语言的多项式拟合函数，可以得到不同阶次 n 下的拟合结果：

$$n=1: \quad y(k)=-282\,260+87\,160u(k)$$

$$n=2: \quad y(k)=235\,780-171\,910u(k)+23\,550u^2(k)$$

$$n=3: \quad y(k)=-127\,940+150\,770u(k)-46\,410u^2(k)+4240u^3(k)$$

依据给定的实际数据，所得三种不同的多项式拟合结果如图 10-1 所示。不难发现，$n=3$ 时的拟合结果与实际数据非常接近。

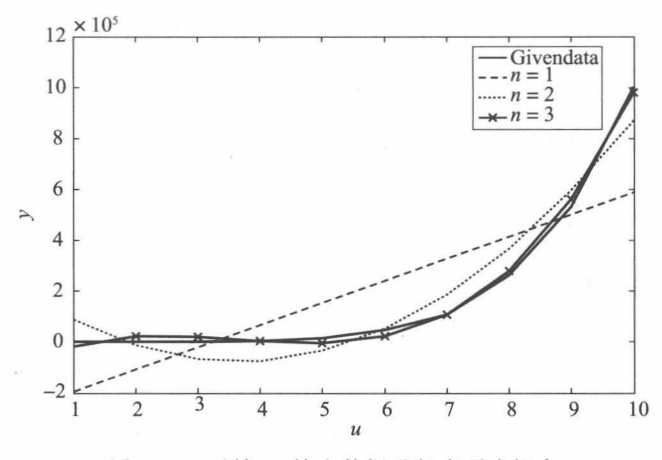


图 10-1 对输入-输出数据进行多项式拟合 ◀

10.3 动态系统的辨识

式(10-5)的最小二乘法给出了一个合理的准确辨识静态系统的方法，而动态系统的辨识问题则要复杂很多。对于离散时间 LTI 系统来说，要解决如下的问题。对于状态变量模型：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{aligned} \tag{10-8}$$

式中：$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^p$；$n$ 为系统的阶数。

整数 n 与矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 均未知。我们的任务是利用可能混有测量噪声的 N 次采样值 $\boldsymbol{y}(k)$ 与 $\boldsymbol{u}(k)$，将 n 和 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 这 4 个系统矩阵估计出来，这项工作等同于相似变换问题，有几种解决方法，以适应测量中混入噪声的不同量级。下面，介绍一种适合于测量过程并未混入任何噪声的 4 个系统矩阵的估计方法。而适合于测量中混入噪声时的方法可参见文献[1][2]。我们首先介绍对 n 和系统矩阵毫无任何先验知识时的辨识方法，也即黑箱辨识，这种方法常用于时域。然后，重提最小二乘法，介绍如何运用最小二乘法解决传递函数(式

(10-8))中零极点数已知情况下的辨识问题，这时，适合于在频域中寻求答案。

10.4 黑箱辨识

为了简单而又不失一般性，设式(10-8)描述的是一个单输入单输出系统(SISO)，即 $m=p=1$。同时设输入 $u(k)$ 为如下形式：

$$u(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0 & k=1,2,\cdots,N\end{cases} \tag{10-9}$$

即输入是一个短暂的单位脉冲。因为式(10-8)的系统是线性的，不失一般性，再设状态 $x(k)$ 的初值为0，即 $\boldsymbol{x}(0)=\mathbf{0}$。在继续讨论之前，需要做出如下三条重要假设。

假设1：由式(10-8)描述的LTI系统即能控又能观。

假设2：输入 $u(k)$ 的激励作用持续存在，就是说，信号 $u(k)$ 丰富到足以将动态模型主导性作用全部激发出来并反映在输出 $y(k)$ 中。

假设3：U_f(未来输入)的行空间和 X_p(过去状态)的行空间的交集为空集。任意 f 和 p 下的矩阵 $\boldsymbol{U}_f$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}_p$ 的定义如下：

$$\boldsymbol{U}_f=\begin{pmatrix} u(i) & u(i+1) & u(i+2) & \cdots & u(i+j-2) & u(i+j-1)\\ u(i+1) & u(i+2) & u(i+3) & \cdots & u(i+j-1) & u(i+j)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y(f) & y(f+1) & y(f+2) & \cdots & y(f+j-2) & y(i+j-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y(2i-1) & y(2i) & y(2i+1) & \cdots & y(2i+j-1) & y(2i+j-2)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_p=\begin{pmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & \cdots & x(j-2) & x(j-1)\\ x(1) & x(2) & x(3) & \cdots & u(j-1) & x(j)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x(p) & x(p+1) & x(p+2) & \cdots & x(p+j-2) & x(p+j-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x(i-1) & x(i) & x(i+1) & \cdots & x(i+j-3) & x(i+j-2)\end{pmatrix}$$

有了这三条假设，我们继续介绍利用 $u(k)$、$y(k)$，$k=0$，1，2…，p 估计式(10-8)的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 的步骤。第一步，注意到 $\boldsymbol{x}(0)=\mathbf{0}$ 和 $u(0)=1$，根据式(10-8)，得到：

$$y(0)=\boldsymbol{Cx}(0)+Du(0)=D \tag{10-10}$$

这意味着标量 D 就等于输出的最初采样值。利用这一点，进一步寻求对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的估计。根据对输入的定义、初始状态以及模型(10-8)，可以写出：

$$y(1)=\boldsymbol{Cx}(1)+Du(1)=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Ax}(0)+\boldsymbol{B}u(0))=\boldsymbol{CB}$$
$$y(2)=\boldsymbol{Cx}(2)+Du(2)=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Ax}(1)+\boldsymbol{B}u(1))=\boldsymbol{CAB}$$
$$y(3)=\boldsymbol{Cx}(3)+Du(3)=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Ax}(2)+\boldsymbol{B}u(2))=\boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}$$

等等。整理之后可以写成下面的通式：

$$y(i)=\boldsymbol{CA}^{i-1}\boldsymbol{B} \tag{10-11}$$

式中：$i=0$，1，2…，p。

接下来，按照以下方式将输出采样值收集起来，构建矩阵 $\boldsymbol{H}_1$(也称汉克尔(Hankel))矩阵：

$$\boldsymbol{H}_f=\begin{pmatrix} y(1) & y(2) & y(3) & \cdots & y(M-1) & y(M)\\ y(2) & y(3) & y(4) & \cdots & y(M) & y(M+1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y(i) & x(i+1) & y(i+2) & \cdots & y(M+i-2) & x(M+i-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y(N) & y(N+1) & x(N+2) & \cdots & y(M+N-2) & y(M+N-1)\end{pmatrix} \tag{10-12}$$

在保证 $M+N-1<p$ 的前提下，常量 M 与 N 的值可以任选，但这两个值又要必须足够大，以维持住系统的阶数 n。利用式(10-11)和式(10-12)，可以写出：

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{CB} & \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{M-2}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{M-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^3\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{M-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{M}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{i-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{i}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{i+1}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{M+i-3}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{M+i-2}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{N}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{N+1}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{M+N-3}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{M+N-2}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \tag{10-13}$$

观察式(10-13)右侧矩阵(RHS)的结构，很容易发现 $\boldsymbol{H}_1$ 也可以写成：

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{OL} \tag{10-14}$$

式中：

$$\boldsymbol{O}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{CA})^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{CA}^2)^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad (\boldsymbol{CA}^{N-1})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

是系统式(10-8)的能观性矩阵，而

$$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{M-1}\boldsymbol{B})$$

是系统式(10-8)的能控性矩阵。因为所选的 M 和 N 明显大于 n，我们来考虑对 $\boldsymbol{H}_1$ 进行奇异值分解(SVD)，以此来消除 $\boldsymbol{H}_1$ 中所有不必要的模式。SVD 形式如下：

$$\boldsymbol{H}_1=(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{pmatrix} \tag{10-15}$$

式中：$\boldsymbol{U}_1$、$\boldsymbol{U}_2$、$\boldsymbol{V}_1$ 和 V_2 为酉矩阵；$\boldsymbol{\Sigma}_1$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_2$ 为对角方阵且含有 $\boldsymbol{H}_1$ 的奇异值。

选择 $\boldsymbol{\Sigma}_1$ 以使重要的非零奇异值都集中在 $\boldsymbol{\Sigma}_1$ 的主对角线上，而 $\boldsymbol{\Sigma}_2$ 对角线上的元素都为 0 或接近 0。由此可以忽略掉 $\boldsymbol{\Sigma}_2$ 的奇异值，系统的阶数降为 $\boldsymbol{\Sigma}_1$ 的维数。因此认为，n 等于 $\boldsymbol{\Sigma}_1$ 中对角元素的个数。之后，我们定义降维的汉克尔矩阵为：

$$\overline{\boldsymbol{H}}_1=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{V}_1 \tag{10-16}$$

根据式(10-14)和式(10-16)，可以轻松推导出：

$$\overline{\boldsymbol{H}}_1=\overline{\boldsymbol{O}}\,\overline{\boldsymbol{L}} \tag{10-17}$$

式中：

$$\overline{\boldsymbol{O}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{CA})^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{CA}^2)^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad (\boldsymbol{CA}^{n-1})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

及

$$\overline{\boldsymbol{L}}=(\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})$$

分别是 $n\times n$ 的满秩能观性和 $n\times n$ 的满秩能控性矩阵。方程式(10-16)也可以写作：

$$\overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}_1=(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}_1) \tag{10-18}$$

根据假设 3，以及式(10-17)和式(10-18)，下面两式成立：

$$\overline{\boldsymbol{O}}=(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{T}{2}}\boldsymbol{U}_1)^{\mathrm{T}} \tag{10-19}$$

$$\overline{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{T}{2}}\boldsymbol{V}_1 \tag{10-20}$$

因为 n 的值在前面已经获知，接下来，我们来构建另一个汉克尔矩阵如下：

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix} y(2) & y(3) & y(4) & \cdots & y(n) & y(n+1) \\ y(3) & y(4) & y(5) & \cdots & y(n+1) & y(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(i) & y(i+1) & y(i+2) & \cdots & y(n+i-2) & y(n+i-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y(n+1) & y(n+2) & y(n+3) & \cdots & y(2n-1) & y(2n) \end{pmatrix} \tag{10-21}$$

由式(10-10)容易看出，可以把 $\boldsymbol{H}_2$ 写成：

$$
\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^3\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^n\boldsymbol{B}\\
\boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^3\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^4\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^n\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{n+1}\boldsymbol{B}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{CA}^i\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{i+1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{i+2}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{n+i-2}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{n+i-1}\boldsymbol{B}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{CA}^n\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{n+1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{n+2}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{2n-2}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{2n-2}\boldsymbol{B}
\end{pmatrix} \tag{10-22}
$$

若利用$\overline{\boldsymbol{O}}$与$\overline{\boldsymbol{L}}$的定义，上式还可以写成：

$$\boldsymbol{H}_2=\overline{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{L}} \tag{10-23}$$

再利用式(10-19)和式(10-20)，将以上表述改写为：

$$\boldsymbol{H}_2=((\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}_1) \tag{10-24}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的估计式为：

$$\hat{\boldsymbol{A}}=((\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_1)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}_1)^{-1} \tag{10-25}$$

至此，式(10-25)右侧(RHS)的矩阵均为已知。其中，$\boldsymbol{H}_2$是利用式(10-21)从 $y(k)$的采样值中构建出来的，而$\boldsymbol{U}_1$，$\boldsymbol{V}_1$和$\boldsymbol{\Sigma}_1$是从已知矩阵$\boldsymbol{H}_1$的 SVD 中获得的。因此，式(10-25)给出了从已知的 $u(k)$和 $y(k)$计算$\hat{\boldsymbol{A}}$的可行方法。

类似的，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也可以通过如下方法计算出来。已知

$$\overline{\boldsymbol{O}}=\widetilde{\boldsymbol{C}}\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}^{n-1}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Lambda}_1} \tag{10-26}$$

式中：$\widetilde{\boldsymbol{C}}$是对角块为 $\boldsymbol{C}$ 的块对角矩阵。

利用式(10-19)和式(10-26)写出：

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=((\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} \tag{10-27}$$

最后，通过提取$\widetilde{\boldsymbol{C}}$第一行的前$n$个元素估计$\boldsymbol{C}$。通过相近的方法，得到：

$$\overline{\boldsymbol{L}}=\underbrace{[\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}]}_{\boldsymbol{\Lambda}_2}\widetilde{\boldsymbol{B}} \tag{10-28}$$

式中：$\widetilde{\boldsymbol{B}}$是对角块为 $\boldsymbol{B}$ 的块对角矩阵。

利用式(10-20)和式(10-28)，不难得到：

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}_1) \tag{10-29}$$

那么，通过提取$\widetilde{\boldsymbol{B}}$中第一行的前 $\boldsymbol{n}$ 个元素就可以估计出 $\boldsymbol{B}$。矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的另一种估计方法是从矩阵$\overline{\boldsymbol{O}}$与$\overline{\boldsymbol{L}}$的结构中直接将它们提取出来的。根据式(10-19)可以获知矩阵$\overline{\boldsymbol{O}}$，根据式(10-20)可以获知$\overline{\boldsymbol{L}}$。因此，利用式(10-17)，就可以简单地从矩阵$\overline{\boldsymbol{O}}$的第一行中提取出$\boldsymbol{C}$，而 $\boldsymbol{B}$ 就可以从矩阵$\overline{\boldsymbol{L}}$的第一列中提取到。这通常是估计矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的最简单的方法。在例 10.2 中，我们就将使用这种方法。

然而读者必须记住，状态估计是不唯一的。就是说，上述讨论的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 的估计仅仅在对实际状态空间模型的一种相似变换这个角度是准确的。

例 10.2 如表 10-2 所示数据采自一个单入单出的离散时间 LTI 系统的脉冲响应，采样时间为 $T=0.01$s。是在采样瞬间 $t=0$，0.01，0.02，…，0.08s 测得的输出值，如图 10-2 所示。

表 10-2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(k)$	0	0.996	−0.298	−0.0148	0.0338	−0.0081	−0.0011	0.0011	−0.0002

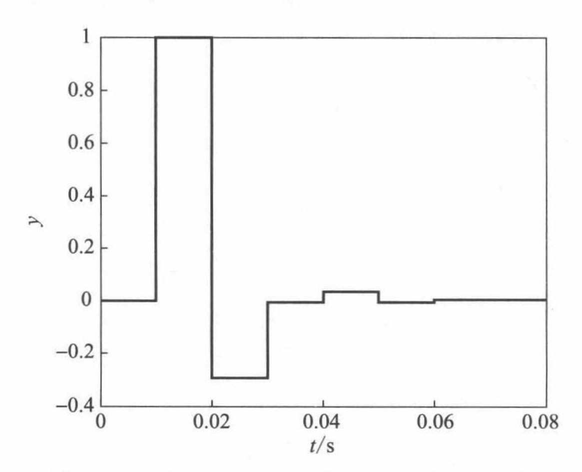


图 10-2 测到的输出随时间变化而变化的曲线

我们的任务是利用给出的 $y(k)$值以及 $u(k)$是脉冲的信息，来识别系统矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的相似变换以及相应的传递函数。下面的 MATLAB 代码是基于 10.4 节介绍的黑箱辨识算法编写的，用来估计这几个矩阵：

```
T=0.01;
y=[0;0.996;-0.298;-0.0148;0.0338;-0.0081;-0.0011;0.0011;-0.0002];
p=length(y)-1;
M=p/2; N=M;
  for i=1:N
    for j=1:M
      H1(i,j)=y(i+j);
    end
  end;
[u,s,v]=svd(H1);
n=2;
ubar=(u(:,1:n))';
sbar=s(1:n,1:n);
vbar=v(1:n,:);
for i=1:M
  for j=1:N
    H2(i,j)=y(i+j+1);
  end
end;
int1=(sqrt(sbar)*ubar)';
int2=sqrt(sbar)*vbar;
Ahat=pinv(int1)*H2*pinv(int2)
Bhat=int2(:,1)
Chat=int1(1,:)
[num1,den1]=ss2tf(Ahat,Bhat,Chat,0);
Ghat=tf(num1,den1,T)
```

由此算得的汉克尔矩阵$\boldsymbol{H}_1$的奇异值如图 10-3 所示，从中可以清晰地看出，系统阶次近似为二阶。辨识出的系统矩阵为：

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} -0.2511 & 0.2599 \\ -0.3010 & -0.0284 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} -1.0012 \\ 0.0853 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{C}} = (-1.0012 \quad -0.0800), \quad \hat{\boldsymbol{D}} = 0$$

相应的离散时间系统传递函数为：

$$\hat{G}(z) = \frac{0.9956z - 0.01955}{z^2 + 0.2795z + 0.08534}$$

提供输出 $y(k)$ 的那个实际系统的矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -0.1 & -0.3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=(0\quad 1)$$

该实际系统的传递函数为：

$$G(z)=\frac{z}{z^2+0.3z+0.1}$$

由此可见，辨识到的传递函数与实际的传递函数几乎完全一致。但是，应该注意的是，辨识到的状态变量模型与实际模型并不相同，如果忽略因数值误差引起的小差异，则这两个状态变量模型之间具有彼此呈相似变换的关系。下面是将辨识模型的脉冲响应与实际模型的脉冲响应进行对比的 MATLAB 代码：

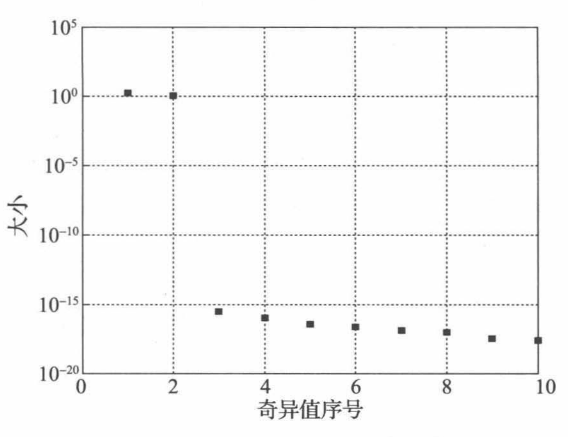


图 10-3　汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}_1$ 的奇异值

```
% Append this code to the program above
A=[0 1;-.1 -.3]; B=[0;1]; C=[0 1]; D=0;
sys1=ss(A,B,C,0,T);
sys2=ss(Ahat,Bhat,Chat,0,T);
t=[0:T:0.08];
stairs(t,impulse(sys1,t),'-k','LineWidth',2);
hold on;stairs(t,impulse(sys2,t),':k','LineWidth',2);
stepinfo(sys1), stepinfo(sys2)
```

表 10-3 对比着列出了两个模型的阶跃信息，图 10-4 展现了它们的阶跃响应。

表 10-3　实际系统和辨识系统的阶跃信息对比

实际系统	辨识系统
上升时间：0	上升时间：0
稳定时间：0.0400	稳定时间：0.0400
稳定下来的最小值：0.6900	稳定下来的最小值：0.6960
稳定下来的最大值：1	稳定下来的最大值：0.9956
超调：40.0000	超调：39.2168
下冲：0	下冲：0
峰值：1	峰值：0.9956
峰值时间：0.0100	峰值时间：0.0100

10.5　最小二乘系统辨识

在上一节，我们介绍了一种对模型式(10-8)不具备任何先验知识的黑箱辨识算法。在这一节，我们将提出 10.2 节介绍的最小二乘法的一种变体，用于对 $u(k)$ 到 $y(k)$ 的传递函数式(10-2)中零极点数已知的系统进行辨识。这种方法通常叫做最小二乘系统辨识，是最小二乘曲线拟合的一种简单拓展。因为系统描述式(10-8)中的零极点数已知，所以我们可以假设系统传递函数模型具备式(2-51)的形式，不过在这里，为标记方便，我们对其系数的编号顺序进行了调整：

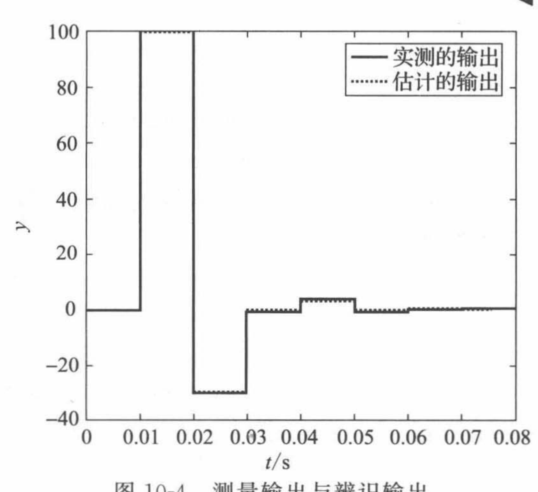


图 10-4　测量输出与辨识输出

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_{n-1}z + b_n}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_{n-1}z - a_n} \tag{10-30}$$

式中：$U(z)$为输入；$Y(z)$为输出。

因此得该系统的差分方程为：

$$\begin{aligned} y(k) =& a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) \\ &+ b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned} \tag{10-31}$$

通常称上式为自回归移动平均模型(ARMA)。我们的任务是利用输入输出序列的测量值$u(k)$和$y(k)$，确定模型中的参数向量：

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\ b_1\ b_2\ \cdots\ b_n]^{\mathrm{T}} \tag{10-32}$$

为了便于说明这个方法的使用，先考虑一阶的情况：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_1}{z - a_1}$$

由此，有

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1)$$

也即

$$\begin{aligned} y(1) &= a_1 y(0) + b_1 u(0) + e(1) \\ y(2) &= a_1 y(1) + b_1 u(1) + e(2) \\ y(3) &= a_1 y(2) + b_1 u(2) + e(3) \end{aligned}$$

式中：误差项 $e(k)$是由不精准的测量值和不精准的模型等所致。

上述方程还可以整理成如下的向量矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) & u(0) \\ y(1) & u(1) \\ y(2) & u(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ b(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \end{bmatrix}$$

该形式也可以作如下表述(用到的符号下面会加以解释)：

$$\boldsymbol{y}(3) = \boldsymbol{F}(3)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}(3) \tag{10-33}$$

我们希望在使预计的测量值与实际测量值之间的平方误差总和最小的前提下得到参数向量$\boldsymbol{\theta}$。下面介绍更为一般的辨识方法。

考虑 n 阶 ARMA 模型：

$$\begin{aligned} y(k) =& a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) \\ &+ b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned}$$

并且已知$(N+1)$组测量对：

$$\{u(0), y(0)\}, \{u(1), y(1)\}, \cdots, \{u(N) y(N)\} \tag{10-34}$$

式中：$N \geqslant n$。

按如下关系式定义向量 $\boldsymbol{f}(k)$：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k) = [y(k-1) y(k-2) \cdots y(k-n) \quad u(k-1) \cdots u(k-n)] \tag{10-35}$$

第一个误差 $e(n)$仅是已知测量数据的函数。那么，对于采样周期 n，$n+1$，…，N 来说，可以得到如下方程：

$$\left.\begin{aligned} y(n) &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{\theta} + e(n) \\ y(n+1) &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(n+1)\boldsymbol{\theta} + e(n+1) \\ &\vdots \\ y(N) &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{\theta} + e(N) \end{aligned}\right\} \tag{10-36}$$

式中：$\boldsymbol{\theta}$ 由式(10-32)给定。

使用如下符号：

$$\boldsymbol{y}(N)=\begin{bmatrix}y(n)\\y(n+1)\\\vdots\\y(N)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(N)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(n)\\\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(n+1)\\\vdots\\\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}(N)=\begin{bmatrix}e(n)\\e(n+1)\\\vdots\\e(N)\end{bmatrix} \tag{10-37}$$

可以把式(10-36)表述为：

$$\boldsymbol{y}(N)=\boldsymbol{F}(N)\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{e}(N) \tag{10-38}$$

在式(10-37)和式(10-38)中，$\boldsymbol{y}(N)$是$(N-n+1)\times 1$阶的、$\boldsymbol{F}(N)$是$(N-n+1)\times 2n$阶的，$\boldsymbol{\theta}$是$2n\times 1$阶的，而$\boldsymbol{e}(N)$是$(N-n+1)\times 1$阶的。

下面将代价函数$J(\boldsymbol{\theta})$定义为平方误差的和：

$$J(\boldsymbol{\theta})=\sum_{k=n}^{N}e^{2}(k)=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{e}(N) \tag{10-39}$$

那么，根据式(10-38)和式(10-39)，可得：

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{\theta})&=[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{F\theta}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{F\theta}]=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F\theta}+\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F\theta}\\&=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F\theta}\end{aligned} \tag{10-40}$$

其中，为简便起见，省略了式(10-39)中的符号N。为使$J(\boldsymbol{\theta})$达到最小，$\boldsymbol{\theta}$应满足如下方程：

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=-2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F\theta}=0 \tag{10-41}$$

也可以写作：

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F\theta}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{10-42}$$

由此，得$\boldsymbol{\theta}$的最小二乘估计为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}=[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{F}(N)]^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{y}(N) \tag{10-43}$$

上式要求逆矩阵存在，实际上，如果输入序列$\boldsymbol{u}(k)$是持续激励的(所有的系统动态行为均在足够的输入激励下发生)，且$\boldsymbol{\theta}$是可识别的(参数可以由数据唯一确定)，逆矩阵就将存在。

式(10-43)的结构因其中的矩阵转置而有些难以理解。下面以一个具有 4 组数据的二阶系统为例作简要说明。这时，$N=4$，有：

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(4)\boldsymbol{y}(4)=\begin{bmatrix}y(1)&y(0)&u(1)&u(0)\\y(2)&y(1)&u(2)&u(1)\\y(3)&y(2)&u(3)&u(2)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}y(2)\\y(3)\\y(4)\end{bmatrix} \tag{10-44}$$

由式(10-37)不难注意到，数据点的总量为$N+1$，且仅在最后一个数据点的输出会用到。

下面给出一个具体示例。

例 10.3 设对一个一阶系统测得如表 10-4 所示数据。

表 10-4

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1.0	0
1	0.75	0.3
2	0.50	0.225

且设该系统具有如下的传递函数：

$$G(z)=\frac{b_1}{z-a_1},\quad \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

因此，

$$y(k)=a_1y(k-1)+b_1u(k-1)=[y(k-1)\ u(k-1)]\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}$$

对式(10-37)，代入 $N=2$，得：

$$\boldsymbol{F}(2)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(1)\\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y(0) & u(1)\\ y(1) & u(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.3 & 0.75\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 0.3\\ 1 & 0.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.3 & 0.75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.09 & 0.225\\ 0.225 & 1.5625\end{bmatrix}$$

再计算其逆矩阵为：

$$[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}]^{-1}=\begin{bmatrix}17.361 & -2.5\\ -2.5 & 1\end{bmatrix}$$

根据式(10-43)，得 $\boldsymbol{\theta}$ 的最小二乘估计为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}=[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}]^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}17.361 & -2.5\\ -2.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0.3\\ 1 & 0.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\ 0.225\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2.5 & 3.333\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\ 0.225\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}$$

因此，传递函数的辨识结果为：

$$G(z)=\frac{0.3}{z}$$

差分方程为：

$$y(k)=0.3u(k-1)$$

可以看出，上面给出的测量数据完全符合该差分方程。就此例而言，测量数据最初就是从这个差分方程得到的。在客观环境下，做不到数据的如此精准契合，而实际上，误差 $e(k)$ 还可能比较大。

有时，我们更习惯使用如下形式来衡量误差：

$$J(\boldsymbol{\theta})=w(n)e^2(n)+w(n+1)e^2(n+1)+\cdots+w(N)e^2(N) \tag{10-45}$$

通常，我们把最近数据的比重设为最大。式(10-45)的代价函数可以写为：

$$J(\boldsymbol{\theta})=\sum_{k=n}^{N}w(k)e^2(k)=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{W}(N)\boldsymbol{e}(N) \tag{10-46}$$

式中：$\boldsymbol{W}(N)$ 是 $N\times N$ 的对角矩阵；对角元素为 $w_{ii}=w(i+n-1)$。

如果用上述方法将这个代价函数最小化，可得到加权最小二乘估计结果为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{WLS}}=[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{W}(N)\boldsymbol{F}(N)]^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{W}(N)\boldsymbol{y}(N) \tag{10-47}$$

下式是一种常用的加权项设定方案：

$$w(k)=a\gamma^{N-k},\quad \gamma\leqslant 1 \tag{10-48}$$

如果定义 $a=(1-\gamma)$，加权系数则为指数型。对小于 1 的 γ，最近数据在估计中起主要作用。当 γ 接近单位 1 时，数据的出现时间越早，其影响则会越大。在式(10-48)中，如果 $a=\gamma=1$，则加重矩阵 $\boldsymbol{W}(N)=\boldsymbol{I}$，这时，式(10-47)就变成了普通的最小二乘辨识方程式(10-43)。◀

例 10.4 某 LTI 系统在采样时间 $T=0.1$s 下，输入输出数据如表 10-5 所示。

表 10-5

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	0
1	1	1.0000
2	1	0.9000
3	1	0.7100
4	1	0.7490
5	1	0.7831
6	1	0.7719

我们希望根据给定的输入输出数据，得到传递函数的最小二乘估计。为此，一段利用其函数 arx()担当此任的 MATLAB 简单代码如下：

```
y=[0; 1; 0.9; 0.71; 0.749; 0.7831; 0.7719];
u=ones(length(y),1);
T=0.1;    %sampling time
% Create a data object using the measured values of the input
% vector u and the output vector y
data = iddata(y,u,T);
% Define constants for expected number of poles and zeros
na=2; % Expected number of poles
nb=1; % Expected number of zeros
nk=1; % Expected input time delay
% Estimate the transfer function coefficients using
m=arx(data,[na,nb,nk]);
m.a
m.b
```

其中，用整数 na，nb，nk 分别表示传递函数中的极点数、零点数，以及输入延迟，这些值必须可靠且根据先验知识确定下来。通常的做法是，令 na 等于期望的极点数，令 nk 为期望的输入延迟，且 $nb\leqslant na-nk+1$。函数 arx()中的变量 m 是 MATLAB 程序的一个对象，能返回两个不同的向量 $m.a$ 和 $m.b$，其中，$m.a$ 给出传递函数分母多项式中各 z 的负幂次项，$m.b$ 给出分子多项式中各 z 的负幂次项。所辨识出来的传递函数为：

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{m.b(1)+m.b(2)z^{-1}+\cdots+m.b(nb+nk)z^{-nk-nb+1}}{m.a(1)+m.a(2)z^{-1}+\cdots+m.a(na+1)z^{-na}}$$

$m.a$ 的第一个参数为 1，$m.b$ 参数的第一个 nk 值为 0。用这个 arx()函数为本例子估计传递函数的各系数为 $na=2$，$nb=1$，$nk=1$，即

```
m.a=    1.00    0.1    0.2

m.b=    0.0     1.0
```

这意味着辨识出的传递函数为：

$$G(z)=\frac{z^{-1}}{1+0.1z^{-1}+0.2z^{-2}}=\frac{z}{z^2+0.1z+0.2}$$

这与产生数据 $y(k)$ 的实际系统的传递函数完全一致。◀

10.6　部分零极点已知下的传递函数估计

有些情况下，系统传递函数的一个或几个零极点可能是已知的[5]。例如，可能会预先知道系统含有一个积分器，那么，连续时间函数就会在 $s=0$ 处有一个极点，由此推知在 $z=1$ 处有一个离散时间函数的极点。类似地，可能预先知道要研究的系统有一个微分器，那么连续时间函数就会在 $s=0$ 处有一个零点，由此推知在 $z=1$ 处有一个离散时间函数的零点。这时，就无需再耗时费力去估计这些已知的零极点，而应该对式(10-43)略加修改，得到一种简化的形式去估计传递函数的未知部分。设已知系统在 $z=\lambda_1$ 处有一个极点、在 $z=\lambda_2$ 处有一个零点，意味着该系统的传递函数可以写成：

$$G(z)=\frac{z-\lambda_2}{z-\lambda_1}\overline{G}(z)$$

式中：$\overline{G}(z)$是未知的，

$$\overline{G}(z)=\frac{\overline{Y}(z)}{\overline{U}(z)}$$

式中：$\overline{Y}(z)=(z-\lambda_1)Y(z)$；$\overline{U}(z)=(z-\lambda_2)U(z)$。

对应到时域，有：

$$\overline{y}(k)=y(k+1)-\lambda_1 y(k)$$

$$\overline{u}(k)=u(k+1)-\lambda_2 u(k)$$

因此，在给定不同 k 下的 $u(k)$、$y(k)$ 及 λ_1 和 λ_2 的前提下，可以先得到相应的 $\overline{u}(k)$ 和 $\overline{y}(k)$，再利用这些值通过最小二乘方法去辨识 $\overline{G}(z)$。一旦得到了 $\overline{G}(z)$，实际的传递函数就可以构建成 $\overline{G}(z)$ 与 $(z-\lambda_2)/(z-\lambda_1)$ 的乘积。

例 10.5 某 LTI 系统的输入输出数据如表 10-6 所示。

表 10-6

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	0
1	1	1
2	1	1.6
3	1	1.91
4	1	2.065

已知该系统含有一个零点、两个极点。其中，一个极点为 $z=0.5$。我们希望用给出的输入输出数据，进行传递函数的最小二乘估计。依题意，传递函数可以写成：

$$G(z)=\frac{1}{z-0.5}\overline{G}(z)=\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\overline{G}(z)$$

这意味着，我们首先需要利用 $\lambda_1=0.5$ 得到 $\overline{y}(k)$。这自然会把输出样本 $y(k)$ 的总数减到 4($k=0$, 1, 2, 3)，而且引入了一个输入延迟。为了辨识 $\overline{G}(z)$，需要用到与之相应的输入值。可以利用如下的 MATLAB 代码完成本例的工作，仍然使用 arx() 函数算出 $\overline{G}(z)$：

```
y=[0; 1; 1.6; 1.91; 2.066];
u=[1; 1; 1; 1; 1];
p=length(y); T=1;
lambda=0.5;
for k=1:1:p-1
ybar(k)=y(k+1)-lambda*y(k);
end;
ubar=u(1:p-1);
data=iddata(ybar',ubar,T);
na=1; % The number of remaining poles
nb=1; % The number of remaining zeroes
nk=0; % The remaining input delay (zero in this case)
m=arx(data,[na,nb,nk]);
m.a
m.b
```

得到的变量 m 的分子、分母的估计结果如下：

```
m.a=    1.0    -0.1

m.b=    1.0
```

这意味着辨识出来的传递函数 $\overline{G}(z)$ 为：

$$\overline{G}(z)=\frac{1}{1-0.1z^{-1}}=\frac{z}{z-0.1}$$

因此，$G(z)$ 的估计结果为：

$$G(z)=\frac{z}{(z-0.5)(z-0.1)}$$

这与生成上面输出数据的实际系统的传递函数完全相同。 ◀

10.7 递归的最小二乘系统辨识法

如果所有的测量均累积到够用的数量，且参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 经式(10-47)计算而得，就称这

个过程为批最小二乘辨识。换个角度，如果把式(10-47)整理成差分方程，数据样本一到，就启动对向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的计算，这种方法就称作递归的最小二乘辨识法。本节我们就来推导这种递归最小二乘辨识法的定义式。

从式(10-35)和式(10-36)可知，

$$\begin{aligned} y(k) &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}(k) \\ &= [y(k-1)\ y(k-2)\ \cdots\ u(k-1)\ \cdots]\boldsymbol{\theta} + e(k) \end{aligned}$$

再据式(10-37)，得：

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N+1) = [\boldsymbol{f}(n)\ \cdots\ \boldsymbol{f}(N)\ \boldsymbol{f}(N+1)] \tag{10-49}$$

权重因子设定为：

$$w(k) = a\gamma^{N+1-k}, \quad \gamma \leqslant 1 \tag{10-50}$$

于是，式(10-47)中待求逆的矩阵为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N+1)\boldsymbol{W}(N+1)\boldsymbol{F}(N+1) &= \sum_{k=n}^{N+1} \boldsymbol{f}(k)a\gamma^{N+1-k}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k) \\ &= \sum_{k=n}^{N+1} \boldsymbol{f}(k)a\gamma\gamma^{N-k}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k) + \boldsymbol{f}(N+1)a\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1) \\ &= \gamma\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{W}(N)\boldsymbol{F}(N) + \boldsymbol{f}(N+1)a\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1) \end{aligned} \tag{10-51}$$

这个由 $\boldsymbol{W}(N)$ 导出的矩阵形式是相对简单的对角型的。为表述方便，定义一个 $2n \times 2n$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}(k)$ 如下：

$$\boldsymbol{P}(k) = [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{W}(k)\boldsymbol{F}(k)]^{-1} \tag{10-52}$$

根据式(10-51)和式(10-52)，可以得到：

$$\boldsymbol{P}^{-1}(N+1) = \gamma\boldsymbol{P}^{-1}(N) + \boldsymbol{f}(N+1)a\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1) \tag{10-53}$$

在这一步，我们先重温一下矩阵求逆的引理，该引理指出如下关系恒等：

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BCD})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1} \tag{10-54}$$

令

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \gamma\boldsymbol{P}^{-1}(N), \quad &&\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(N+1) \\ &\boldsymbol{C} = a, &&\boldsymbol{D} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1) \end{aligned} \tag{10-55}$$

则可将式(10-53)右边的部分写成($\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD}$)。式(10-52)的逆矩阵就可以表示为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(N+1) = &\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(N) - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{f}(N+1) \\ &\times\left[\frac{1}{a} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1)\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{f}(N+1)\right]^{-1}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1)\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(N) \end{aligned} \tag{10-56}$$

因为上述方程对于任意的 $N \geqslant n$ 均有效，所以可以得到一个关于 $\boldsymbol{P}(k)$ 的差分方程。我们注意到，式(10-47)中逆矩阵的因子是标量，所以无需计算矩阵的逆。

用于批最小二乘辨识方法中求 $\boldsymbol{\theta}$ 的式(10-47)中，第二个因素可以整理为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} &= [\boldsymbol{f}(n)\ \cdots\ \boldsymbol{f}(N+1)]\begin{bmatrix} a\gamma^{N+1-n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a\gamma & \\ & & & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(n) \\ \vdots \\ y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix} \\ &= \gamma\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{W}(N)\boldsymbol{y}(N) + \boldsymbol{f}(N+1)a\boldsymbol{y}(N+1) \end{aligned} \tag{10-57}$$

其中，左侧的每一个矩阵均定义在 $N+1$ 的采样时刻，而且仅列出了 $\boldsymbol{W}(N+1)$ 中的非零元素。

将式(10-52)、式(10-56)和式(10-57)三式代入式(10-47)，替换成加权最小二乘解，经整理，得到如下一系列差分方程：

$$\boldsymbol{P}(N)=[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{W}(N)\boldsymbol{F}(N)]^{-1} \tag{10-58}$$

$$\boldsymbol{L}(N+1)=\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{f}(N+1)\left[\frac{1}{a}+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1)\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{f}(N+1)\right]^{-1} \tag{10-59}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{WLS}}(N+1)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{WLS}}(N)+\boldsymbol{L}(N+1)[\boldsymbol{y}(N+1)-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{WLS}}(N)] \tag{10-60}$$

$$\boldsymbol{P}(N+1)=\frac{1}{\gamma}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(N+1)\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(N+1)\boldsymbol{P}(N)] \tag{10-61}$$

这些方程应用在 $N\geqslant n$ 的情况下。我们将式中的 N 替换为 k，这些差分方程就构成了加权最小二乘系统辨识的递归解。递归求解过程开始于确定某一 k 值下的 $\boldsymbol{P}(k)$ 与 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$，然后找到 $\boldsymbol{f}(k+1)$：

$$\boldsymbol{f}(k+1)=[y(k)\ \ y(k-1)\ \cdots\ y(k-n)\ \ u(k)\ \cdots\ u(k-n)]^{\mathrm{T}}$$

下一组测量值构成 $y(k+1)$，然后启动对式(10-59)、式(10-60)和式(10-61)的递归求解。式(10-58)中$\boldsymbol{P}(k)$的初始解需要对矩阵求逆。为避开这时的求逆计算，可以通过一些计算机程序对 $\boldsymbol{P}(k)$和$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$的初值进行估计，然后进入多次的迭代过程，直至待估计的参数向量的各分量稳定在各自恒定值的左右为止。多数情况下，递归最小二乘法要比批最小二乘法快一些，但是递归法也有一个短处，就是需要对 $\boldsymbol{\theta}$ 做出初始估计。如果这个初始估值与真值相去甚远，就可能要花费很多次的迭代方能收敛于最终的结果。

回想一下，最小二乘辨识法给出的仅是对数据的“最佳”拟合，而这些数据要依赖于控制对象的模型、测量噪声的等级、采样周期，以及其他一些实际因素，因此，很可能这种“最佳”的拟合结果反而是不准确的，因而没有实际用处。例如，假设有一个给定的物理系统，对其精准建模的结果应该是一个二阶线性模型。如果我们试图将该系统的数据与一个一阶模型做拟合，最小二乘方法会给出一个“最佳”的一阶传递函数，这个一阶传递函数模型的输出在最小二乘的含义下与实际测量数据相匹配。然而，如此得到的系统模型明显与实际物理模型不符。因此，由最小二乘法得到的传递函数往往还需要额外的验证。这种验证主要是比较实际物理系统和估计系统在多组不同输入下的时间响应，以及比较它们的频率响应。

最小二乘法的另一个问题是：如果“数据对”中有一组误差很大，则该误差的平方就会主导总的平方误差和，致使辨识过程提供很高的权重以降低这个大误差，从而导致模型的精准度降低。鉴于此，通常建议以连贯性方法忽略那些与其他数据明显不一致的数据。下面给出一个递归最小二乘法辨识的例子。

例 10.6 使用例 10.3 中的数据来说明普通最小二乘递归辨识法。对数据统一权重，即令式(10-58)到式(10-61)中的 $a=\gamma=1$。假设我们多得到了一个数据对：$y(3)=0.15$，$u(3)=0.40$。用例 10.2 的解来开始本例的递归过程；且 $n=1$，$N=2$。因此，据式(10-58)及例 10.2，有：

$$\boldsymbol{P}(N)=\boldsymbol{P}(2)=[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(2)\boldsymbol{F}(2)]^{-1}=\begin{pmatrix}17.361 & -2.5\\ -2.5 & 1\end{pmatrix}$$

且

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(2)=\begin{pmatrix}0\\ 0.3\end{pmatrix}$$

根据例 10.2 的数据可得：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(3)\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{f}(3)=(0.225\quad 0.5)\begin{pmatrix}17.361 & -2.5\\ -2.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.225\\ 0.5\end{pmatrix}$$

$$=(2.656\quad -0.0625)\begin{pmatrix}0.225\\ 0.5\end{pmatrix}=0.5664$$

以及

$$\boldsymbol{L}(3)=\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{f}(3)\left[1+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(3)\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{f}(3)\right]^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}17.361 & -2.5\\ -2.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.225\\ 0.5\end{pmatrix}[1/0.5664]=\begin{pmatrix}4.690\\ -0.110\end{pmatrix}$$

再据式(10-60)以及4个数据对，得到估计的参数向量为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{WLS}}(3)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{WLS}}(2)+\boldsymbol{L}(3)\left[y(3)-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(3)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{WLS}}(2)\right]$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ 0.3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4.690\\ -0.110\end{pmatrix}\left[0.15-(0.225\quad 0.5)\begin{pmatrix}0\\ 0.3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\ 0.3\end{pmatrix}$$

请注意，由于本例数据是准确的，因此不必对参数向量的辨识结果进行校正。 ◀

10.8 辨识过程中的现实因素

不难理解，不管是时域中的黑箱算法还是频域中利用参数最小二乘估计方法，系统辨识方法的准确性都依赖于一些现实因素。其中最主要的影响因素如下：

1）输入激励 $u(k)$ 的选择；

2）采样频率的选择；

3）对输入信号和输出信号适当的缩放。

下面我们通过与系统的真实物理模型相比较来简要地解释以上三个因素是如何影响辨识模型的准确性的。

1. 输入的选择

正如引文[5]中所解释的那样，黑箱辨识与最小二乘法辨识的质量均在很大程度上依赖于输入信号 $u(k)$。为了确保实际模型的辨识结果是相当不错的，系统必须是由一个足够“丰富”的输入信号所激励，以使该系统所有的基本物理属性均在输出中展现出来。换一种简单的说法，如果我们拿一杯水，并在其中混入一些沙子。然后我们取其中的一小部分，利用它来估计整杯水的含沙量。如果我们没有事先摇匀杯子中的液体(等同于用一个持续的输入来激励系统)，那么所有的沙子都会沉到杯底，我们取到的样本甚至可能根本没有沙子，这就根本不能推断出当时倒入杯中的沙子的量。因此，输入的选择是关系到能否辨识出合理的模型的关键。至少应该保证输入符合以下性质。

1）正如10.4节的假设2所述，输入应该是足够丰富或是持续激励的。换句话说，输入必须占据主导地位，以确保 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{F}(N)$ 为良态矩阵且可逆，从而满足式(10-43)。例如，输入应该避免使用单峰正弦曲线的形式，因为频率为 λ 的正弦信号会使不同的传递函数在一些类似 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda}$ 的点处取值相同，从而无法辨别出到底是哪一个传递函数的输出取值。适合的输入通常有方波、由许多正弦波叠加而成的信号、线性调频信号(即时变频率信号)、脉冲信号，等等。

2）输入必须足够强，以使输出的信噪比(SNR)较高[7]。尤其是想要在频域探究的系统含有较强噪声时，必须输入大信号。但是，当过程是非线性的，却要用线性模型近似时，大输入可能会引发一些问题，因为这样的线性化可能是无效的。就像引文的文献[5]中提到的，通常会有一个“最佳的”输入电平，确定方法可以是反复试验法，还可以是利用非线性滤波器和克莱默-拉奥(Cramer-Rao)界随机参数估计的方法[7]。不过，这些方法已超越了本章的讨论范围。

3）因为大部分的工程系统都运行在闭环条件下，也就是说，工作在一些反馈控制器的控制下，所以激励输入应该具有代表性，能够出现在反馈回路中。换言之，输入应该具有足够的频率分量，以覆盖系统运行的频率范围。

4）有一个很有意思的点需要注意，在许多工程系统中，尤其是在安全至上的系统中，如电力系统、飞机、无人驾驶的运输系统等，使用者在为辨识系统选择激励输入时并没有

完全的自由。例如，若想要辨识整个北美电网的动态模型，但是又要考虑安全因素，所以并不能向电网中任意注入大信号，以免影响系统的正常运转。在这些情况下，使用者通常必须依赖自然干扰输入，例如故障输入，并默认它们对所测输出的影响强到足以能将它们成功地辨识出来，故障时的另一个问题是并不总能精确地用数学函数(如阶跃、方波、脉冲等)的形式为故障输入建模，因此，辨识这种系统时通常通过“只输出”的辨识方法，即完全从输入信息中将待估计的模型参数解耦出来。

2. 采样频率的选择

选择正确的采样频域也同样重要，尤其是在考虑量化误差方面的影响时。如果采样太快，那么输出值之间就太过接近，就使得它们之间的差要比 A/D 转换器(ADC)的一个转换单位还要小。就像文献[5]所讲的，在解最小二乘辨识式(10-43)的过程中用到的输出值的模式主要是由 A/D 转换器的动态特性决定的，此外还有小部分信息是关于系统动力学的。

当提高采样间隔时，连续输出间的差距也逐渐增大，甚至最终量化噪声占据主导。在实际应用中，应该把采样率选得足够大，以使图斯蒂(Tustin)变换(双线性变换)是有效的，但又要充分小，以使量化噪声不占据主导地位。有一条比较切合实际的经验法则，就是以大于系统期望闭环带宽 20～40 倍的频率对系统采样[5]。

3. 信号尺度的选择

恰当地缩放输入信号 $u(k)$和输出信号 $y(k)$是辨识算法中关于数值精度的又一个决定性因素，在最小二乘算法中，这个问题尤为突出。例如，在一些系统中，测到的输出值因单位的问题可能会非常大或非常小。如此或大或小的值会影响式(10-43)中矩阵求逆的适定性和数值稳定性。如果用到的值非常的小，那么，任何一款典型的软件程序都会因消除小数点后面的数字这种近似操作，减弱系统输出所反映的系统行为信息。为了保证输入输出数据所用单位间的兼容性，最好对这些数据进行标准化处理，即将输入 $u(k)$和输出 $y(k)$的实际值乘以或除以相同的归一化常数。例如，可以选择规一化常数使所有的输入输出测量数据均调整到相同的范围内，如区间[−1，1]。

10.9 小结

本章给出了一些关于离散时间系统利用输入输出测量值进行辨识的基本结果。黑箱辨识算法主要应用于时域，待辨识系统状态变量模型的阶数及系数矩阵完全未知的场合。而最小二乘系统辨识方法适用于系统模型的阶数与结构一定程度上已知，但模型参数未知的情形。介绍了批处理和递归两种方式下的最小二乘算法的实现方法。介绍的所有辨识方法都适合于计算机实现，可以作为创立基于数据的预测模型、状态估计和控制的非常有效的工具。

参考文献

[1] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.

[2] S. Soderstorm and P. G. Stoica, *Instrumental Variable Methods for System Identification.* Berlin: Springer, 1983.

[3] P. Van Overschee and B. D. Moore, *Subspace Identification for Linear Systems.* Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[4] T. E. Fortman, "A Matrix Inversion Identity," *IEEE Trans. Autom. Control,* AC-15, p. 599, 1970.

[5] J. Hespanha, *Lectures Notes on Topics of Undergraduate Control Systems Design,* University of California Santa Barbara, 2012.

[6] S. J. Qin, "An Overview of Subspace Identification," *Computers and Chemical Engineering,* 30, pp. 1502–1513, 2006.

[7] H. Vincent Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation.* New York: Springer, 1994.

[8] R. Brincker, L. Zhang, and P. Andersen, "Modal Identification of Output-only Systems Using Frequency Domain Decomposition," *Smart Materials and Structures,* 10, pp. 4441–4445, 2001.

习题

10.2-1　设平方律电路实现如下的输入输出关系：

$$y = kx^2$$

式中：x 是该电路输入电压；y 是该电路的输出电压。

(1) 仿照 10.2 节的方法，写出计算 k 值所需的最小二乘运算过程。

(2) 对该电路进行实验得到表 P10.2-1 所示数据对，利用这些数据求出 k 值的最小二乘解。

表　P10.2-1

k	x	Y
1	0	0.01
2	1.0	1.01
3	2.0	3.98

(3) 为说明错数据的影响，假设还有另一组数据：$x=1.5$，$y=3.30$。根据(2)问的结果，我们知道 $x=1.5$ 时，y 近似等于 2.25。假设(2)问的结果是对的，这另加入的数据就是错的。用这 4 组数据计算 $\hat{k}$，并与(2)问的结果进行对比，给出百分比误差。

10.2-2　式(10-5)给出了曲线拟合的最小二乘估计。该式是通过求解使代价函数的斜率为 0 的点而推导出来的。函数的最大值也出现在函数斜率为 0 的点上。证明式(10-5)为代价函数的最小值解而非最大值解。

10.2-3　设正弦函数 $y(k)=\sin(10k)$，$k=0$，1，…，9。求符合这个方程的次数最小的多项式，使最大的最小平方误差的数量级为10^{-3}。

10.2-4　在式(10-7)中，证明：如果 $N<n$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 的解不唯一。针对习题 10.2-3 中的例子，如果多项式的阶数 n 等于样本数 N，且 $N=10$，计算误差的界。

10.4-1　利用习题 10.5-1 中的数据，借助 10.4 节的算法，推导系统的状态变量模型。

10.4-2　在例 10.2 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 $\boldsymbol{A}(2,1)=-0.6$。

(1) 将 $\boldsymbol{A}(2,1)$的值改为 $\boldsymbol{A}(2,1)=-0.9$，并设 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 不变，那么，你会观察到怎样的脉冲响应变化？为什么？

(2) 在例 10.2 中，用到 50 个数据样本来估计系统矩阵，使估计的脉冲响应与测到的输出完全吻合。用 $\boldsymbol{A}(2,1)=-0.9$ 重复辨识过程，并验证：在达到相同匹配精度的前提下，是否应该减少或增加样本数。

10.4-3　在激励输入为单位阶跃信号的条件下，导出 10.4 节描述的单输入单输出系统(SISO)的黑箱辨识算法。

10.4-4　设 SISO 的连续时间模型为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{Cx}(k)$$

式中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=(0\quad 1)$$

假设 $u(k)$为脉冲输入。分别以 $T=10$s，1s，0.1s 对系统采样，使用 10.4 节中的黑箱辨识方法得到系统的脉冲响应，对不同采样率下的脉冲响应 $y(k)$，$k=0$，1，2，…，50 进行对比，分析它们的准确性。

10.4-5　考虑表 P10.4-5(1)～表 P10.4-5(3)所示三个数据对，它们是在例 10.2 数据的基础上，混入了不同等级的高斯噪声。用三个不同的信噪比(SNR)来生成含噪声的输出，分别为 1dB，10dB，50dB。不难发现增大 SNR 时，输出值也越来越接近例 10.2 的真实值。设输入为单位脉冲，对每种采样情况重复辨识过程，并比较辨识传递函数的极点与实际极点的差别。同时，画出估计极点与实际极点在不同 SNR 等级下的百分比误差。

(1) SNR=1dB

表　P10.4-5(1)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(k)$	0.979	0.7483	0.3272	−1.8435	−0.2816	−0.7421	−1.4067	−0.4538	0.2511

(2) SNR＝10dB

表　P10.4-5(2)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(k)$	0.0106	0.5743	0.0585	0.0959	−0.0608	−0.0009	−0.084	−0.5524	0.0905

(3) SNR＝50dB

表　P10.4-5(3)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(k)$	−0.0026	0.9929	−0.3017	−0.0165	0.0275	−0.0051	0.0005	0.001	−0.0003

10.5-1　(1) 某一阶系统的输入输出测量值如表 P10.5-1 所示。

表　P10.5-1

k	输入	输出
1	10	0
2	10	12.2
3	10	20.1

利用所有数据，通过批最小二乘法得到系统的传递函数。

(2) 再增加一个 $k=3$ 的数据对，其输入为 0，输出为 31.8。利用(1)问的结果进行递归最小二乘辨识，并利用增加的数据对计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$。

10.5-2　一个三阶离散系统，其数据对$[u(k),\ y(k)]$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 5$ 都是可用的，其中，$u(k)$为输入，$y(k)$为输出。利用所有数据试写出式(10-43)中$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{y}(N)$的完整表达式。

10.5-3　推导式(10-47)加权最小二乘估计算法。

10.5-4　利用加权最小二乘方法推导例 10.3 与例 10.4 中 LTI 模型的传递函数。调节权重并检测是否可以用比两个例题中更少的测量值辨识出传递函数。辨识传递函数的参数与实际值之间的允许误差为10^{-3}。

10.6-1　设式(10-30)中的b_1，b_2，…，b_m对于给定的正整数 m 来说均为已知常数。利用 10.6 节中提出的方法重新推导式(10-43)，仅计算式(10-30)中的未知参数的最小二乘估计值。

10.6-2　使用例 10.2 的数据集。设系统有三个极点、两个零点。其中一个极点为 $z=0.1$，一个零点为 $z=0.100\,02$。辨识系统的传递函数。在对另两个极点的估值与例 10.2 给出的两个极点之间进行对比。

10.6-3　表 P10.6-3 所示数据来自离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应。

表　P10.6-3

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(k)$	0	4	−8	16	−24	36	−48	64	−80

已知该系统的传递函数有三个极点、两个零点。所有的极点都为 $z=1$。设采样时间 $T=0.1\mathrm{s}$，利用上述先验知识推导传递函数的最小二乘估计。

10.7-1　利用式(10-47)，式(10-52)，式(10-56)，式(10-57)，推导递归最小二乘估计的方程，即式(10-59)～式(10-61)。

10.7-2　利用例 10.2 中的脉冲响应数据 $y(k)$，通过递归最小二乘估计法辨识 LTI 模型的传递函数。验证该传递函数的极点与例 10.2 中辨识出的系统矩阵的特征值相匹配。

10.7-3　使用 MATLAB 语言的 awgn()函数重做例 10.4 的最小二乘估计，此时的输出被 10.0dB 的 SNR

的高斯白噪声污染。并将估计结果与 1.0dB 的 SNR 下的估计结果进行对比。

10.8-1　用习题 10.6-3 的数据 $y(k)$，$k=0$，2，4，6，8，并设采样时间 $T=0.2\text{s}$，重做传递函数的最小二乘估计。接下来，改用 $k=0$，4，8 的数据及 $T=0.4\text{s}$，再做一次传递函数的最小二乘估计。将这两次的估计结果与习题 10.6-3 的结果进行对比。

10.8-2　对如下传递函数：

$$G(z)=\frac{z}{z^2+0.3z+0.1}$$

分别用如下输入激励之，将各自的响应的输出收集于向量 $\boldsymbol{y}(k)$，$k=0$，1，…，20 中。所用的采样时间 $T=0.1\text{s}$。

(1) $u(k)=\sin(10k)$；

(2) $u(k)=100\sin(10k)$；

(3) $u(k)=\sin(10k)+\sin(20k)$；

(4) $u(k)=\sin(k)+\sin(10k)+\sin(100k)$；

(5) $u(k)$为从 $k=0$ 到 $k=2$ 的单位方波；

(6) $u(k)$为从 $k=0$ 到 $k=10$ 的单位方波；

(7) $u(k)$为单位阶跃函数。

利用 $\boldsymbol{y}(k)$与 $\boldsymbol{u}(k)$，$k=0$，1，…，20，通过最小二乘法推导系统的传递函数，并将各推导结果与实际传递函数 $G(z)$做对比。

第11章 线性二次最优控制

11.1 引言

在第8章中我们介绍了一些控制系统的设计方法，如伯德图法、奈奎斯特图法等，称为经典法或传统法。这两种方法是基于频域响应的方法和根轨迹的方法，用起来非常有效，但需要反复试验，需要有设计经验。甚至当所得系统的各项指标已达到设计要求(可以接受)时，仍然不能确定继续试验是否会得到更好的设计结果。第9章的极点配置设计方法属于现代方法，该方法基于控制对象的状态变量模型而不是传统方法所依赖的传递函数，它假设我们已知闭环传递函数极点所需的确切位置，然后，至少以线性模型的形式实现这些配置。当然，对于实际物理系统来说，极点可以被配置到的位置是有限制的。

在极点配置的设计中，首先假设那个达到“最佳”控制的系统所对应的极点位置是已知的。本章将提出另一种得到这种“最佳”控制系统的方法，即一种优化设计方法。该方法假设我们可以给出一种称为代价函数的数学表达式。所谓优化设计就是使这个代价函数达到最小，由此而“最优”。不过，在大多数情况下，代价函数的选择也涉及反复试验的过程，就是说，我们并不能确定代价函数所应具有的确切形式。

对于离散系统来说，代价函数(也叫作性能指标)通常表述为如下形式：

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} L[\boldsymbol{y}(k), \boldsymbol{r}(k), \boldsymbol{u}(k)] \tag{11-1}$$

式中：k 为采样时刻；N 为最终的采样时刻；$\boldsymbol{y}(k)$为系统输出；$\boldsymbol{r}(k)$为参考输入；$\boldsymbol{u}(k)$为控制对象的输入。

对于一个实际的物理系统，控制输入总是受限的。例如，控制向量分量的大小受限于：

$$|u_i(k)| \leqslant U_i$$

式中：U_i 为给定常量；下标 i 表示第 i 个输入(分量)。

如果控制能量有限，控制向量分量还会受限于：

$$u_i^2(k) \leqslant M_i$$

式中：M_i 亦为给定常量。

一种反映控制能量有限的代价函数(式(11-1))可表述为：

$$\sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

式中：$\boldsymbol{R}(k)$为权重矩阵，且与 $\boldsymbol{r}(k)$无关。

这个方程称为二次型方程，下面的章节中将对其进行详细分析。在任何情况下，控制都必须满足一定的约束条件；任意满足约束条件的控制均称为容许控制。

本章主要介绍利用二次代价函数设计最优线性调节器控制系统的方法，该方法下得到的控制关系具有如下形式：

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{11-2}$$

由此得到一个线性的、时变的全维反馈系统，它与第9章中提到的全维反馈的局限是相同的。通常需要利用观测器来实现之。观测器的设计可以参考第9章中介绍的方法。

本章需要一定的矩阵论的数学基础。在附录IV中可以找到与本书内容相关的矩阵的

数学定义及其运算的简要介绍。

11.2　二次代价函数

下面我们从了解系统状态及控制信号的二次代价函数入手，来介绍最优控制设计的方法。这个关于系统状态及控制信号的二次代价函数为：

$$J_N=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{11-3}$$

式中：N 是有限的；$\boldsymbol{Q}(k)$和 $\boldsymbol{R}(k)$是对称的。

且线性控制对象的状态变量方程为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)\end{aligned} \tag{11-4}$$

请注意，控制对象与代价函数矩阵可以是时变的。回想一下，之前提到的设计方法则要求控制对象为 LTI 的。

考虑使用二次代价函数的原因是基于此所展开的推导既简单且合乎逻辑。例如，一个二阶单输出系统具有如下关系：

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)=[c_1\quad c_2]\boldsymbol{x}(k)$$

假设希望该系统的输出逐渐趋于 0，于是选择代价函数包含 $y^2(k)$项，即

$$y^2(k)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k)$$

式中：$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 是方阵。

如此很自然地就得到了关于给定系统的二次函数。

考虑如下的二次函数：

$$F=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}q_{11}&q_{12}\\q_{21}&q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=q_{11}x_1^2+(q_{12}+q_{21})x_1x_2+q_{22}x_2^2 \tag{11-5}$$

首先需要注意 F 为标量，不失一般性，设 $\boldsymbol{Q}$ 是对称矩阵。如果式(11-5)的二次形如我们所需，是半正定的[1]，则有：

$$\begin{aligned}F\geqslant 0,&\quad \boldsymbol{x}\neq 0\\ F=0,&\quad \boldsymbol{x}=0\end{aligned}$$

那么，一般来讲，最小化 F 就是在某种程度上最小化生成 F 的相应的状态值。例如，如果

$$F=x_1^2+x_2^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

则最小化 F 也就是最小化 x_1 和 x_2 的值。但是，如果

$$F=100x_1^2+x_2^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}100&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

那最小化 F 也就是最小化 $|x_1|$ 和 $|x_2|$ 的值，但是 $|x_1|$ 应该比 $|x_2|$ 小很多。还有第三种情况，就是如果

$$F=x_1^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

即 F 不是 x_2 的函数，则最小化 F 仅仅就是最小化 x_1，x_2 则取决于它与 x_1 的关系。

现在考虑控制输入 $u(k)$的作用。假设：

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}=(u_1\quad u_2)\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}\\r_{21}&r_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=r_{11}u_1^2+(r_{12}+r_{21})u_1u_2+r_{22}u_2^2 \tag{11-6}$$

仍然用到不失一般性假设，即设二次型矩阵是对称的。如果式(11-6)的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 如我们所需，是正定的[1]，则

$$G > 0,\quad u \neq 0$$
$$G = 0,\quad u = 0$$

那么，如果我们最小化矩阵 $\boldsymbol{G}$，也就是在最小化控制方程。如果允许 $\boldsymbol{G}$ 是正半定的，则当最小化 $\boldsymbol{G}$ 时，控制向量的一些分量就可能会很大。

下面介绍一种测试正定性的数学方法。一个方阵是正定的，当且仅当它的所有特征值都是正实数。如果除其中几个为零外，剩余特征值均为正实数，那么这个矩阵就是半正定的[1]。

我们来考察式(11-3)给出的代价函数：

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

如果 $\boldsymbol{Q}(k)$是正半定的，$\boldsymbol{R}(k)$为零矩阵，那么，最小化式(11-3)就会使得 $\boldsymbol{x}(k)$向量快速地趋于 0，这一般需要使用大的 $\boldsymbol{u}(k)$。对于一个实际的物理系统来说，$\boldsymbol{u}(k)$总是有界的，要求提供过大的 $\boldsymbol{u}(k)$一般来讲并不现实。因此，需要把正定矩阵 $\boldsymbol{R}(k)$加到代价函数中以限制 $\boldsymbol{u}(k)$，保证它的可实现性。然后，再把包含 $\boldsymbol{x}(k)$的项也加入到代价函数式(11-3)中，这样，从某种意义上讲，状态向量的值就可逐渐趋近于 0。代价函数中包含 $\boldsymbol{u}(k)$项的目的则是限制控制向量的大小，保证设计的可实现性。

11.3　最优准则

下面总结一下 11.2 节中提出的最优控制的设计问题。

对于如下的线性离散控制对象(式(11-4))：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)$$

决定控制关系式为：

$$\boldsymbol{u}^{o}(k) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k)] \tag{11-7}$$

的工作，通过最小化如下二次代价函数[式(11-3)]获得：

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

式中：N 是有限的；$\boldsymbol{Q}(k)$是正半定的；$\boldsymbol{R}(k)$是正定的。

式(11-7)中的上标 o 表示所实施的控制是最优的。

得到式(11-7)所示解的途径有多种，这里仅介绍由理查德·贝尔曼(Richard Bellman)[2][3]提出的基于最优准则的方法。最优准则如下。

如果一个闭环控制 $\boldsymbol{u}^{o}(k)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k)]$在区间 $0\leqslant k\leqslant N$ 上是最优的，那么它在 $m\leqslant k\leqslant N$ 的任意区间上也是最优的，其中，$0\leqslant m\leqslant N$。

这一最优准则的应用可以是这样的：定义标量 F_k 为：

$$F_k = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{11-8}$$

然后将式(11-3)表示为：

$$J_N = F_0 + F_1 + \cdots + F_{N-1} + F_N$$

令 S_m 为从 $k=m$ 到 $k=N$ 的代价，即

$$S_m = J_N - J_{N-m} = F_{N-m+1} + F_{N-m+2} + \cdots + F_{N-1} + F_N \tag{11-9}$$

图 11-1 所示的是对这些代价项的图解说明。

请注意，k 的范围是从 0 到 N，而 m 的范围是从 1 到 $N+1$。最优准则讲到，如果J_N为最优的目标值，则 S_m，$m=1$，2，…，$(N+1)$也是。于是，我们就可以在将优化准则首先用在最小化 $S_1=F_N$上，然后选择 F_{N-1}，最小化下式：

$$S_2 = F_{N-1} + F_N = S_1^o + F_{N-1}$$

再选择 F_{N-2}，最小化下式：

$$S_3 = F_{N-2} + F_{N-1} + F_N = S_2^o + F_{N-2}$$

顺延下去，直到完成对 $S_{N+1}=F_N$ 的最小化为止。上述这一设计过程又称为动态规划。

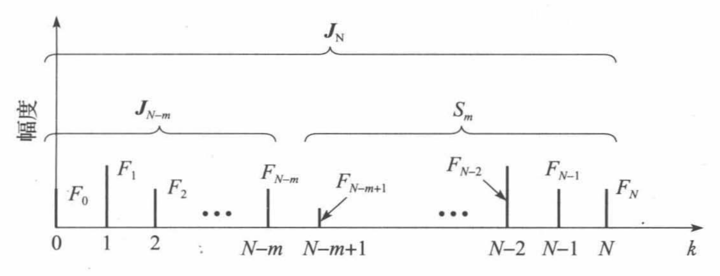


图 11-1 代价函数中的项

下面给出一个简单的例子来解释如何利用最优准则来进行最优控制设计。此后 11.4 节还会介绍总体的设计过程。考虑如下一阶控制系统：

$$x(k+1)=2x(k)+u(k) \tag{11-10}$$

注意到这个系统是不稳定的。我们希望最小化下式来确定控制律：

$$J_2=\sum_{k=0}^{2}(x^2(k)+u^2(k))=\sum_{k=0}^{2}F_k$$

也就是希望在式(11-10)的约束下，通过选择 $u(k)$ 来最小化下式：

$$J_2=F_0+F_1+F_2=x^2(0)+u^2(0)+x^2(1)+u^2(1)+x^2(2)+u^2(2) \tag{11-11}$$

首先，需要注意 $u(2)$ 不对式(11-11)中的其他任何项产生影响，因此必须令其为 0，即 $u(2)=0$。在后面的讨论中这一条会重复出现。

首先，根据式(11-9)，有：

$$S_1=J_N-J_{N-1}=J_2-J_1=F_2=x^2(2)+u^2(2)$$

根据优化准则，$u(2)$ 必须使上式最小化，因此，

$$\frac{\partial S_1}{\partial u(2)}=2u(2)=0$$

其中，应注意到 $x(2)$ 与 $u(2)$ 无关。所以 $u(2)=0$，且

$$S_1^o=x^2(2) \tag{11-12}$$

下面，我们计算 S_2：

$$S_2=S_1^o+F_1=S_1^o+x^2(1)+u^2(1)$$

根据式(11-10)和式(11-12)，可将 S_2 表述为：

$$S_2=[2x(1)+u(1)]^2+x^2(1)+u^2(1)$$

利用优化准则，有：

$$\frac{\partial S_2}{\partial u(1)}=2[2x(1)+u(1)]+2u(1)=0$$

其中，应注意到 $x(1)$ 与 $u(1)$ 无关，因此得：

$$u(1)=-x(1)$$

且

$$S_2^o=3x^2(1)$$

类似地，有：

$$S_3=J_2=S_2^o+F_2=S_2^o+x^2(0)+u^2(0)$$

因此

$$S_3=3x^2(1)+x^2(0)+u^2(0)=3[2x(0)+u(0)]^2+x^2(0)+u^2(0)$$

且

$$\frac{\partial S_3}{\partial u(0)}=6[2x(0)+u(0)]+2u(0)=0$$

因此

$$u(0) = -1.5x(0)$$

由此，得到如下的最优控制序列：

$$\begin{aligned} u(0) &= -1.5x(0) \\ u(1) &= -x(1) \\ u(2) &= 0 \end{aligned} \tag{11-13}$$

此时，最小代价函数为：

$$S_3^o = J_2^o = 3[0.5x(0)]^2 + x^2(0) + [-1.5x(0)]^2 = 4x^2(0)$$

至此，再没有$\{u(0),\ u(1),\ u(2)\}$的其他组合能比式(11-13)产生的J_2值更小了。

下面就上例做一些总结。

首先，在对控制律的形式未做任何假设的情况下，得到的最优控制律是线性的，呈如下形式：

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

其次，即使控制对象是时不变的，所需的反馈增益$K(k)$也是时变的。在接下来的章节，将推导出解决这种最优控制问题的一种通用方案，上述给出的几点结论同样适用于这种通用情况。

还需指出，上述的最优控制设计是沿时间逆向进行的，就是说，只有获知了所有的$K(j)$，$i<j\leqslant N$，方能算出最优增益$K(i)$。

11.4 线性二次最优控制设计

现在来解决11.3节提出的线性二次(LQ)最优设计问题。

对于一个由如下状态变量方程描述的线性离散控制对象：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) \end{aligned}$$

确定其控制关系，

$$\boldsymbol{u}^o(k) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k)]$$

上述控制关系是在最小化如下二次代价函数的基础上获得的：

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

式中：N是有限的；$\boldsymbol{Q}(k)$是正半定的；$\boldsymbol{R}(k)$是正定的。

首先，简短回顾一下二次函数的微分(见附录IV)。对于给定的二次函数$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$，有

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}] = 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{11-14}$$

同样，对于给定的双线性形式$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，有：

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \tag{11-15}$$

及

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{11-16}$$

对于式(11-14)，我们假设$\boldsymbol{Q}$是对称的。但式(11-15)和式(11-16)中的$\boldsymbol{Q}$则不一定是对称的。另外注意到$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$是标量，于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

定义式(11-9)中的S_m是从采样瞬间$(N-m)$到最终的采样瞬间N所对应的代价，即

$$S_m = J_N - J_{N-m}$$

由图11-1可以看出，S_{m+1}可以表示为：

$$S_{m+1} = S_m + F_{N-m}$$

据式(11-8)，可写出：

$$S_{m+1}=S_m+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N-m)\boldsymbol{Q}(N-m)\boldsymbol{x}(N-m)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(N-m)\boldsymbol{R}(N-m)\boldsymbol{u}(N-m) \tag{11-17}$$

如果将式(11-17)中的 S_m 替换成 S_m^o，则据优化准则，有：

$$\frac{\partial S_{m+1}}{\partial \boldsymbol{u}(N-m)}=\boldsymbol{0} \tag{11-18}$$

首先考虑 S_1：

$$S_1=F_N=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{Q}(N)\boldsymbol{x}(N)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{R}(N)\boldsymbol{u}(N) \tag{11-19}$$

因为 $\boldsymbol{x}(N)$与 $\boldsymbol{u}(N)$无关，所以 $\boldsymbol{u}^o(N)=0$，且

$$S_1^o=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{Q}(N)\boldsymbol{x}(N) \tag{11-20}$$

不难发现，S_1^o 是 $\boldsymbol{x}(N)$的二次项。对于 S_2，再据式(11-17)，可得到如下表达式：

$$S_2=S_1^o+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N-1)\boldsymbol{Q}(N-1)\boldsymbol{x}(N-1)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(N-1)\boldsymbol{R}(N-1)\boldsymbol{u}(N-1) \tag{11-21}$$

其中，根据式(11-4)和式(11-20)，有：

$$S_1^o=[\boldsymbol{Ax}(N-1)+\boldsymbol{Bu}(N-1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(N)[\boldsymbol{Ax}(N-1)+\boldsymbol{Bu}(N-1)]\big|_{\boldsymbol{u}^o(N-1)} \tag{11-22}$$

将式(11-21)代入式(11-22)，对 $\boldsymbol{u}(N-1)$，求解下式：

$$\frac{\partial S_2}{\partial \boldsymbol{u}(N-1)}=0$$

获得如下形式的解：

$$\boldsymbol{u}^o(N-1)=-\boldsymbol{K}(N-1)\boldsymbol{x}(N-1) \tag{11-23}$$

该结果的推导比较简单，请读者通过习题 11.4-1 完成。至此，我们尚不能解出 $\boldsymbol{K}(N-1)$。但是，当把式(11-23)代入式(11-21)之后，可以看出，代入结果是 $x(N-1)$的二次型。因此，可以写出：

$$S_2^o=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N-1)\boldsymbol{P}(N-1)\boldsymbol{x}(N-1) \tag{11-24}$$

式中：$\boldsymbol{P}(N-1)$是对称的。

继续上一段中的方法求解 S_3，发现 S_3^o 也是二次型。因此，可以写出：

$$S_3^o=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N-2)\boldsymbol{P}(N-2)\boldsymbol{x}(N-2) \tag{11-25}$$

依次，可推断出 S_m^o 的通用关系式为：

$$S_m^o=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N-m+1)\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{x}(N-m+1) \tag{11-26}$$

根据式(11-4)，可将 S_m^o 表示为：

$$S_m^o=[\boldsymbol{Ax}(N-m)+\boldsymbol{Bu}(N-m)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{Ax}(N-m)+\boldsymbol{Bu}(N-m)] \tag{11-27}$$

接下来，将式(11-27)代入式(11-17)，得到 S_{m+1}。然后求 S_{m+1}对 $\boldsymbol{u}(N-m)$的微分，并令其为 0，借此解出 $\boldsymbol{u}^o(N-m)$。这其中的代数运算过程过于烦琐，为了简化，我们先放弃对符号$(N-m)$的依赖，待得到最终解后再在其中恢复之。根据式(11-27)和式(11-17)，得：

$$S_{m+1}=[\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}]+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ru} \tag{11-28}$$

再根据式(11-14)、式(11-15)和式(11-16)，得：

$$\frac{\partial S_{m+1}}{\partial \boldsymbol{u}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}]+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}]+2\boldsymbol{Ru}=0$$

即

$$2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{Ax}+2[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]\boldsymbol{u}=0$$

得期望解为：

$$\boldsymbol{u}^o=-[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{Ax} \tag{11-29}$$

根据式(11-23)和式(11-29)，得最优增益矩阵为：

$$\boldsymbol{K}(N-m)=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(N-m)\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{B}(N-m)+\boldsymbol{R}(N-m)]^{-1}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(N-m)\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{A}(N-m) \tag{11-30}$$

及

$$\boldsymbol{u}^{o}(N-m)=-\boldsymbol{K}(N-m)\boldsymbol{x}(N-m) \tag{11-31}$$

接下来，推导 S_{m+1}^{o} 的表达式。根据式(11-31)，可知式(11-28)中的

$$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}]\boldsymbol{x}$$

且

$$S_{m+1}^{o}=\{[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}]\boldsymbol{x}\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}]\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qx}+[\boldsymbol{Kx}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RKx}$$

即

$$S_{m+1}^{o}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\{[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}]+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RK}\}\boldsymbol{x}$$

而据式(11-26)，有：

$$S_{m+1}^{o}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m)\boldsymbol{x}$$

因此得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(N-m)=&[\boldsymbol{A}(N-m)-\boldsymbol{B}(N-m)\boldsymbol{K}(N-m)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\\&\times[\boldsymbol{A}(N-m)-\boldsymbol{B}(N-m)\boldsymbol{K}(N-m)]\\&+\boldsymbol{Q}(N-m)+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(N-m)\boldsymbol{R}(N-m)\boldsymbol{K}(N-m)\end{aligned} \tag{11-32}$$

下面总结一下最终得到的设计方案。设计过程从 $k=N$ 时刻向后。首先，根据式(11-20)和式(11-26)，得到 $\boldsymbol{P}$ 矩阵的终值为：

$$\boldsymbol{P}(N)=\boldsymbol{Q}(N) \tag{11-33}$$

对于时不变系统及代价函数，根据式(11-30)，可得最优增益矩阵表达式为：

$$\boldsymbol{K}(N-m)=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{A} \tag{11-34}$$

由此可解出 $\boldsymbol{K}(N-1)$，根据式(11-32)，有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(N-m)=&[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}(N-m)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}(N-m)]\\&+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(N-m)\boldsymbol{RK}(N-m)\end{aligned} \tag{11-35}$$

上述方程也可以采用其他的表达形式(见习题 11.4-2)。其中比较简单的一种形式是：

$$\boldsymbol{P}(N-m)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}(N-m)]+\boldsymbol{Q} \tag{11-36}$$

由此看出，$\boldsymbol{P}(N-1)$既可以利用式(11-35)解出，也可以利用式(11-36)解出。还可看出，式(11-34)和式(11-35)或式(11-34)和式(11-36)构成了一组非线性差分方程，利用这组差分方程可以迭代地解出 $\boldsymbol{K}(N-m)$和 $\boldsymbol{P}(N-m)$。综上，式(11-33)、式(11-34)和式(11-36)构成了所需的设计方程。

我们也可以把设计方程改写成 k 的函数。令式(11-31)、式(11-34)及式(11-36)中的 $k=N-m$，则对于 $k=0, 1, 2, \cdots, N-1$，设计方程变为：

$$\boldsymbol{u}^{o}(k)=-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{11-37}$$

$$\boldsymbol{K}(k)=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A} \tag{11-38}$$

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}(k)]+\boldsymbol{Q} \tag{11-39}$$

式中：$\boldsymbol{P}(N)=\boldsymbol{Q}$；$\boldsymbol{K}(N)=0$。

因为 $F_0=J_0$，根据式(11-9)，不难得到J_N的表达式为：

$$\begin{aligned}J_N=S_N+J_0=&S_N+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{Q}(0)\boldsymbol{x}(0)\\&+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{R}(0)\boldsymbol{u}(0)\end{aligned}$$

而根据图 11-1，可知该表达式就是 S_{N+1}。于是，据式(11-26)，得到最小代价为：

$$J_N^{o}=S_{N+1}^{o}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{x}(0) \tag{11-40}$$

对于时变的系统和(或)代价函数，则应该对式(11-38)和式(11-39)作如下替换：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&\rightarrow\boldsymbol{A}(k)\\\boldsymbol{B}&\rightarrow\boldsymbol{B}(k)\\\boldsymbol{Q}&\rightarrow\boldsymbol{Q}(k)\\\boldsymbol{R}&\rightarrow\boldsymbol{R}(k)\end{aligned} \tag{11-41}$$

下面给出两个例子来说明上述的设计过程。

例 11.1 希望对如下系统设计出最优的控制律：

$$x(k+1)=2x(k)+u(k)$$

其代价函数为：

$$J_2=\sum_{k=0}^{2}x^2(k)+u^2(k)$$

注意这与 11.3 节的设计问题相同。所需参数为：

$$\boldsymbol{A}=2,\quad \boldsymbol{Q}=1$$
$$\boldsymbol{B}=1,\quad \boldsymbol{R}=1$$

根据式(11-33)，得：

$$\boldsymbol{P}(2)=\boldsymbol{Q}(2)=\boldsymbol{Q}=1$$

根据式(11-38)，得到所需增益为：

$$\boldsymbol{K}(2-1)=\boldsymbol{K}(1)=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{A}=[1+1]-1\times(1\times1\times2)=1$$

根据式(11-39)，得：

$$\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)\{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(1)\}+\boldsymbol{Q}=2\times1\times\{2-(1\times1)\}+1=3$$

再根据式(11-38)，得：

$$\boldsymbol{K}(0)=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{A}=[3+1]^{-1}(1\times3\times2)=1.5$$

根据式(11-39)，得：

$$\boldsymbol{P}(0)=2\times3\times\{2-1.5\}+1=4$$

因此最优的增益序列为：

$$\{\boldsymbol{K}(0),\boldsymbol{K}(1)\}=\{1.5,1\}$$

根据式(11-40)，算出最小代价为：

$$J_2^{o}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{x}(0)=4\boldsymbol{x}^2(0)$$

本例结果验证了 11.3 节的结论。 ◀

例 11.2 第二个例子选用第 9 章极点配置设计案例中的伺服电动机系统。

系统如图 11-2 所示，状态模型如下(参见例 9.1)：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\0 & 0.905\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.00484\\0.0952\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

式中：$x_1(t)$表示轴转角；$x_2(t)$表示轴角转速。

代价函数选为：

$$J_2=\sum_{k=0}^{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k)+R\boldsymbol{u}^2(k)$$

式中：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\quad R=1$$

可见，该代价函数中忽略了速度。就是说，我们试图最小化位置 $x_1(k)$的大小而不考虑速度 $x_2(k)$。代价函数中的控制权重 R 任选。令 N 等于 2，以手算的方式进入如下求解过程。首先，根据式(11-33)，有：

$$\boldsymbol{P}(2)=\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

图 11-2 伺服电动机系统

$k=1$ 时，式(11-38)的

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{B}+R=(0.00484\quad 0.0952)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.00484\\0.0952\end{pmatrix}+1$$

$$=(0.00484\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}0.00484\\0.0952\end{pmatrix}+1=1.0000234$$

将其代入式(11-38)，得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(1)&=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{B}+R]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{A}\\&=\frac{1}{1.0000234}(0.00484\quad 0.0952)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\0 & 0.905\end{pmatrix}\\&=(0.00484\quad 0.000461)\end{aligned}$$

为了利用式(11-39)算出 $\boldsymbol{P}(1)$，需要先计算：

$$\boldsymbol{BK}(1)=\begin{pmatrix}0.00484\\0.0952\end{pmatrix}\cdot(0.00484\quad 0.000461)=\begin{pmatrix}2.34\times10^{-5} & 2.23\times10^{-6}\\4.61\times10^{-4} & 4.39\times10^{-5}\end{pmatrix}$$

则

$$[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}(1)]=\begin{pmatrix}1.00 & 0.0952\\-4.61\times10^{-4} & 0.905\end{pmatrix}$$

且

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}(1)]=\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\0.0952 & 0.00906\end{pmatrix}$$

最后，将上述结果代入式(11-39)，得：

$$\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(2)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}(1)]+\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2.0 & 0.0952\\0.0952 & 0.00906\end{pmatrix}$$

上述计算过程对求解一个单输入下二阶系统差分方程式(11-38)和式(11-39)所需的每一步给予了详细说明。很明显，这需要计算机参与求解。再解一遍上述差分方程，得到如下结果：

$$\boldsymbol{K}(0)=(0.0187\quad 0.00298)$$

且

$$\boldsymbol{P}(0)=\begin{pmatrix}3.0 & 0.276\\0.276 & 0.0419\end{pmatrix}$$

该例的 MATLAB 程序如下：

```
format ShortEng
A = [1 0.0952;0 0.905]; B = [0.00484; 0.0952];
Q = [1 0;0 0]; R = 1; N = 2; P = Q;
disp('     k       Gains')
for n=1:N
KK = inv(B'*P*B+R)*B'*P*A;
  P1 =A'*P*(A - B*KK)+Q;
  P=P1;
  k = N - n+1;
  [k, KK]
end
disp('The final value of the P matrix is:'), P
```
◀

例 11.3 下面给出一个更贴近实际的利用计算机求解问题的设计例子；即通过计算机对式(11-38)和式(11-39)进行递归计算。为了与例 9.1 的结果进行对比，依然使用例 9.1 中的案例，该例中，控制对象的描述方程为[见图 11-2]：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\0 & 0.905\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.00484\\0.0952\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

其闭环特征方程的零点的时间常数为 1.0s。一般情况下，我们考虑 5 倍于时间常数（本例为 5s）的时间响应。因此将代价函数式(11-3)中的 N 选为 51，并展开前 5s 时间响应的对比。式(11-3)中的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 与例 11.2 的相同，即

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad R=1$$

该设计的最优增益如图 11-3 所示，图中还绘出了 $\boldsymbol{Q}$ 不变、R 分别取值为 0.1 和 0.03 时的最优增益。可以看出，随着 R 值的减小，控制信号对代价函数的控制力也在降低。因此，为了降低状态的大小，必须增加控制力。其效果如图 11-3 所示。

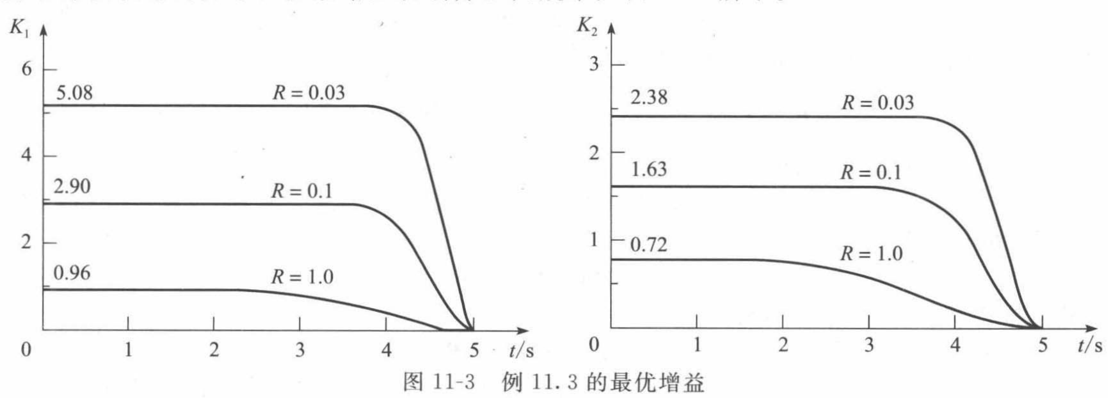


图 11-3　例 11.3 的最优增益

图 11-4 中绘出了 $R=1.0$ 和 $R=0.03$ 时，具有如下初值条件的系统响应：

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

由此可以看出，R 值对闭环系统瞬态响应的影响。另外，通过对比图 11-3 和图 11-4 可以发现，在 $R=0.03$ 情况下，其响应在增益开始降低之前就已经变为 0 了，而这一点在 $R=1.0$ 的情况下却不成立。

例 9.1 中的初始条件响应可参见图 9-2。不难发现，$R=0.03$ 时，最优系统响应的稳定时间要短一些，而 $R=1.0$ 时则要长一些。◀

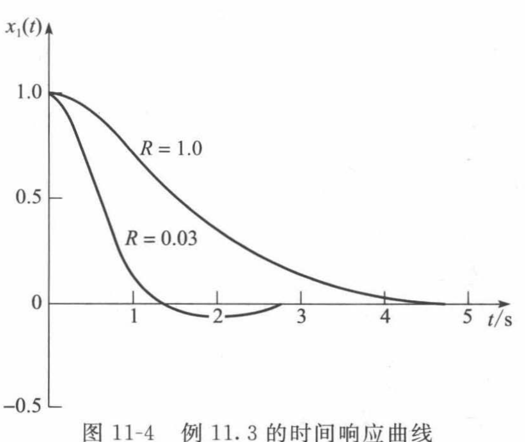


图 11-4　例 11.3 的时间响应曲线

11.5　最小值原理

通过前面的推导，我们得到了最优控制设计方程式(11-38)和式(11-39)，其间用到了贝尔曼原则。利用最小值原理也可以将它们推导出来[4]。本节就介绍这个最小值原理。这一原理将在后续的稳态最优控制中起到重要作用。

我们先对 11.2 节提出的最优控制问题作如下陈述。

对于由如下方程描述的线性离散控制对象：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)$$

控制律

$$\boldsymbol{u}^{o}(k)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k)]$$

是在最小化如下二次代价函数的前提下得到的：

$$J_N=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

式中：N 是有限的；$\boldsymbol{Q}(k)$是正半定的；$\boldsymbol{R}(k)$是正定的。

在式(11-7)中，上标 o 表示该控制律是最优的。注意，式(11-3)乘以因子 1/2 之后，结果不变，但会使推导过程得以简化。

还可以用最小值原理来解决最优控制问题。

最小值原理[4]若输入 $\boldsymbol{u}^o(k)$及其响应的轨迹 $\boldsymbol{x}^o(k)$都是最优的，那么一定存在一个非平凡的向量序列$\{\boldsymbol{p}^o(k)\}$，使得 $\boldsymbol{u}^o(k)$是最小化如下哈密顿方程的 $\boldsymbol{u}(k)$的值：

$$H=\frac{1}{2}[\boldsymbol{x}^{o\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}^o(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)] \\ +[\boldsymbol{p}^o(k+1)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}^o(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)] \tag{11-42}$$

而且，“共态向量” $\boldsymbol{p}^o(k)$对于任意 $k\leqslant N$，满足：

$$\boldsymbol{p}^o(k)=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}^o(k)},\quad \boldsymbol{p}^o(N)=\boldsymbol{Q}(N)\boldsymbol{x}^o(N) \tag{11-43}$$

根据式(11-43)，可得：

$$\boldsymbol{p}^o(k)=\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}^o(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{p}^o(k+1) \tag{11-44}$$

令 $\partial H/\partial \boldsymbol{u}(k)=0$，得到：

$$\boldsymbol{u}^o(k)=-\boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{p}^o(k+1) \tag{11-45}$$

由此，推得状态方程式(11-4)为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

及共态方程式(11-44)，其最优控制由式(11-45)给出。状态方程一旦获得初始条件 $x(k_0)$，即刻向前求解。共态方程则由式(11-43)获得终态，会即刻向后求解。因为状态方程和共态方程是成对出现的，它们构成了一个线性两点边值的问题。关于求解两点边值问题内容超过了本书范围。但是不难看出，求解式(11-4)、式(11-44)和式(11-45)所得最优增益矩阵与求解式(11-38)和式(11-39)所得的相同。

11.6 最优稳态控制

如果我们考虑图 11-3 所描述的例 11.3 的设计结果，可以看出，最优增益值将随时间逐渐逼近一个恒定值。一般来讲，时不变系统和代价函数的确如此。

还需注意，如果加大例 11.3 的 N，那么后 51 个采样时刻的最优增益将与该例算得的值相同。而之前采样时刻的增益就是图 11-3 所示的那些恒定值。因此如果允许 N 趋于无穷大，即如果允许初始时间趋于$-\infty$，我们就能获得一个稳态解，且其对应的最优增益为恒定值。本节我们来讨论这一稳态解。

首先，我们来看看设计最优控制系统过程中得到的差分方程式(11-38)和式(11-39)：

$$\boldsymbol{K}(k)=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(k)]+\boldsymbol{Q}$$

本节设其 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$ 为常量。如果将式(11-38)代入式(11-39)，将得到关于矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的差分方程为：

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}\}+\boldsymbol{Q} \tag{11-46}$$

该方程通常整理成如下形式：

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\times\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A} \tag{11-47}$$

并称之为离散的里卡蒂方程。因为 $\boldsymbol{R}$ 正定，且 $\boldsymbol{P}(k+1)$至少正半定[式(11-3)的代价函数及式(11-36)均非负]，所以式(11-47)的逆矩阵总是存在。

在推导式(11-47)的稳态解之前，我们先推导时不变系统的离散里卡蒂方程中 $\boldsymbol{P}(k)$的一个非递归解。然后利用这个解得到稳态解。我们可以将式(11-4)的状态方程和式(11-44)的共态方程表示为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^o(k) \\ \boldsymbol{p}^o(k) \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^o(k+1) \\ \boldsymbol{p}^o(k+1) \end{bmatrix} \tag{11-48}$$

式中：

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}_c \\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}_c \end{bmatrix} \tag{11-49}$$

且

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{11-50}$$

注意，$\boldsymbol{H}$ 是 $2n\times 2n$ 的矩阵，

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \tag{11-51}$$

式中：$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ 都是 $n\times n$ 的矩阵，那么，

$$\boldsymbol{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}]^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1} & -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}]^{-1} \\ -[\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}]^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1} & [\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}]^{-1} \end{bmatrix} \tag{11-52}$$

这可参见附录Ⅳ。因此，根据式(11-49)、式(11-51)和式(11-52)，可得：

$$\boldsymbol{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{R}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{R}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{11-53}$$

式中：

$$\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{11-54}$$

如果用 $\boldsymbol{h}$ 表示 $\boldsymbol{H}$ 的一个特征向量，用 λ 表示特征值，那么，有：

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h} \tag{11-55}$$

令

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix} \tag{11-56}$$

式中：$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 都是 n 维向量。

将式(11-49)代入式(11-55)，得到两个方程。再将式(11-53)代入下式：

$$\boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{f} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{f} \end{bmatrix} \tag{11-57}$$

得到相同的两个方程。因此，λ 即是$\boldsymbol{H}^{-1}$的特征值，也是$\boldsymbol{H}^{-T}$的特征值，则 $\boldsymbol{H}$ 的特征值就是 $1/\lambda$。也就是说，$\boldsymbol{H}$ 的特征值的倒数仍然是特征值。

接下来，我们定义向量 $\boldsymbol{v}(k)$、向量 $\boldsymbol{s}(k)$，以及相似变化 $\boldsymbol{W}$(见 2.10 节)的关系为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^o(k) \\ \boldsymbol{P}^o(k) \end{bmatrix} = \boldsymbol{W} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(k) \\ \boldsymbol{s}(k) \end{bmatrix} \tag{11-58}$$

当 $\boldsymbol{H}$ 的特征值不相同时，根据式(11-48)，可以写出：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(k) \\ \boldsymbol{s}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(k+1) \\ \boldsymbol{s}(k+1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{W} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(k+1) \\ \boldsymbol{s}(k+1) \end{bmatrix} \tag{11-59}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}$ 是由 $\boldsymbol{H}$ 的位于单位圆外的特征值构成的对角矩阵。

在式(11-58)中，$\boldsymbol{W}$ 的列为 $\boldsymbol{H}$ 的特征向量，就如 2.10 节中描述的，$\boldsymbol{W}$ 为模态矩阵。

接下来，把矩阵 $\boldsymbol{W}$ 分成四个 $n\times n$ 的部分：

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{11} & \boldsymbol{W}_{12} \\ \boldsymbol{W}_{21} & \boldsymbol{W}_{22} \end{bmatrix} \tag{11-60}$$

根据式(11-43)，得：

$$\boldsymbol{p}^o(N) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^o(N)$$

根据式(11-58)和式(11-60)，得：

$$\boldsymbol{p}^{o}(N)=[\boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{v}(N)+\boldsymbol{W}_{22}\boldsymbol{s}(N)]=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^{o}(N)=\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{v}(N)+\boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{s}(N)] \tag{11-61}$$

解上述方程，得 $\boldsymbol{s}(N)$：

$$\boldsymbol{s}(N)=-[\boldsymbol{W}_{22}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_{12}]^{-1}[\boldsymbol{W}_{21}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}_{11}]\boldsymbol{v}(N)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}(N) \tag{11-62}$$

上式定义了矩阵 $\boldsymbol{T}$。同时，将式(11-59)的 $\boldsymbol{v}(N)$和 $\boldsymbol{s}(N)$表示为：

$$\boldsymbol{v}(N)=\boldsymbol{\Lambda}^{-j}\boldsymbol{v}(N-j) \tag{11-63}$$

$$\boldsymbol{s}(N)=\boldsymbol{\Lambda}^{j}\boldsymbol{s}(N-j) \tag{11-64}$$

式中：j 为正整数。

再根据式(11-62)和式(11-64)，可得：

$$\boldsymbol{s}(N-j)=\boldsymbol{\Lambda}^{-j}\boldsymbol{s}(N)=\boldsymbol{\Lambda}^{-j}\mathrm{T}\boldsymbol{\Lambda}^{-j}\boldsymbol{v}(N-j)=\boldsymbol{G}(j)\boldsymbol{v}(N-j) \tag{11-65}$$

上式定义了矩阵 $\boldsymbol{G}(j)$。

根据式(11-58)和式(11-60)，可得：

$$\boldsymbol{x}^{o}(N-j)=\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{v}(N-j)+\boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{s}(N-j) \tag{11-66}$$

$$\boldsymbol{p}^{o}(N-j)=\boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{v}(N-j)+\boldsymbol{W}_{22}\boldsymbol{s}(N-j) \tag{11-67}$$

消掉式(11-65)、式(11-66)和式(11-67)中的 $\boldsymbol{v}(N-j)$和 $\boldsymbol{s}(N-j)$，得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^{o}(N-j)&=[\boldsymbol{W}_{21}+\boldsymbol{W}_{22}\boldsymbol{G}(j)][\boldsymbol{W}_{11}+\boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{G}(j)]^{-1}\boldsymbol{x}^{o}(N-j)\\&=\boldsymbol{M}(j)\boldsymbol{x}^{o}(N-j)\end{aligned} \tag{11-68}$$

式中定义了矩阵 $\boldsymbol{M}(j)$。对状态方程式(11-4)和共态方程式(11-44)来说，上述方程给出的是非迭代解。

为了得到式(11-36)的最优增益 $\boldsymbol{K}(k)$，令式(11-68)中的 $N-j=k+1$，得：

$$\boldsymbol{p}^{o}(k+1)=\boldsymbol{M}(N-k-1)\boldsymbol{x}^{o}(k+1)=\boldsymbol{M}(N-k-1)[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{o}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{o}(k)] \tag{11-69}$$

因为式(11-45)中的最优控制为：

$$\boldsymbol{u}^{o}(k)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^{o}(k+1) \tag{11-70}$$

从上两个方程解 $\boldsymbol{u}^{o}(k)$可得：

$$\boldsymbol{u}^{o}(k)=-[\boldsymbol{R}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(N-k-1)\boldsymbol{B}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(N-k-1)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{o}(k)$$

把这个方程与式(11-37)及式(11-38)进行对比，可以看到：

$$\boldsymbol{M}(N-k-1)=\boldsymbol{P}(k+1) \tag{11-71}$$

再根据式(11-65)和式(11-68)，可得：

$$\boldsymbol{M}(k+1)=[\boldsymbol{W}_{21}+\boldsymbol{W}_{22}\boldsymbol{G}(N-k-1)][\boldsymbol{W}_{11}+\boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{G}(N-k-1)]^{-1} \tag{11-72}$$

式中：

$$\boldsymbol{G}(N-k-1)=-\boldsymbol{\Lambda}^{-(N-k-1)}[\boldsymbol{W}_{22}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}_{12}]^{-1}[\boldsymbol{W}_{21}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}_{11}]\boldsymbol{\Lambda}^{-(N-k-1)} \tag{11-73}$$

根据式(11-70)可以得知，最优增益为：

$$\boldsymbol{K}(k)=[\boldsymbol{R}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(N-k-1)\boldsymbol{B}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(N-k-1)\boldsymbol{A} \tag{11-74}$$

其 LQ 设计的非迭代解为式(11-72)和式(11-74)。

式(11-38)的增益等稳态解已经变成了常量，那么，在式(11-47)中，下式一定成立：

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{P}(k+1)=\text{常值矩阵} \tag{11-75}$$

将该常值矩阵定义为$\hat{\boldsymbol{P}}$。那么，就可以将式(11-47)写成：

$$\hat{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A} \tag{11-76}$$

这个方程称作代数里卡蒂方程。求解该方程解的最简方法或许就是例 11.3 中提到的方法，即把 N 设定成一个很大的值，然后计算矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的值(通过计算机)，直到矩阵各元素变为常量为止，这时，我们也就得到了式(11-76)的解。

还可以根据前面的离散里卡蒂方程的非递归解，得到代数里卡蒂方程的解。在式(11-68)中，

$$\boldsymbol{p}^{o}(N-j)=\boldsymbol{M}(j)\boldsymbol{x}^{o}(N-j) \tag{11-77}$$

该稳态解通过令 j 趋于$+\infty$得到。根据式(11-65)和式(11-68)，可得：

$$\lim_{j\to+\infty}\boldsymbol{M}(j)=\boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{W}_{11}^{-1} \tag{11-78}$$

因为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 包括单位圆外的特征值，所以有：

$$\lim_{j\to+\infty}\boldsymbol{\Lambda}^{-j}=0$$

因此，根据式(11-71)，可得代数里卡蒂方程(式(11-76))的解为：

$$\hat{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{W}_{11}^{-1}=\lim_{j\to+\infty}\boldsymbol{M}(j) \tag{11-79}$$

对式(11-74)来说，有：

$$\hat{\boldsymbol{K}}=[\boldsymbol{R}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\,\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A} \tag{11-80}$$

例 11.4 用例 11.1 的一阶控制系统，说明如何通过非迭代方法求解最优控制问题。即我们希望为如下的系统设计最优控制律：

$$x(k+1)=2x(k)+u(k)$$

其代价函数为：

$$J_N=\sum_{k=0}^{N}x^2(k)+u^2(k)$$

需要用到的参数为：

$$\boldsymbol{A}=2,\quad \boldsymbol{Q}=1$$
$$\boldsymbol{B}=1,\quad \boldsymbol{R}=1$$

而且

$$\boldsymbol{R}_c=\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=1$$

那么，在式(11-49)中

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}_c\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{H}$ 的特征值满足如下方程：

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}|=(\lambda-0.5)(\lambda-2.5)-0.25=\lambda^2-3\lambda+1=0$$

求得特征值为 2.618 和 0.382。特征向量满足如下方程：

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h}$$

求得特征向量为：

$$\boldsymbol{h}_1=\begin{bmatrix}1\\ 4.237\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{h}_2=\begin{bmatrix}1\\ -0.236\end{bmatrix}$$

相似变换 $\boldsymbol{W}$ 为：

$$\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{h}_1\ \boldsymbol{h}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4.237 & -0.236\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{11} & \boldsymbol{W}_{12}\\ \boldsymbol{W}_{21} & \boldsymbol{W}_{22}\end{bmatrix}$$

将解出结果代入式(11-59)，可得：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}2.618 & 0\\ 0 & 0.382\end{bmatrix}$$

根据式(11-62)，得：

$$T=-[\boldsymbol{W}_{22}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}_{12}]^{-1}[\boldsymbol{W}_{21}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}_{11}]=2.619$$

根据式(11-65)，得：

$$\boldsymbol{G}(j)=\boldsymbol{\Lambda}^{-j}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}^{-j}=2.619\times(0.382)^{2j}$$

再根据式(11-71)和式(11-72)，得到：

$$P(k+1)=M(N-k-1)=\frac{4.237-0.618\times(0.382)^{2(N-k-1)}}{1+2.619\times(0.382)^{2(N-k-1)}}$$

根据式(11-74)，最优增益就为

$$K(k)=\frac{2M(N-k-1)}{1+M(N-k-1)}$$

对于 $N=2$，$k=1$，有：

$$K(1)=\frac{2M(0)}{1+M(0)}=\frac{2\times 1}{1+1}=1$$

而对于 $k=0$，有：

$$K(0)=\frac{2M(1)}{1+M(1)}=\frac{2\times 3}{1+3}=1.5$$

这些结果验证了例 11.1。同时，稳态值$\hat{\boldsymbol{P}}$也可以据式(11-79)获得：

$$\hat{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{W}_{11}^{-1}=4.237$$

那么，稳态增益为：

$$\hat{\boldsymbol{K}}=\frac{2\times(4.237)}{1+4.237}=1.618$$ ◀

下面给出一些关于离散里卡蒂方程式(11-47)的稳态解的一般性结论。需要注意的是该方程的稳态解是在 N 有限，且 $m\to+\infty$的情况下得到的。

首先我们定义**能稳定的**这个词。

定义 如果离散时间系统式(11-4)存在一个矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 的特征值均位于单位圆内，那么，该系统就是能稳定的。

借此定义，可以对以下定理做出陈述。

定理 1 如果系统式(11-4)既能控又能稳定，那么，离散里卡蒂方程式(11-47)在 $m\to+\infty$时存在一个有限解，即

$$\lim_{m\to+\infty}\boldsymbol{P}(N-m)=\hat{\boldsymbol{P}}$$

在此，不提供对该定理及以下定理的证明[4]。

定理 2 如果系统式(11-4)是能观的，那么，$\hat{\boldsymbol{P}}$正定，且其最优闭环系统渐进稳定。

11.7 最优状态估计——卡尔曼滤波

在本节，我们对第 9 章介绍的状态估计的内容进行拓展，介绍一种称为卡尔曼滤波[5,6]的最优状态估计的方法。这里给出的卡尔曼滤波器具有 9.5 节当前状态观测器方程的形式，但计算其增益矩阵的方法不同；还有一种卡尔曼滤波器，它具有预观测器的形式[7]。对于本节的问题，我们采用前者。在接下来的内容中，我们假设读者对随机变量和随机过程有一定的了解[5,6,8]。

设控制对象的描述方程为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{Cx}(k)+\boldsymbol{v}(k)\end{aligned}\tag{11-81}$$

式中：$\boldsymbol{x}(k)$为$[n\times 1]$维状态向量；$\boldsymbol{u}(k)$为$[r\times 1]$维已知输入；$\boldsymbol{w}(k)$为$[s\times 1]$维随机干扰；$\boldsymbol{y}(k)$为$[p\times 1]$维测量值；$\boldsymbol{v}(k)$为$[p\times 1]$维随机的测量不准确量。

假设式(11-81)的随机输入$\boldsymbol{w}(k)$与 $\boldsymbol{v}(k)$是无关的，且均服从高斯分布：

$$\begin{aligned}&E[\boldsymbol{w}(k)]=0,\quad E[\boldsymbol{v}(k)]=0\\ &\operatorname{cov}[\boldsymbol{w}(j),\boldsymbol{w}(k)]=E[\boldsymbol{w}(j)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)]=\boldsymbol{R}_w\delta_{jk}\\ &\operatorname{cov}[\boldsymbol{v}(j),\boldsymbol{v}(k)]=E[\boldsymbol{v}(j)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)]=\boldsymbol{R}_v\delta_{jk}\end{aligned}\tag{11-82}$$

式中：$E[\cdot]$表示求数学期望的操作；$\operatorname{cov}[\cdot]$表示求协方差的操作；$\delta_{jk}$ 为克罗内克(Kronecker)δ 函数，定义如下：

$$\delta_{jk}=\begin{cases}0, & j\neq k\\ 1, & j=k\end{cases}$$

由此可见，$w(k)$和 $v(k)$为服从高斯分布的离散白噪声序列。

卡尔曼滤波器方程的推导，需要用到关于随机过程的一些拓展知识，这已超出了本书的研究范围。不过，第 9 章中有关观测器的背景知识会帮助我们理解卡尔曼滤波器的目标及性质。我们可以把式(11-82)中的求期望操作看作求平均值操作。因此，也就可以把求

向量或矩阵的期望看作求向量或矩阵中各元素的平均值。

设状态向量 $\boldsymbol{x}(k)$ 的观测值为 $\boldsymbol{q}(k)$，那么，观测误差即为：

$$\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{q}(k) \tag{11-83}$$

再设误差向量的协方差为 $\boldsymbol{P}(k)[n\times n]$，且

$$\boldsymbol{P}(k)=E[\boldsymbol{e}(k)\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)] \tag{11-84}$$

那么，$\boldsymbol{P}(k)$ 的对角元素就为观测的均方误差。可以选待最小化的代价函数为 $\boldsymbol{P}(k)$ 的迹(即其对角元素的和，也即或观测的均方误差之和)为：

$$\begin{aligned}J(k)&=\mathrm{tr}\boldsymbol{P}(k)=E[e_1^2(k)]+E[e_2^2(k)]+\cdots+E[e_n^2(k)]\\&=\sigma_{e1}^2(k)+\sigma_{e2}^2(k)+\cdots+\sigma_{en}^2(k)\end{aligned} \tag{11-85}$$

式中：$\sigma_{ei}^2(k)$ 为 $e_i(k)$ 的方差。

还可以把代价函数表示为：

$$J(k)=E[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{e}(k)]$$

需要指出的是，这里是要将观测误差平方的期望值最小化，而非将实际误差本身进行最小化。因为系统式(11-81)中有随机输入，测量值也有随机误差，因此，所有实际的观测误差是不确定的。这就迫使我们只能考虑观测误差的统计特征，即对所得误差的期望值(平均值)最小化。站在这个角度上，卡尔曼滤波器仅仅是平均意义上最优的。

卡尔曼滤波器的另一个性质就是对于任意的正半定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，其代价函数

$$J(k)=\mathrm{tr}E[\boldsymbol{e}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)] \tag{11-86}$$

也被最小化[5]。因此，对一个二阶系统来讲，如下代价函数

$$\begin{aligned}J_1'(k)&=E[e_1^2(k)]\\J_2'(k)&=E[e_1^2(k)]+E[e_2^2(k)]\\J_3'(k)&=10E[e_1^2(k)]+E[e_2^2(k)]\end{aligned}$$

均被最小化，进而代价函数

$$J_N=\sum_{k=0}^{N}E[e_1^2(k)]+E[e_2^2(k)]=\sum_{k=0}^{N}E[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{e}(k)]$$

因其每一项均被最小化，它们的总和也被最小化。因此说卡尔曼滤波器是多角度最优的。

如上所述，这里不做最小化式(11-85)[或(11-86)]的数学推导，直接给出推导结果，即卡尔曼滤波器方程如下[5][6]：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}(k)&=\overline{\boldsymbol{q}}(k)+\boldsymbol{G}(k)[\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{q}}(k)]\\\overline{\boldsymbol{q}}(k+1)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned} \tag{11-87}$$

在上述方程中，$\overline{\boldsymbol{q}}(k)$ 为采样时刻 k 的预状态估计；$\boldsymbol{q}(k)$ 为采样时刻 k 的实际状态估计。增益矩阵 $\boldsymbol{G}(k)$ 称为卡尔曼增益，由如下协方差方程计算而得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(k)&=\boldsymbol{M}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_v]^{-1}\\\boldsymbol{P}(k)&=\boldsymbol{M}(k)-\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}(k)\\\boldsymbol{M}(k+1)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{11-88}$$

式中：$\boldsymbol{M}(k)$ 为预测误差的协方差，

$$\boldsymbol{M}(k)=E\{[\boldsymbol{x}(k)-\overline{\boldsymbol{q}}(k)][\boldsymbol{x}(k)-\overline{\boldsymbol{q}}(k)]^{\mathrm{T}}\} \tag{11-89}$$

$\boldsymbol{P}(k)$ 的定义由式(11-84)给出。我们将式(11-88)的第二个方程代入第三个方程，得到一个关于 $\boldsymbol{M}(k)$ 的差分方程：

$$\boldsymbol{M}(k+1)=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{M}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \tag{11-90}$$

鉴于卡尔曼增益 $\boldsymbol{G}(k)$ 与测量值无关，所以可以将其预先计算出来，当然，也可以实时计算。不管是预先计算，还是实时计算，都必须将初始预测状态 $\overline{\boldsymbol{q}}(0)$ 和 $\overline{\boldsymbol{q}}(0)$ 的误差协方差 $\boldsymbol{M}(0)$ 估计出来。一旦观测得到 $\boldsymbol{M}(0)$，就可以根据式(11-88)、利用式(11-82)提供的 $\boldsymbol{R}_w$ 和 $\boldsymbol{R}_v$ 算出卡尔曼增益 $\boldsymbol{G}(k)$。再利用增益 $\boldsymbol{G}(k)$、初始预测状态 $\overline{\boldsymbol{q}}(0)$ 和观测值 $\boldsymbol{y}(k)$ 实时解出卡尔曼滤波器方程式(11-87)。

在滤波器方程式(11-87)中，可以消去预观测值 $\overline{\boldsymbol{q}}(k)$，得到如下的滤波器方程：

$$q(k)=[A-G(k)CA]q(k-1)+[B-G(k)CB]u(k-1)+G(k)y(k) \quad (11\text{-}91)$$

对于稳态卡尔曼滤波器来说，$G(k)$为常值矩阵，这时，滤波器方程式(11-87)[或式(11-91)]则具有如下的特征方程：

$$|zI-(A-GCA)|=0 \quad (11\text{-}92)$$

如果除了式(11-88)之外，还能提供其他一些办法将增益 G 确定出来，就称这种滤波器为实时观测器，如 9.6 节所述。

假设控制系统是由本章开头提到的线性二次最优法设计而成的，并使用稳态增益 K；再假设利用稳态卡尔曼滤波器来观测状态。那么，这一设计过程就称为无限时域线性二次高斯设计(IH-LQG)。其实现方法与第 9 章的极点配置实时观测器设计的实现方法一致。因此，控制-观测器传递函数$D_{ce}(z)$由下式给出(参见图 9-8，式(9-73))：

$$D_{ce}(z)=zK[zI-A+GCA+BK-GCBK]^{-1}G$$

正如 9.5 节式(9-11)所述，将卡尔曼滤波器作为状态观测器的全维反馈控制系统的鲁棒性可能变差。因此，需要在控制对象输入下核查稳定裕度，以确保能够有足够的相对稳定性。

例 11.5 下面利用例 11.2 的控制对象(伺服电动机)来说明卡尔曼滤波器的设计。在第 9 章，这个伺服电动机也曾多次用来作为极点配置及观测器设计的案例，其状态方程为：

$$x(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 0.0952\\0 & 0.905\end{pmatrix}x(k)+\begin{pmatrix}0.00484\\0.0952\end{pmatrix}u(k)+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}w(k)$$

$$y(k)=(1\quad 0)x(k)+v(k)$$

回顾一下，伺服电动机的两个状态分别是电机转角位置与转角转速，我们假设它们的单位分别取(°)和(°)/s，它们会同等程度地受到伺服电动机所遭遇的干扰 $w(k)$的影响。再假设式(11-82)的输入协方差为：

$$E[w(j)w(k)]=R_w\delta_{jk},\quad R_w=1=\sigma_w^2$$

$$E[v(j)v(k)]=R_v\delta_{jk},\quad R_v=1=\sigma_v^2$$

式中：σ 表示标准差。

对于均值为 0、方差为σ^2 的高斯分布的随机变量 a 来讲，其或然概率为：

$$\text{prob}[|a|\leqslant\sigma]=0.683$$

$$\text{prob}[|a|\leqslant 2\sigma]=0.955$$

$$\text{prob}[|a|\leqslant 3\sigma]=0.997$$

例如，对于不确定的测量值，可以说，有 68% 的转角测量值的偏差在1°以内，平均地，在 1000 个测量值中仅有 3 个的测量误差会大于3°。因此，一个高斯型随机变量主要分布在平均值的 3σ 范围内，对伺服电动机的干扰来说，也如此。

由于卡尔曼滤波器方程的复杂性，我们用计算机来完成此例卡尔曼滤波器增益的计算，图 11-5 绘出了计算结果。

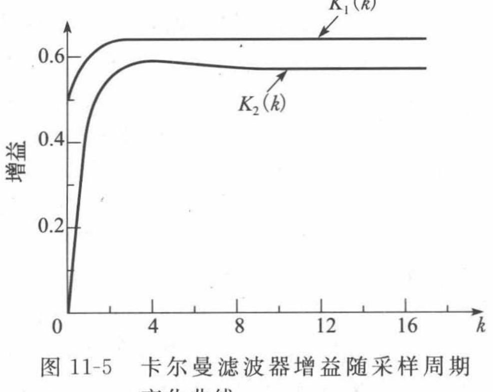


图 11-5 卡尔曼滤波器增益随采样周期变化曲线

假设协方差矩阵的初始值 $M(0)$为单位矩阵。大约 15 次迭代或 15s 后增益的值不再改变，取值如下：

$$G=\begin{pmatrix}0.636\\0.570\end{pmatrix}$$

此时，式(11-87)的卡尔曼滤波器方程便完全确定下来，一旦得到状态的初始估计 $\bar{q}(0)$，就可以求解之。算出的稳态误差协方差矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}0.636 & 0.570\\ 0.570 & 0.599\end{pmatrix}$$

因此，稳定下来的卡尔曼滤波器，其 $x_1(k)$ 的估值标准差 $\sigma_{e1}=(0.636)^{1/2}=0.797°$，$x_2(k)$ 的估值标准差 $\sigma_{e2}=0.771°\mathrm{s}^{-1}$。对于电动机转角位置的估计，其误差几乎完全分布在2.4°的 3σ 范围内。例如，如果测量值为7°，那么，几乎可以确定电动机转轴的真实位置位于4.6°到9.4°之间。如果误差过大，要么需要更换更准确的仪器，要么就必须降低对控制对象的干扰。我们应记得，对于用到的误差准则来说，滤波器自身就是“最优的”。计算卡尔曼滤波器的 MATLAB 程序如下：

```
format ShortEng
A = [1 0.0952;0 0.905]; B1 = [1;1]; C = [1 0];
Rw = 1; Rv = 1; M = [1 0;0 1]; N = 15;
disp('k       Gains')
for k=1:N
G = M*C'*inv(C*M*C'+Rv);
P = M - G*C*M;
M = A*P*A'+B1*Rw*B1';
[k,G']
end
disp('The final value of the P matrix is:')
P
```

◀

例 11.6 本例欲将例 11.5 的设计拓展到稳态卡尔曼滤波器和 IH-LQG 控制系统的设计中。对于 IH-LQG 设计，可以使用例 11.3 的最优控制设计，其中，

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad R=1$$

该例的稳态增益为：

$$K=(0.964\quad 0.719)$$

因此，IH-LQG 控制器可以表示成传递函数式(9-73)，对该传递函数的观测结果为：

$$D_{ce}(z)=\frac{1.023z^2-0.9124z}{z^2-1.147z+0.3061}$$

控制对象的传递函数为 $G(z)$，在控制对象的入端将系统断开，得系统的开环传递函数(见图 9-8)为：

$$D_{ce}(z)G(z)=\frac{1.023z^2-0.9124z}{z^2-1.147z+0.3061}\left(\frac{0.00484z+0.004683}{z^2-1.905z+0.905}\right)$$

由上述方程的频域响应可算出该系统具有66.7°的相位裕度和 18.4dB 的增益裕度，这是一对足以满足需要的裕度值。通常来讲，在设计过程中，没有哪一项工作是确保能够获得足够量的稳定裕度的，因此，总是要对设计结果进行稳定裕度的核查。下面是此例用到的 MATLAB 程序：

```
A = [1 0.0952;0 0.905]; B = [0.00484; 0.0952]; C = [1 0];
K = [0.964 0.719]; G = [0.636; 0.570];
syms z, T = 0.1;
Dce = z*K*inv((z*eye(2)-A+G*C*A+B*K-G*C*B*K))*G;
[n,d] = nice(Dce,z); Dce = tf(n,d,T)
Sys=ss(A,B,C,0,T); [num,den,T]=tfdata(Sys);
Gz = tf(num,den,T)
Tz=feedback(Dce*Gz,1);
[Gm,Pm] = margin(Dce*Gz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
Stepinfo = stepinfo(Tz)
```

一种特别值得推荐的做法就是将 IH-LQG 设计绘制成图 11-6 所示的形式。在该图中，所有的信号都表示成向量；因此乘法的顺序是非常重要的。对该框图任何简化都需要格外

小心。只需将式(11-87)中的 k 替换成 $(k+1)$，便可导出这个框图。首先，把式(11-87)的第二个方程代入第一个方程，得：

$$\boldsymbol{q}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(k)+[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}]\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}(k+1)-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(k)$$

对上式作 z 变换并整理得到：

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(z)=[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}]\boldsymbol{U}(z)+z\boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}(z)-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(z)$$

进而写出：

$$\boldsymbol{Q}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\{[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}]\boldsymbol{U}(z)+z\boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}(z)-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(z)\}$$

这个 $\boldsymbol{Q}(z)$ 的方程就是图 11-6 所示卡尔曼滤波器的输出。

重要的是，采用图 11-6 所示系统来表示 IH-LQG 控制系统，有助于理解卡尔曼滤波器对控制系统的作用。看上去卡尔曼滤波器有两个输入。一个是控制对象输入 $\boldsymbol{U}(z)$，一个是控制对象输出 $\boldsymbol{Y}(z)$。如果测量噪声为主要噪声[测量噪声对状态观测的影响要比控制对象扰动的影响大很多]，那么，相对于控制对象的输入和动态特性的影响来说，所产生的 $\boldsymbol{G}$ 值将会降低状态观测中测量值的影响比重。例如，如果没有控制对象的扰动($\boldsymbol{R}_w=\boldsymbol{0}$)，那么，稳态卡尔曼滤波器将会完全忽略测量值($\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$)[5]。当然，这在任何情况下都是我们所不期望的。

相反，如果控制对象上的扰动很大，所产生的 $\boldsymbol{G}$ 值就会增大测量值在状态观测中的影响，降低对 $\boldsymbol{U}(z)$ 及控制对象动态特性的影响。在某些情况下，$\boldsymbol{R}_w$ 可能会使得模型的不确定性明显增加。

就像文献[9]描述的那样，图 11-6 所示系统中，a 点断开时的稳定裕度总是令人满意的，而 b 点断开时的稳定裕度就可能特别小。因为控制对象模型往往是不确定的，所以我们需要 b 点断开时的稳定裕度要大一些。

如果系统稳定裕度过小，文献[9]中提到了提高 b 点断开时的稳定裕度的方法。主要是通过增强(相对于指定值的大小)协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_w$ 来达此目的，但必须要使用指定的方法。在提高稳定裕度的同时，很可能造成所得卡尔曼滤波器对于最初的性能指标来说不再最优。因此，必须在优化性能和稳定性之间进行权衡，而这类权衡取舍的工作总是与理论应用于实践的过程相伴的。

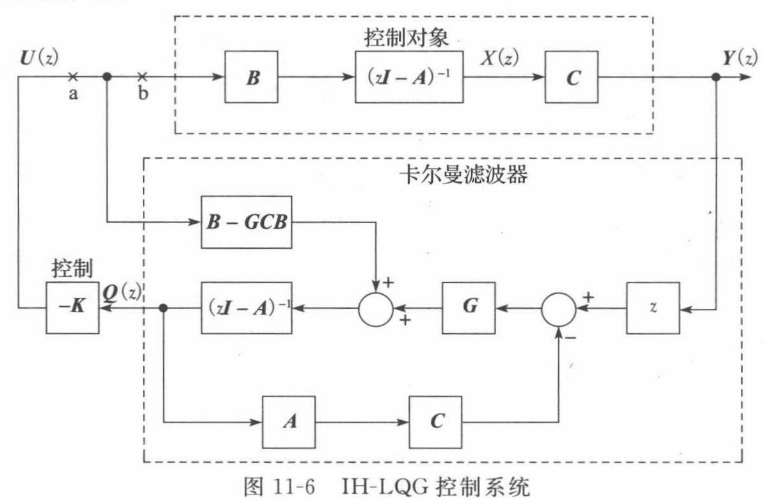


图 11-6 IH-LQG 控制系统

11.8 最小二乘函数的最小化

第 10 章与第 11 章中提出的优化方法都是基于最小化最小二乘函数的，因此这两章的方法息息相关。为了体现这两个过程的相似性，表 11-1 列出了 LQ 设计、最小二乘系统辨识和卡尔曼滤波器设计所使用的方程，相似点十分明显。

表 11-1　最小二乘设计方程

代价函数	
LQ	$j_N=\sum_{k=0}^{N}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)]$
Sys • Id.	$J=\sum_{k=n}^{N}e^2(k)=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{e}(k)$
Kalman	$J(k)=\sum_{i=o}^{N}E[e_i^2(k)]=E[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{e}(k)]$
Gain Equations	
LQ	$\boldsymbol{K}(k)=[\boldsymbol{R}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}$
Sys • Id.	$\boldsymbol{L}(k+1)=\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{f}(k+1)[1+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{f}(k+1)]^{-1}$
Kalman	$\boldsymbol{G}(k)=\boldsymbol{M}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}$
Update Eauations	
LQ	$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(k)]+\boldsymbol{Q}$
Sys • Id.	$\boldsymbol{P}(k+1)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(k+1)\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(k+1)]\boldsymbol{P}(k)$
Kalman	$\boldsymbol{M}(k+1)=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{M}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}$

11.9　小结

本章给出了线性二次最优控制设计的一些基本结果。一旦代价函数选定，就可直接进入对差分方程的求解。所使用的基本公式即便反映的是有限时间问题，也还是可以很容易地将其拓展到无限时间问题的设计中的。设计实现需要全维反馈，如果系统的控制对象是时不变的，则其反馈增益对于有限时间问题来讲则是时变的，而在无限时间问题上是常量。

作为本书的最后一个议题，我们介绍了基于卡尔曼滤波器的最优状态观测方法。这种滤波器具有第 9 章介绍的实时观测器的形式，所不同的仅是计算增益矩阵的方法。随后，我们又介绍了如何进行 IH-LQG 设计。

参考文献

[1] P. M. De Russo, R. J. Roy, C. M. Close, and A. A. Desrochers, *State Variables for Engineers,* 2d ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[2] R. Bellman, *Adaptive Control Process: A Guided Tour.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1961.
IEEE Trans. Autom. Control, Bellman Special Issue, AC-26, 1981.

[3] P. Dorato and A. H. Levis, "Optimal Linear Regulators: The Discrete Time Case," *IEEE Trans. Autom. Control* AC-16, pp. 613–20, 1971.

[4] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation and Control,* Vol. 3. New York: Academic Press, Inc., 1982.

[5] R. G. Brown, *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[6] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1979.

[7] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes,* 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

[8] J. C. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers," *IEEE Trans. Automat. Control* AC-24, pp. 607–611, 1979.

[9] B. T. Oranc, "A Classical Approach to Robust Design of Linear-Quadratic-Gaussian Controllers," Ph.D. dissertation, Auburn University, Auburn, AL, 1987.

[10] B. E. Sturgis, Jr., "A Study of Stability Margin Problems in Systems Implementing Kalman Filters," M.S. thesis, Auburn University, Auburn, AL, 1984.

[11] T. E. Fortman, "A Matrix Inversion Identity," *IEEE Trans. Autom. Control* AC-15, p. 599, 1970.

[12] R. Gran and F. Kozin, *Applied Digital Control Systems.* George Washington University Short Course Notes, Washington, D.C., 1979.

[13] D. R. Vaughan, "A Nonrecursive Algebraic Solution for the Discrete Riccati Equation," *IEEE Trans. Autom. Control* AC-15, pp. 597–599, 1970.

习题

11.4-1　若式(11-21)与式(11-22)成立，推导式(11-23)。

11.4-2　证明式(11-35)也可以表述为：

$$\boldsymbol{P}(N-m)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}(N-m+1)-\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{BDB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)]\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}$$

式中：$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(N-m+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}]^{-1}$。

11.4-3　对于给定离散系统：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{Ax}(k)+\boldsymbol{Bu}(k)$$

采用如下代价函数：

$$J_N=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Qx}(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Ru}(k)$$

证明：如果 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 中的元素均乘以正标量 β，也不会改变最小化 J_N 下的最优增益。

11.4-4　对于如下一阶控制对象：

$$x(k+1)=0.9x(k)+0.1u(k)$$

选用代价函数：

$$J_3=\sum_{k=0}^{3}[x^2(k)+5u^2(k)]$$

(1) 利用 11.3 节的偏微分方法计算优化该代价函数所需的反馈增益。

(2) 使用 11.4 节的差分方程方法重做(1)问。

(3) 对于作为 $x(0)$ 函数的 $u(k)$，求其最大值。

11.4-5　对于习题 11.4-4 中的控制对象，改用如下代价函数：

$$J_3=\sum_{k=0}^{3}x^2(k)$$

(1) 使用 11.4 节的差分方程方法计算优化代价函数所需的反馈增益。

(2) 对于作为 $x(0)$ 函数的 $u(k)$，求其最大值

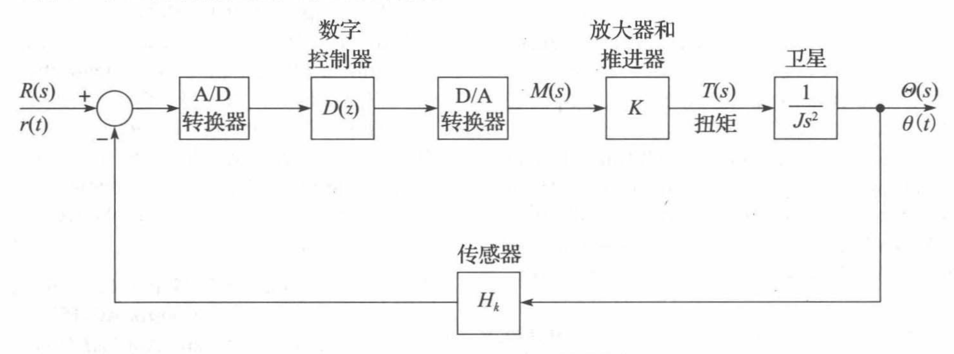
(3) 对(2)问给出的 $u(k)$ 的最大值和习题 11.4-4 的(3)问给出的 $u(k)$ 的最大值进行对比分析，哪一个为 $|u(0)|=0.0441|x(0)|$，解释两者间的差异。

11.4-6　一卫星控制系统，其模型如图 P11.4-6 所示，该系统在习题 1.4-1 已有涉及，具体地，忽略传感器增益，并令 $D(z)=1$，再有，$K=1$，$T=1\mathrm{s}$，$J=4$。习题 9.2-4 指出，该系统的状态模型为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.125\\0.25\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)$$

式中：$x_1(k)$ 为转角位置；$x_2(k)$ 为转速。



P11.4-6　卫星控制系统框图

(1) 手算方式确定最小化如下代价函数所需的增益：

$$J_N=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+2u^2(k)$$

式中：$N=1$。如此选择 N 的取值是出于限制计算繁杂程度的考虑。

(2) 在 $N=20$ 的条件下用 MATLAB 程序来重做(1)程序。绘出增益随 k 变化而变化的曲线。

11.4-7　(1) 对如下代价函数重做习题 11.4-6，将增益曲线与习题 11.4-6 的结果绘制于同一张图上。

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) + 20u^2(k)$$

(2) 解释(1)问的增益与习题 11.4-6 所得增益的差别。

11.4-8　考虑三阶连续时间 LTI 系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

式中：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=(1 \quad 0 \quad 0)$。采用

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = 0.5$$

(1) 首先，用 MATLAB 的 lqr() 函数对该连续时间系统设计一个 LQ 控制器。令最优控制器增益向量为 $\boldsymbol{K}$。对如下闭环系统进行仿真：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}$$

式中：$\boldsymbol{X}(0)=(2 \quad 0 \quad -2)$。对闭环系统输出响应 $\boldsymbol{y}(t)$ 以 $T=0.1\mathrm{s}$ 的采样周期进行采样。

(2) 然后，用 $T=0.1\mathrm{s}$ 的采样周期直接将连续时间系统离散化，对该离散系统用与(1)问相同的 $\boldsymbol{Q}$ 和 R 设计一个 LQ 控制器。将所得闭环输出响应与(1)问得到的连续时间输出的采样值进行对比。

(3) 用因子 10 加大 $\boldsymbol{Q}$ 和 R，重复上述对连续时间系统和离散时间系统的工作。分别描述一下它们各自在输出响应上所发生的变化。

11.4-9　一室温控制系统，其模型如图 P11.4-9 所示。该系统在习题 1.6-1 已有涉及，具体的，忽略干扰输入，取 $T=0.6\mathrm{s}$ 并令 $D(z)=1$。习题 9.2-3 指出，该系统控制对象的模型为：

$$x(k+1) = 0.7408x(k) + 1.0368u(k)$$

令代价函数为：

$$J_3 = \sum_{k=0}^{3} [2x^2(k) + u^2(k)]$$

(1) 利用 11.3 节的偏微分方法计算优化该代价函数所需的反馈增益。

(2) 使用 11.4 节的差分方程方法重复(1)问。

(3) 对于作为 $x(0)$ 函数的 $u(k)$，求其最大值。

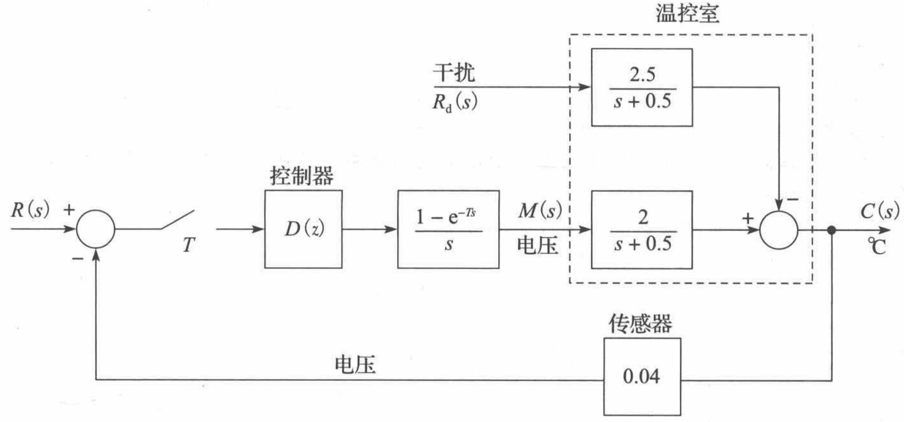


图 P11.4-9　室温控制系统

11.4-10　对习题 11.4-9 系统的控制对象，改用如下代价函数：

$$J_3 = \sum_{k=0}^{3} 10x^2(k) + u^2(k)$$

(1) 使用11.4节的差分方程方法计算优化代价函数所需的反馈增益。
(2) 对于作为 $x(0)$函数的 $u(k)$，求其最大值。
(3) 对(2)问给出的 $u(k)$的最大值和习题11.4-4(3)给出的 $u(k)$的最大值进行对比分析，解释它们之间的差异。

11.4-11 一阶控制对象的一般性描述如下：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

采用的代价函数为：

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} [Qx^2(k) + Ru^2(k)]$$

(1) 证明：在 $R=0$ 的情况下，最优增益 $K(k)$对于所有的 $k \geqslant 0$，均为常数。
(2) 给出(1)问的输入序列 $u(k)$，$k \geqslant 0$，其中，$u(k)$是 $x(0)$的函数。
(3) 画出(1)问的闭环系统的信号流图。
(4) 写出(1)问系统的闭环特征方程。
(5) 在初始条件 $x(0)$下，要用多少个采样周期方能使 $x(k)$趋近于0?

11.6-1 对于文献[6]中给出的分块矩阵：

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$$

式中：每个矩阵子块都是 $n \times n$ 的；$\boldsymbol{H}$ 的行列式为：

$$|\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{G}|\,|\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}|$$

证明：式(11-49)中 $\boldsymbol{H}$ 的行列式为1。考虑到11.6节所做论述与推导，这个结果与期望一致么?

11.6-2 对于如下一阶时不变离散系统的代价函数：

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} Qx^2(k) + Ru^2(k)$$

证明：最优增益恰为如下比值的函数：

$$\alpha = \frac{Q}{R}$$

而与单独的 Q 和单独的 R 无关。

11.6-3 对于习题11.4-4的系统：
(1) 对于无限时间问题和给定的代价函数，求最小化该代价函数所需的反馈增益。
(2) 求该闭环系统的特征方程。
(3) 找出闭环系统时间常数 τ 关于采样时间 T 的函数。

11.6-4 对于习题11.4-5中的系统：
(1) 对于无限时间问题和给定的代价函数，求最小化该代价函数所需的反馈增益。
(2) 求该闭环系统的特征方程。
(3) 找出闭环系统时间常数 τ 关于采样时间 T 的函数。
(4) 为什么(3)问中的过渡时间比习题11.4-6(3)所求过渡时间小($\tau=0.410T$)?

11.6-5 对于习题11.4-6的卫星控制系统：
(1) 通过计算机，对于无限时间问题和给定的代价函数，求最小化该代价函数所需的反馈增益。
(2) 求该闭环系统的特征方程。
(3) 找出闭环系统时间常数关于采样时间 T 的函数。

11.6-6 对于习题11.4-7的卫星控制系统：
(1) 通过计算机，对于无限时间问题和给定的代价函数，求最小化该代价函数所需的反馈增益。
(2) 求该闭环系统的特征方程。
(3) 找出闭环系统时间常数关于采样时间 T 的函数。
(4) 比较(3)问的时间常数与习题11.6-5的(3)问的时间常数($\tau=3.24T$)，并解释两者的差异。

11.6-7 对于习题11.4-9的系统：
(1) 对于无限时间问题和给定的代价函数，求最小化该代价函数所需的反馈增益。
(2) 求该闭环系统的特征方程。
(3) 求该闭环系统的时间常数。

11.6-8 对于习题11.4-10的系统：

(1) 对于无限时间问题和给定的代价函数，求最小化该代价函数所需的反馈增益。

(2) 求该闭环系统的特征方程。

(3) 求该闭环系统的时间常数。

(4) 将(2)问给出的增益与习题 11.6-3 的(1)问给出的增益进行对比，解释两者的差异。

11.7-1　假设某控制对象的描述方程为：

$$x(k+1)=0.8x(k)+0.2u(k)+w(k),\quad T=0.2\mathrm{s}$$
$$y(k)=x(k)+v(k)$$

式中：$w(k)$与$v(k)$是随机的且互不相关，均服从高斯分布，而且，

$$E[w(k)]=0,\quad E[w(j)w(k)]=2\delta_{if}$$
$$E[v(k)]=0,\quad E[v(j)v(k)]=\delta_{ij}$$

(1) 为该系统设计一个卡尔曼滤波器。令 $M(0)=2$，持续计算增益直到其接近常数。

(2) 在(1)问中，我们指定 $M(0)=2$。那么，我们以怎样的 $x(0)$开始状态估计呢？

(3) 写出稳态卡尔曼滤波器的差分方程，条件同(1)问。

(4) 假设为该控制对象进行了 LQ 设计，得到的增益 $K=0.2197$。那么，写出 IH-LQG 设计的控制-观测器传递函数(见图 9-8)。

(5) 求(4)问的闭环系统的特征方程。

(6) 求该闭环系统的时间常数。

(7) 假设状态 $x(k)$的观测值由卡尔曼滤波器获得，在 kT 时刻得到 90.1。给出值 90.1 的 3σ 的范围，使其在 kT 时刻几乎能完全包含 $x(k)$的真实值。

(8) 求该系统的相位裕度和幅值裕度。

11.7-2　习题 11.7-1 所展开的卡尔曼滤波器设计，得到了如下稳态滤波器方程：

$$q(k)=\bar{q}(k)+0.7105[y(k)-\bar{q}(k)]$$
$$\bar{q}(k+1)=0.8q(k)+0.2u(k)$$

(1) 考虑系统和滤波器为开环的情况，即状态估计并不起到反馈控制的作用。假设输入 $u(k)$为常值，且等于 10。计算随机输入 $w(k)$与 $v(k)$均为 0 时的控制对象状态 $x(k)$及输出 $y(k)$的稳态值。

(2) 在(1)问的条件下，求 $q(k)$的稳态值，即控制对象的状态估计。

(3) 稳态卡尔曼滤波器具有 $\boldsymbol{Q}(z)/\boldsymbol{U}(z)=\boldsymbol{X}(z)/\boldsymbol{U}(z)$的性质。那么，利用该性质能证实你在(1)问、(2)问中得到的结果吗？

(4) 卡尔曼滤波器需要 $w(k)$的均值为 0。假设 $w(k)$为常量，值为 5。重做(1)问和(2)问，并计算状态观测的百分比误差。

11.7-3　对于习题 11.7-1 的系统：

(1) 假设除了 $E[w(j)w(k)]=0$ 之外，其他均不变；即不存在随机控制对象干扰。设计一个卡尔曼滤波器，并从计算过程中所呈现出来的趋势估计稳态卡尔曼增益。$M(0)=2$。

(2) 写出对稳态卡尔曼滤波器的误差。

(3) 在(1)问中，稳态时 $P(k)\to 0$。因此，在稳态时状态观测的误差就趋近于 0(完美观测)。因为测量值中有噪声干扰，那么怎样能够使观测误差为 0 呢？

(4) 令$R_w=2$，$R_v=0$，重做(1)问、(2)问和(3)问。在重做(3)问时，测量值是干净的，但控制对象中混有随机干扰。

11.7-4　在习题 11.4-8 描述的卫星系统中，控制对象模型为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.125\\ 0.25\end{pmatrix}u(k)+\begin{pmatrix}0.01\\ 0.1\end{pmatrix}w(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=(1\quad 0)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}(k)$$

控制对象干扰是由地球重力场的随机波动引起的。假设$R_w=1$，$R_v=0.01$。

(1) 测量值 $y(k)$以(°)为单位，从一个稳定的平台上测得。试描述该测量值的准确性，即R_v中给出的传感器准确性的哪些信息？

(2) 像图 11-5 所示的那样，计算并绘出卡尔曼增益，其中，令 $\boldsymbol{M}(0)=\boldsymbol{I}$。

(3) 稳态误差协方差矩阵的对角元素如下：

$$\boldsymbol{P}_{ss}=\begin{pmatrix}0.00763 & -\\ - & 0.0147\end{pmatrix}$$

试评价这个卡尔曼滤波器的稳态精度。

(4) 在习题 11.4-8 给出的 LQ 设计中，稳态增益值 $\boldsymbol{K}=(0.5192 \quad 2.103)$。试写出控制-观测器的传递函数 $D_{ce}(z)$。

(5) 对于在控制对象的输入端断开后的闭环系统，计算并画出其奈奎斯特图。求相位裕度和幅值裕度。

11.7-5 这里考虑的系统是多伊尔(Doyle)与斯坦(Stein)[9]提出解释鲁棒性问题的经典系统。这类系统是模拟的；我们使用它的离散模型[11]。所选的采样周期 $T=0.006\mathrm{s}$，选得如此之小，目的是使系统离散前后，其属性近似。控制对象的离散模型如下：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0.999\,946 & 0.592\,847E-2\\ -0.177\,854E-1 & 0.976\,233\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0.178\,567E-4\\ 0.592\,847E-2\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(k)+\begin{pmatrix}0.208\,907\\ -0.383\,511\end{pmatrix}\boldsymbol{w}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(2 \quad 1)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{v}(k)$$

(1) 将该闭环系统极点配置到 $s=-7\pm \mathrm{j}2$。证明这些极点可以得到如下期望的特征方程：

$$\alpha_c(z)=z^2-1.917\,602z+0.919\,431=0$$

(2) 求将极点配置到(1)问给出的位置时所需的增益矩阵。

(3) 求 $R_w=R_v=166.67$ 时，稳态卡尔曼滤波器增益。

(4) 求控制对象传递函数 $G(z)$ 和控制-观测器传递函数 $D_{ce}(z)$。

(5) 利用(4)问的传递函数，绘出在控制对象处将信号线断开的奈奎斯特图。

(6) 求系统的相位裕度和幅值裕度。多伊尔与斯坦求得的模拟系统相位裕度接近15°。

11.7-6 对于图 11-6 所示的 IH-LQG 控制系统，假设其控制对象是单输入单输出的，因此 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 均为向量。为了确定该系统的鲁棒性，应求出在 a 点将系统断开及在 b 点将系统断开后的开环传递函数。

(1) 求在 a 点将系统断开后的开环传递函数。

(2) 求在 b 点将系统断开后的开环传递函数。

(3) 给出用于频率响应的传递函数，这是确定系统鲁棒性必须要做的。

第12章 案例研究

12.1 引言

本章组织了五个数字控制系统的案例研究，这五个案例已获实际应用。有三个案例研究基于第8章的设计方法展开，其中，前两个用的是频率响应法，第三个加入了一些经验。

案例1是一个(伺服电动机)位控系统，对该案例的研究包括设计一个相位超前控制器和一个相位滞后控制器，将两种情况下的系统响应进行对比，讨论采样率的选择，注意到控制对象的非线性问题带来的显著影响。

案例2是一个人工气候室控制系统，它由温度控制系统、二氧化碳控制系统、室内水流失监控器、外部雨水检测器和数据采集系统组成。其中，温度控制系统采用PID补偿器作为控制器、二氧化碳系统的控制器则是一台准比例补偿器。

案例3是一个美国海军陆战队战斗机自动着陆系统中的倾斜控制系统。该控制系统的控制对象是飞机倾斜动力学模型(包括横向自动驾驶仪)，是九阶的。数字控制器产生横向命令送给自动驾驶仪，飞机的位置由相控阵雷达确定。该系统会遭受很强的噪声和干扰的侵袭，因此必须进行控制器设计，所用控制器是一台PID补偿器加上一个用于降低噪声影响的滤波器。

案例4涉及对放置新生婴儿的恒温箱进行氧气输送的控制，采用PID设计方法。该案例研究将给出多种系统组合的模式，探讨并评估采样率对系统性能的影响，用MATLAB pidtool()函数进行补偿器的设计。

案例5是通过系统辨识的方法实现对大功率系统网络的一个部分进行建模的问题。介绍如何用MATLAB的电力系统分析工具箱(PSAT)进行系统仿真，以及如何用CVX软件实现系统的凸优化。

12.2 伺服电动机系统

这一节，我们讨论基于数字控制的伺服电动机系统[1]的设计问题。该系统是低阶的，无需特别的设计，实施上也不困难。但是，非线性问题对该系统带来的影响比较大，我们会重点讨论之。

伺服电动机控制系统框图如图12-1所示，图12-2给出了它的硬件结构。承担该系统数字控制器工作的设备选用Texas Instruments TI9900型微处理器系统[2]，它是为数不多的可用于系统设计的16位处理器之一、具备实现乘法运算的硬件并提供软件支持。图12-1所示的终端模块选用的就是一个Texas Instruments微终端[2]，用来进行系统的初始化、改变滤波器参数(如果需要)、测试系统的运行情况等。

计算机内部的数据(数字)采用定点格式，如图12-3所示。其分数部分和整数部分的数字均有16位，因此，数据范围的最小值(非零)[3]和最大值分别为

$$2^{-16} = 0.000\,015$$

$$(2^{16}-1)_{\text{integer}} + (1-2^{-16})_{\text{fraction}} = 65\,535.999\,985$$

本例不需要使用32位的精度。做出如此选择的原因是便于数据处理且处理时间充裕。此外，将符号标志位放置在数据整数部分的外部也是出于方便乘法运算的考虑。按照乘法硬件的要求，滤波器系数以大小格式存储。

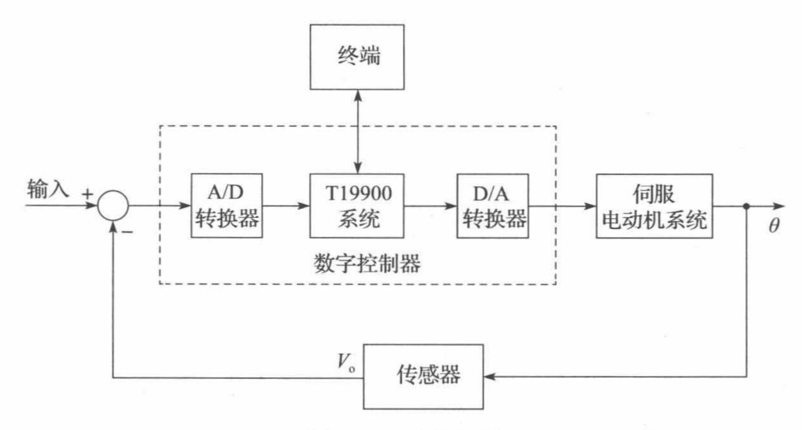


图 12-1 系统框图

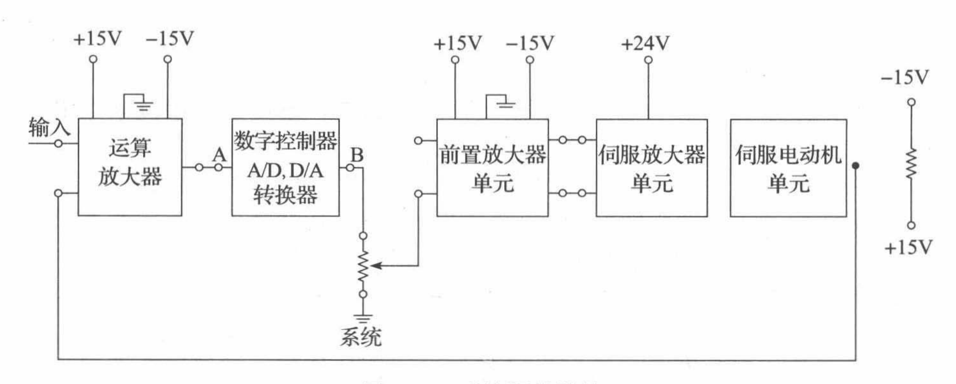


图 12-2 系统硬件结构

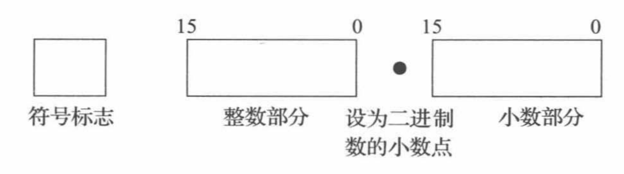


图 12-3 计算机数据格式

1. 系统模型

用数学的方法为该系统建模得到图 12-4 所示框图。

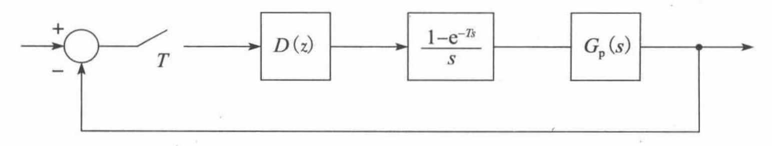


图 12-4 控制系统模型

系统设计的第一步：确定控制对象传递函数$G_p(s)$。为了用实验的办法获得$G_p(s)$，删除图 12-2 所示系统中的包括 A/D 转换器和 D/A 转换器的数字控制器，即将图中的 A、B 点直接相连。由于伺服电动机为直流电枢控制型，可将该控制对象的传递函数设为[4]：

$$G_p(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\delta\omega_n)} \tag{12-1}$$

闭环传递函数则为：

$$T(s)=\frac{G_p(s)}{1+G_p(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{12-2}$$

由此可得系统的频率响应：

$$T(\mathrm{j}\omega)=\frac{\omega_{\mathrm{n}}^{2}}{(\omega_{\mathrm{n}}^{2}-\omega^{2})+\mathrm{j}2\delta\omega_{\mathrm{n}}\omega} \tag{12-3}$$

为了用实验的办法得到系统模型，对系统外加一个正弦信号，调整信号频率，直至系统的输出在相位上滞后输入 90°。由式(9-3)可以看出，使输出滞后输入 90°的频率等于 ω_{n}，然后，用此频率下的响应幅值算出 δ，使传递函数为：

$$T(s)=\frac{36}{s^{2}+3.6s+36} \tag{12-4}$$

接下来，我们用实验的办法确定采样周期 T。有一个获得成功应用的准则是使 T 近似等于系统上升时间的 1/10[5,6]。经实验得到该系统的阶跃响应如图 12-5 所示，可以看出，该系统的上升时间约为 0.3s，因此，我们将采样周期选为 30ms。

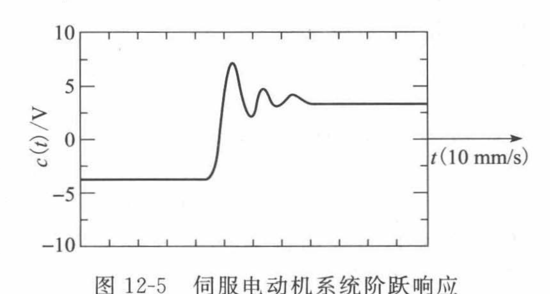


图 12-5 伺服电动机系统阶跃响应

下面对这个采样周期组织测试。我们将微处理器接入环路，如图 12-1 所示，为计算机编程使其增益为简单的 1(即 A/D 转换器、计算机和 D/A 转换器仅履行采样器和零阶保持器的功能)，30ms 左右选几个采样周期，运行系统，得到系统的阶跃响应如图 12-6 所示。

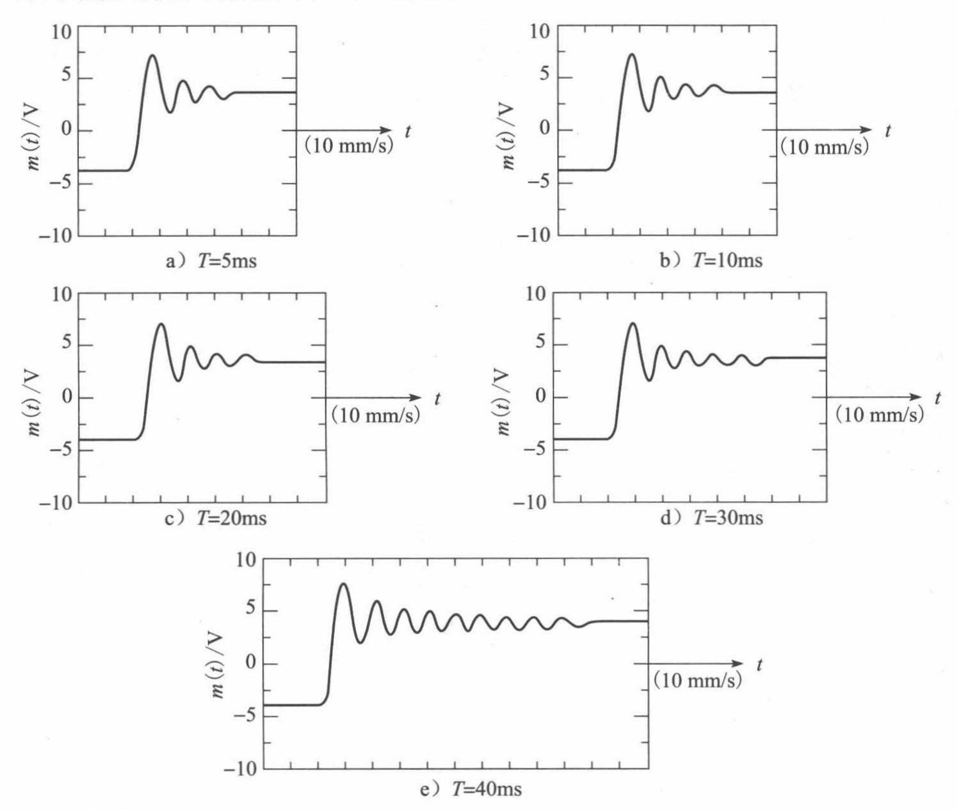


图 12-6 不同采样周期下的伺服电动机阶跃响应

可以看出：(1)采样周期取 5ms 时的响应非常接近模拟系统的响应(见图 12-5)；(2)采样周期取 40ms 时，系统正在步入不稳定状态。不过，小幅度的振荡指示的是一种非线性的效应，因为一般来讲，阶跃输入对线性系统引发的振荡具有近似阶跃的幅度。经研究发

现该系统通常因饱和引发跳跃式非线性振荡[7]，还发现跳跃式振荡会在这种数据采样系统[8]中产生极限环。于是，确定该系统采样率的依据不是线性采样理论而是系统的非线性。应该指出，伺服系统的设计通常是使伺服放大器在大部分时间内处于饱和状态，在这段时间内，伺服电动机的输入电压最大，以确保最大的响应速度。

通过对图 12-6 所示系统中各阶跃响应的考察，我们选 $T=5\text{ms}$。根据式(12-2)和式(12-4)，解出：

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{36}{s(s+3.6)} \tag{12-5}$$

代入选定的 T 值，得：

$$G(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{36(1-\mathrm{e}^{-Ts})}{s^{2}(s+3.6)}\right]=\frac{0.000\,447\,31z+0.000\,447\,39}{z^{2}-1.982\,161z+0.982\,161} \tag{12-6}$$

于是得闭环传递函数为：

$$\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.000\,447\,31z+0.000\,447\,39}{z^{2}-1.981\,714z+0.982\,608} \tag{12-7}$$

请注意其中的数值计算问题。在低频段（$z=1$ 附近），系统的频率响应主要取决于分子系数的最后一个数字位，于是会存在因数值计算导致的不精准问题，究其原因，往往是相对于系统的固有频率，采样频率选的过大了。为了依据式(12-6)和式(12-7)算出频率响应，数值精度要大于必须使用的精度。不过用式(7-23)来获得频率响应该能够规避这一问题。

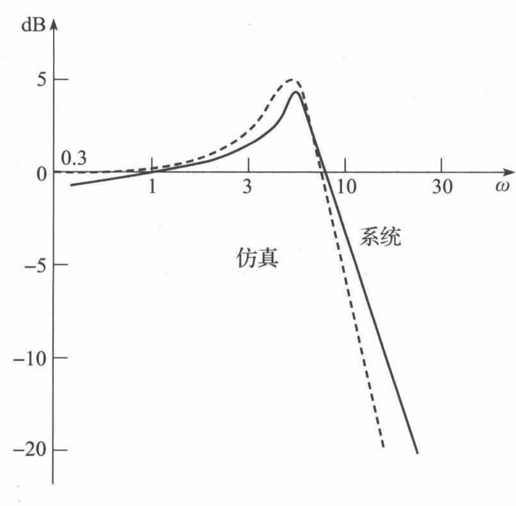


图 12-7　闭环频率响应

$D(z)=1\text{s}$，$T=0.005\text{s}$

图 12-7 同时给出了系统频率响应的测试结果和计算机仿真结果，后者是针对线性思维模拟系统进行的。

共振峰附近的系统频率响应实际上具有双值，这是跳跃共振效应[7]所致，但显示的是单值。因图中的两条曲线均经试验获得，因此被绘制成关于 s 平面实数频率的曲线。w 平面的频率根据式(7-10)算出：

$$\omega_{w}=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \tag{12-8}$$

2. 设计

由式(7-23)获得的频率响应 $G(z)$ 的曲线绘于图 12-8 中。

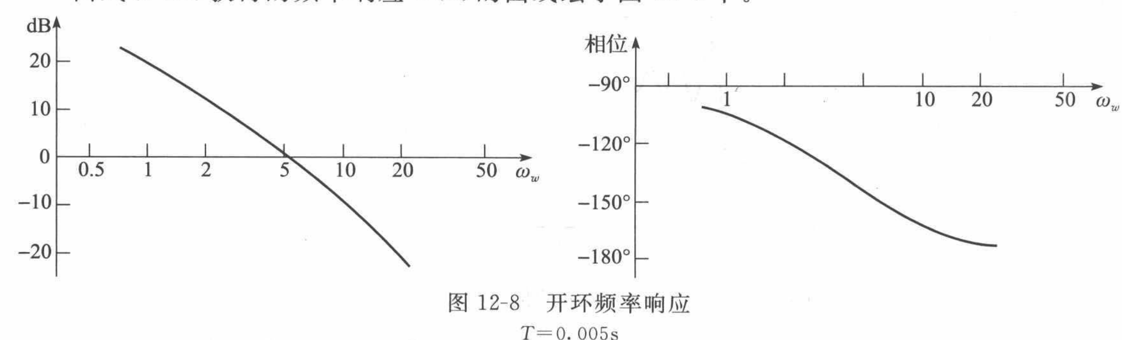


图 12-8　开环频率响应

$T=0.005\text{s}$

正向第 8 章所述，相位超前设计主要伴随试验和误差分析。用第 8 章的方法得到的相位超前滤波器的传递函数为：

$$D(w)=\frac{0.693(1+w/2.21)}{1+w/44.8} \tag{12-9}$$

于是据式(8-14)，得：

$$D(z)=\frac{12.74z-12.6}{z-0.798} \tag{12-10}$$

计算机算式为：

$$m(nT)=12.74e(nT)-12.6e(nT-T)+0.798m(nT-T)$$

由此算得的相位裕度为 80°，图 12-9 给出的是系统闭环频率响应，图中的两条曲线均以实验的方法获得，带有滤波器的模拟系统的计算机仿真系统是线性的。两条靠得很近的曲线意味着该系统受到的非线性影响比较小。图 12-10 给出的是系统的阶跃响应。

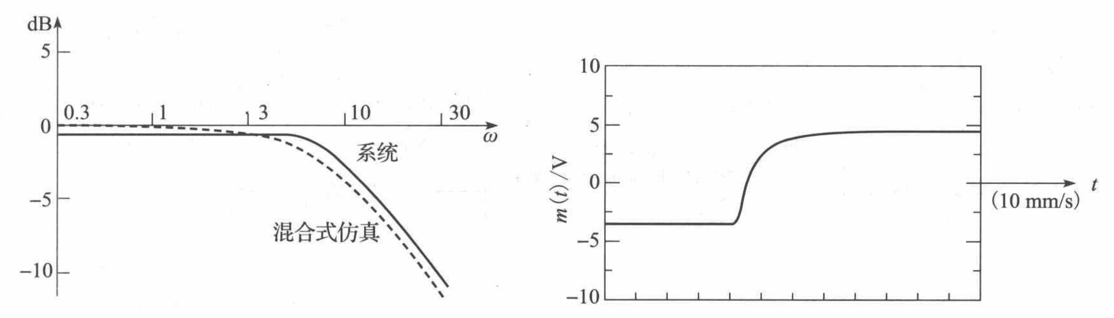


图 12-9　经相位超前补偿的闭环频率响应　图 12-10　经相位超前补偿的伺服电动机系统的阶跃响应

$T=5\text{ms}$

用第 8 章的方法，还设计出了相位滞后滤波器，其传递函数为：

$$D(w)=\frac{1.36(1+w/0.20)}{1+w/0.044} \tag{12-11}$$

于是得：

$$D(z)=\frac{0.3z-0.2997}{z-0.99978} \tag{12-12}$$

计算机算式为：

$$\begin{aligned}y(nT)=&\ 0.3x(nT)-0.2997x(nT-T)\\&+0.99978y(nT-T)\end{aligned}$$

得到的系统相位裕度为 60°。通过实验的办法得到的频率响应曲线绘于图 12-11 中，可以看出，两条曲线差异很大，这意味着系统的非线性效应比较大。图 12-12 给出的是该系统的阶跃响应。

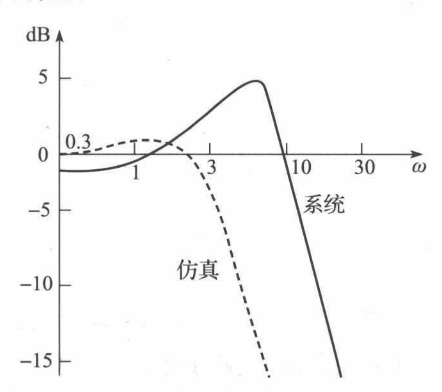


图 12-11　带有相位滞后补偿的闭环系统的频率响应

$T=5\text{ms}$

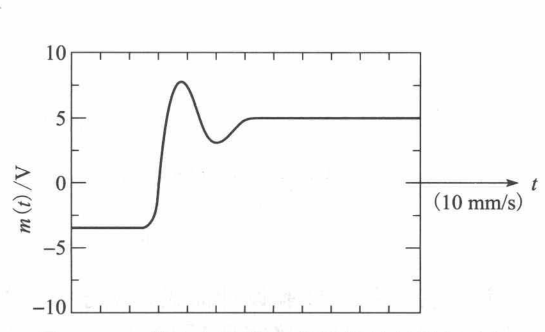


图 12-12　带有相位滞后补偿器的伺服电动机系统的阶跃响应

$T=5\text{ms}$

12.3　人工气候室控制系统

本节介绍的案例研究是一种为研究植物生长所设计的人工气候室数字控制系统[9]。室内有两个控制系统，一个用于干球温度的控制，另一个用于控制室内气体中二氧化碳(CO_2)的含量。这个气候室是一间有机玻璃房，体积约为 $0.7\times1.3\times2\ m^3$，采取了密封措施以便于室内水分含量和二氧化碳含量的准确监测。

图 12-13 给出的是温度控制系统的硬件描述。温控室采用空调制冷以使加热器保持在所期望的温度上。因此，加热器是闭环系统的控制元件，电阻桥输出取决于所用的温度传感器，是毫伏级的电压，运算放大器使其输出幅度提高到±5V，这是 A/D 转换器需要的电压范围，然后，用存储于 TMS9900 型微机系统中的期望温度减去所测温度形成误差信号，再经 TMS9900(系统补偿)处理后，产生一个信号送到加热器接口处，加热器接口是一个复杂的逻辑电路[9]，该电路将计算机输出信号转换成双向晶闸管[10]的控制脉冲，双向晶闸管实际上是通过控制作用于加热器上的均方根电压，使电能量进入到加热器中。

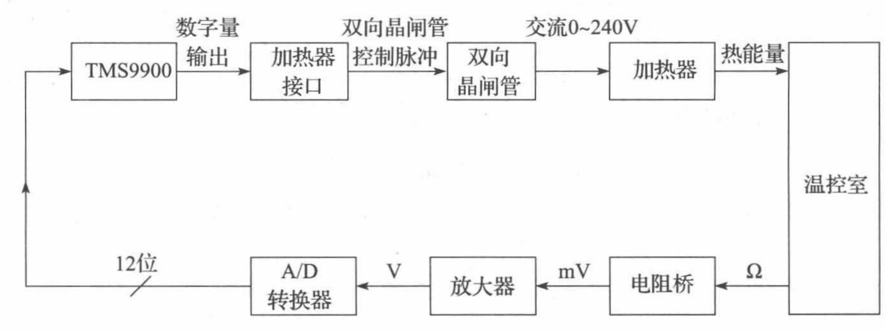


图 12-13　室温控制硬件结构图

二氧化碳控制系统的硬件描述如图 12-14 所示。室内有一台气体分析仪，用于测量室内空气中的二氧化碳质量分数($\times10^{-6}$)，然后，将这个信号与期望值进行对比，形成误差信号，如果该误差信号为负，则表示二氧化碳量不足，这时，计算机将打开提供二氧化碳的电磁阀，打开时间的长短取决于误差的大小。该控制系统不具备移除多余二氧化碳的能力。由于气体分析是时间滞后的，所以该控制系统的采样率不能大于 0.0222($T=45$s)。另外，该系统虽未经补偿，(稍后会看到)其控制效果似是令人满意的。

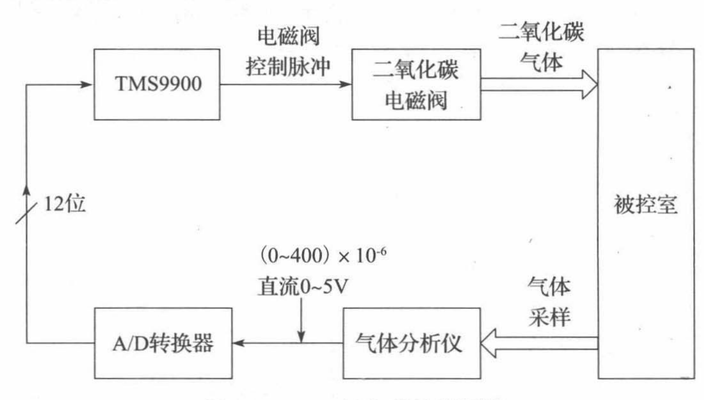


图 12-14　二氧化碳控制硬件

该温控系统凭经验设计而成。鉴于该系统过于复杂，在此，我们没有试图去推导控制对象的模型。而是直接将阶跃信号送入加热器，观测温度传感器输出端的响应，结果发现，加热器的温度近似呈指数规律变化，时间常数为 60s，于是我们首次试着将采样周期取为 6s。

凭借设计经验，选用一台 PID(比例＋积分＋微分)控制器来执行设计任务(见第8章)。这个 PID 控制器的模拟形式表述如下：

$$m(t)=K_{\mathrm{P}}e(t)+K_{\mathrm{I}}\int e(t)\mathrm{d}t+K_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{12-13}$$

式中：$e(t)$是控制器的输入；$m(t)$是控制器的输出。

选用如下方案将积分器离散化(见式(8-34))：

$$m_{\mathrm{i}}(k)=\frac{T}{2}[e(k)+e(k-1)]+m_{\mathrm{i}}(k-1) \tag{12-14}$$

再将微分器离散化(见式(8-37))：

$$m_{\mathrm{d}}(k)=\frac{1}{T}[e(k)-e(k-1)] \tag{12-15}$$

因此，式(12-13)的离散控制器的实现方案如下：

$$m(k)=K_{\mathrm{P}}e(k)+K_{\mathrm{P}}m_{\mathrm{i}}(k)+K_{\mathrm{D}}m_{\mathrm{d}}(k) \tag{12-16}$$

由如上方程可明显看出，有4个参数待定，它们是 T，K_{P}，K_{I}和 K_{D}。如果能够选出一个合适的 T，使微分关系和积分关系均得以精准实现，那么参数 K_{P}，K_{I}和 K_{D}将与 T 无关。

在着手控制器的设计之前，应为温控系统选择硬件。在许多应用中，控制系统设计者要找出硬件约束的预定义，对预选硬件进行学习，以使所做选择从设计方案到技术实现均适合待设计的系统。就加热器而言，有大质量慢响应和小质量快响应两种规格，其中，慢响应加热器会增加系统的相位滞后，因此是不可取的。随后对物理系统进行实验，以对控制器做出具体选择(见图 12-15)。图中，PID 控制器增益 P1，I1 和 D1 分别与 K_{P}，K_{I}和 K_{D}等效，$c_1(k)$是快响应型加热器的控制信号，$c_2(k)$是慢响应型加热器的控制信号。实验中，对$c_1(k)$和$c_2(k)$分别执行不同的 PID 控制器增益。这种控制器方案与用一个信号控制两个加热器的方案相比，前者所导致的系统响应更佳。

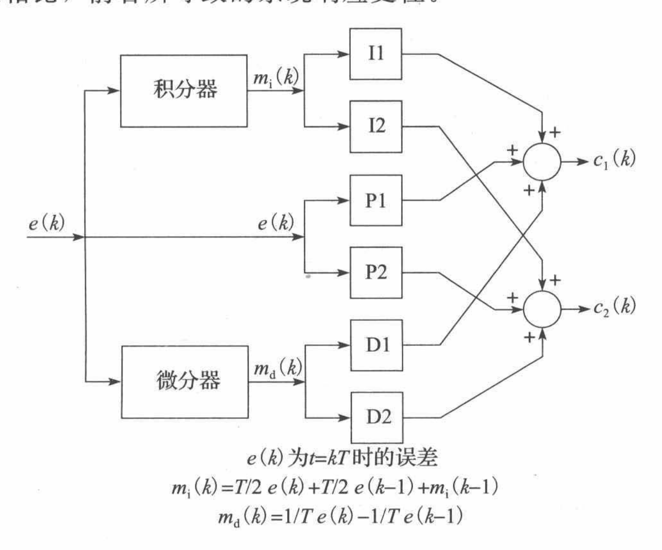


图 12-15 PID 控制器执行框图

为确定控制器的增益，首先令控制器仅执行比例控制，改变图 12-15 中的 P1 和 P2，图 12-16 给出了 P1 和 P2 均取 25 时的阶跃响应。

由该响应曲线反映出来的小的振荡是空调周期性开-关所致。控制系统接到从 25°C 到 35°C 这一 10°C 的阶跃命令。请注意图 2-16 示出的系统稳态误差。在上述测试中，采样周期(图 12-16 中的 Ts)也是变化的，图 2-16 给出的是 $T=1\mathrm{s}$ 时的情况，实验发现，T 改选 1s 以下的数值时，未使系统响应得到明显改善。

接下来，将积分项加入到控制器中，得到图 12-17 所示的代表性的阶跃响应。正如所

预期的，这时系统不再有稳态误差(见 8.9 节)。最后将微分项加入控制器，得到图 12-18 所示的代表性的阶跃响应。

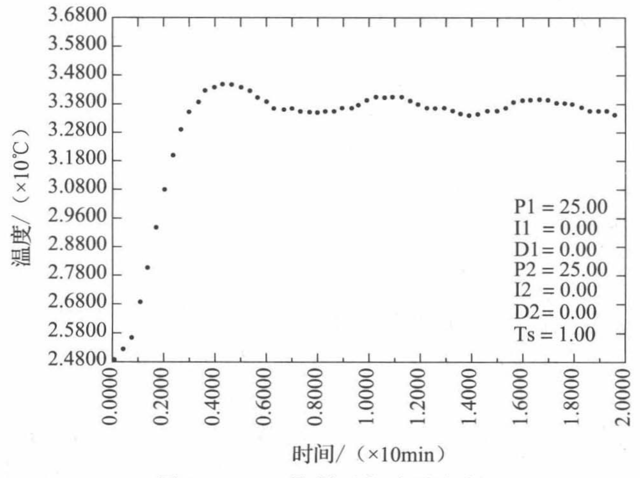


图 12-16　P 控制下的阶跃响应

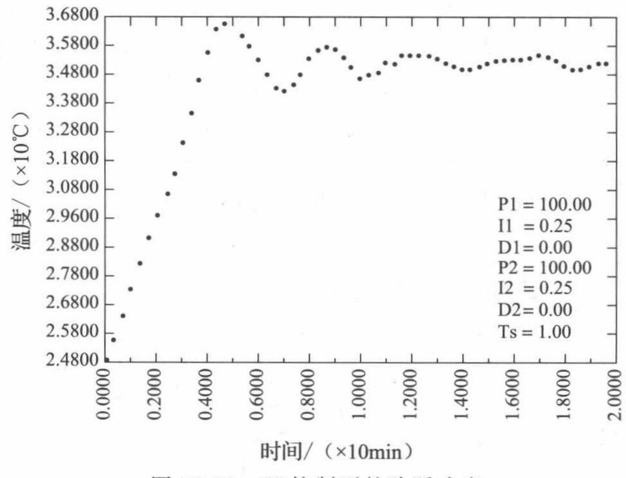


图 12-17　PI 控制下的阶跃响应

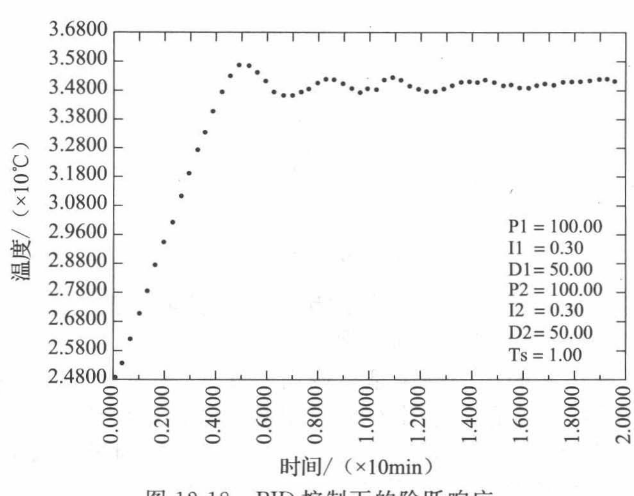


图 12-18　PID 控制下的阶跃响应

请注意，此 PID 控制器并未改进系统的上升时间，究其原因，应该是面对大的误差信号，无论是使用 P 控制还是使用 PI 控制，加热器均工作到了极限，这是一种非线性的效应，就是说，在大的误差信号下，系统因非线性问题而无法做出快速响应，与控制器采用的控制策略无关。不过，面对小的信号(如小超调)，控制器中的微分项会对信号的变化趋势做出预测，并发挥一定的控制作用(通常的线性行为)。

在上述所有的实验中，对两台加热器均实施小信号控制。当试着将微分项增加到一定的数值之上之后，发现系统出现了不稳定的趋势。这一现象是预料之中的，原因是 PID 控制器所带来的最大超前相位角为 90°，而理论上其增益可以无限度地增加。在这点上，令快速加热器的 PID 增益不同于慢速加热器的 PID 增益，以降低超调量和稳定时间，最终的选择结果是：P1＝100，I1＝0.3，D1＝100，P2＝25，I2＝0.25，D2＝25 以及 Ts＝1s。

图 12-19 给出了一个典型的 24h 系统响应。午夜的时间定为 0。因植物在夜间释放二氧化碳，故二氧化碳控制系统仅于白天实时控制。对于这个数值，命令温度跟随一个三角波的变化而变化，这是对 24h 期间实际温度变化的近似。

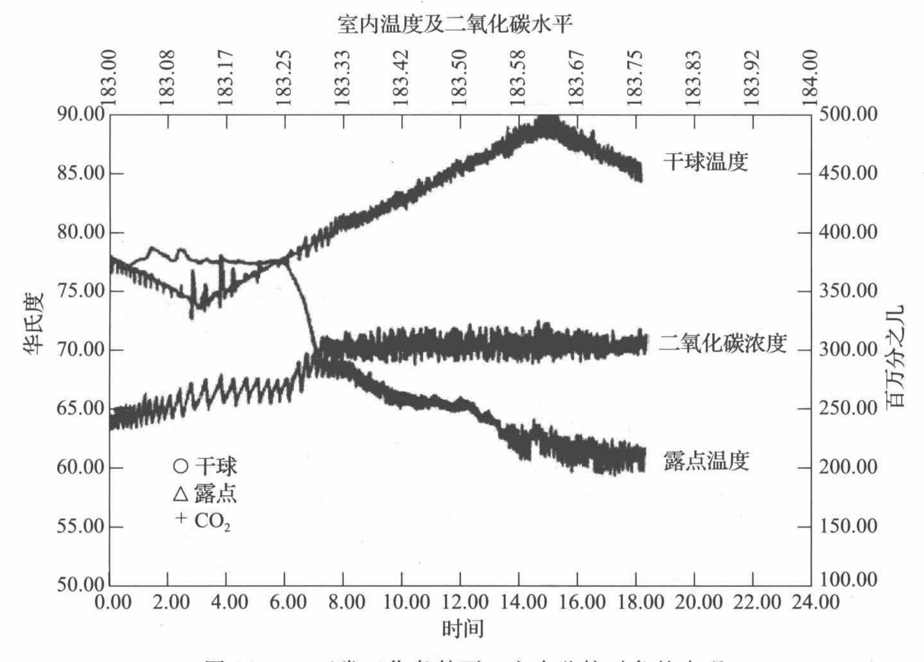
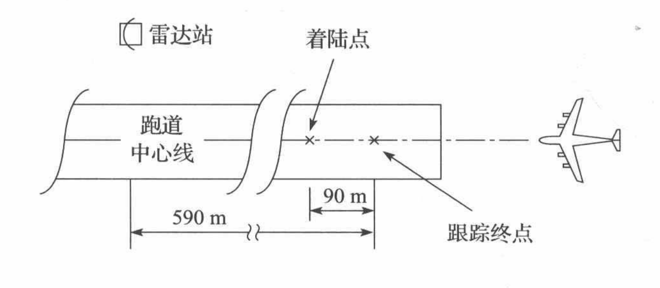


图 12-19　正常工作条件下，室内监控对象的表现

12.4　飞机着陆系统

本节讨论一种飞机自动着陆系统，即一种海上空中交通管制和着陆系统(MATCALS)[12,13]，如图 12-20 所示。其中，作为控制系统传感器的雷达使用一种相控阵天线，这种雷达波束能够在高达 40Hz 采样率下对若干架飞机进行快速重新定位控制。设计者在设计这种控制系统时，必须面对的问题是：这种由雷达系统提供的信息会被大噪声损坏。

对系统的控制操作由两个相互独立的控制系统来执行，即纵向控制系统和横向控制系统。纵向控制系统使飞机持续位于 3.5°的下滑台上；横向控制系统使飞机保持在跑道中心线的延伸线上，图 12-21 给出了这两个系统说明图。有两个相互独立的计算机算法供这两个系统使用。第一个算法处理天线回传的信号，以确定飞机相对于跑道着陆点的位置(飞机质心位置)，第二个算法构建用于描述控制器的差分方程。控制器的输出通过数据链传送给飞机并恰当地作用于驾驶仪的输入端，即纵向控制系统的俯仰自动驾驶仪和横向控制系统的倾斜自动驾驶仪。



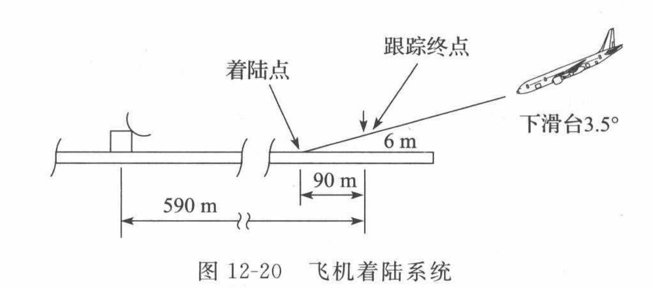


图 12-20　飞机着陆系统

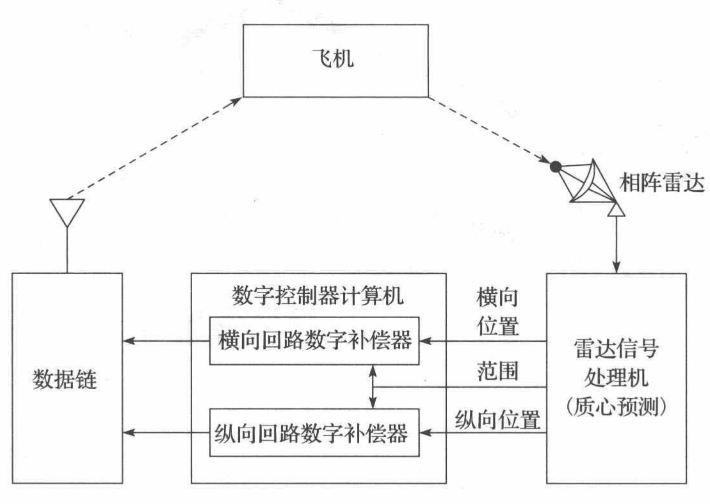


图 12-21　MATCALS 自动着陆控制回路

在接下来的讨论中，我们仅给出横向控制系统的设计，纵向控制系统的设计与其类似。

1. 控制对象模型

横向控制系统的框图如图 12-22 所示。横向飞机动力学模型(含自动驾驶仪)用传递函数$G_L(s)$描述，其典型的频率响应如图 12-23 所示。诚然，该模型与飞机有关，比如，对 McDonnell 航空公司的 F4J 型飞机进行飞行测试，所得频率响应如图 12-24 所示。飞机的横向运动方程，对于 F4J 来说是九阶的(包括自动驾驶仪)，在此不做研究(见文献[15])。由图 12-24 所示$G_L(j\omega)$的幅度曲线中-40dB 的斜率可以推知，$G_L(s)$在原点处具有一个二阶的极点。

图 12-25 给出了 F4J 型飞机横向控制系统的奈奎斯特图，从中同样可以得出基于图 12-24所示的关于$G_L(s)$的极点的结论。由于携带自动驾驶仪的飞机(开环系统)必须稳定工作，因此显然要做的是，使用相位超前补偿消除曲线对-1点的环绕，以确保系统的稳定。

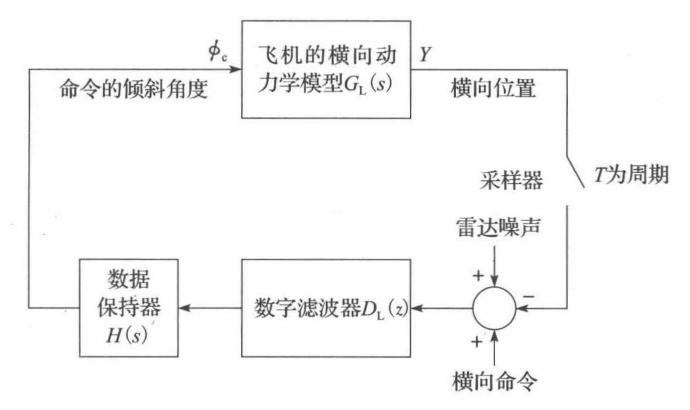


图 12-22　横向控制回路

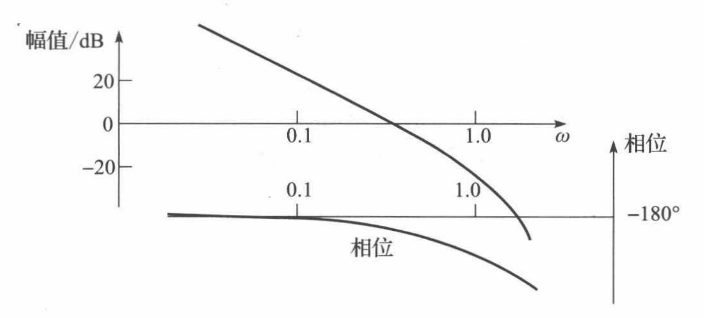


图 12-23　$G_L(s)$典型的频率响应

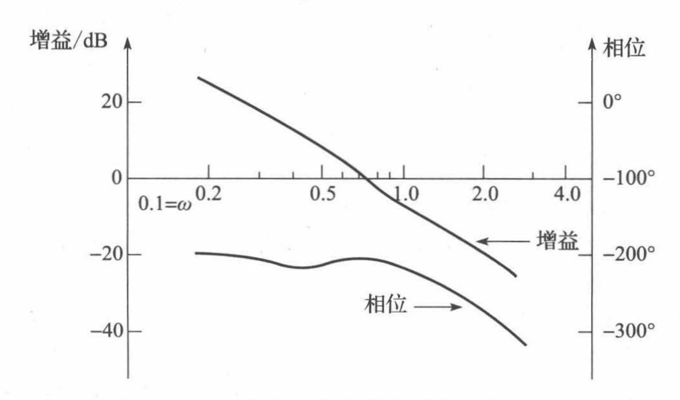


图 12-24　F4J 型飞机的横向频率响应(Y/ϕ_c)

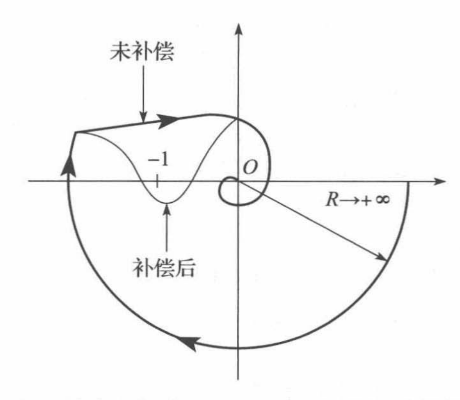


图 12-25　$G_L(s)$的奈奎斯特图及$G_L(s)$经补偿后可能的奈奎斯特图

2. 设计

在飞机的横向控制系统中，存在三种明显的干扰源，在系统设计中必须要考虑到它们。第一种是雷达噪声(见图 12-22)，另两种噪声直接输入到飞机的横向动力学模型上，应当首先考虑这两种噪声。每一种噪声都有自己的模型(见图 12-26)，由图 12-26所示系统，可以写出噪声对横向位置 $y(t)$的影响式为：

$$Y(z)=\frac{\overline{G_{\mathrm{D}}U}(z)}{1+D(z)G(z)} \qquad (12\text{-}17)$$

式中：

$$G(z)=\mathscr{Z}\left[\frac{1-\varepsilon^{-Ts}}{s}G_{\mathrm{L}}(s)\right] \qquad (12\text{-}18)$$

正像前面讲述的，$G_{\mathrm{L}}(s)$在 $s=0$ 处有两个极点，因此，$G_{\mathrm{L}}(z)$在 $z=1$ 处有两个极点。

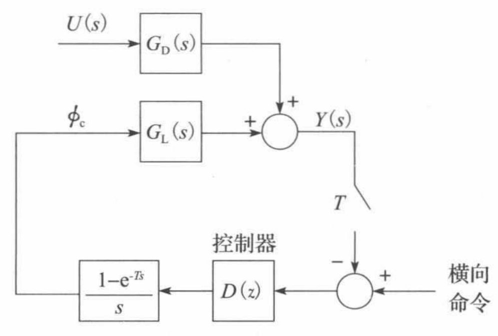


图 12-26　带有干扰的横侧向控制系统

式(12-17)把一种干扰记为 $U(s)$，它造成自动驾驶仪的速率陀螺仪输出中有相对恒定的偏差(称为直流偏置)。可以把这个偏差视为一种系统的输入。请注意，一般来讲，图 12-26 所示系统中干扰的恒定输入会导致稳定状态下恒定的输出 $y(t)$，于是使飞机的着陆点偏离跑道中轴，这是不允许的。因此要求终值定理用于式(12-17)时，该式应取值为 0，即

$$\lim_{k\to+\infty}y(k)=\left.\frac{(z-1)\,\overline{G_{\mathrm{D}}U}(z)}{1+D(z)G(z)}\right|_{z=1}=0 \qquad (12\text{-}19)$$

式中：$U(s)=1/s$。

这时，图 12-26 所示系统中的$G_{\mathrm{D}}(s)$和$G_{\mathrm{L}}(s)$共有两个位于 $s=0$ 的极点，于是$\overline{G_{\mathrm{D}}U}(z)$有 3 个位于$z=1$的极点，$G(z)$有两个位于 $z=1$ 的极点。如果 $D(z)$再给出 1 个位于 $z=1$ 的极点，则式(12-19)得以满足，因此该系统需要使用 PI(比例-积分)控制器。另外，正如我们在图 12-25中看到的，为了使系统稳定，需要进行相位超前补偿，而 PID 控制器中的微分项具有相位超前的作用[见式(8-47)]，因此，我们选择 PID 控制器来对系统进行补偿。图 12-27给出了经补偿系统的奈奎斯特图。

图 12-26 所示干扰的第二种来源是风。我们期望飞机对风的输入没有响应，这显然是不可能的。因此，我们期望用控制器来降低风的影响。我们还是把风干扰造成的影响看成图 12-26 及式(12-17)所示的模型。当然，对于风干扰和直流偏置干扰来说，$G_{\mathrm{D}}(s)$是不同的。由式(12-17)可以看出，如果在风(湍流)这种输入信号的频率范围内 $D(z)G(z)$变大，其响应则变小。由于 $G(z)$的频率响应是固定的，因此希望靠 $D(z)$来加宽频带。正如第 8 章谈到的，PID 控制器的微分环节不仅可以引入相位超前，还可以提高系统的带宽，因此需要使微分环节具有高增益。

第三种干扰源是雷达系统输出信号中掺杂的噪声(见图 12-22)。请注意，雷达噪声对系统的作用点与横向位置命令信号的作用点相同，于是，所设计的系统如果对命令输入具有良好响应，则对雷达噪声的响应也同样积极，因此雷达噪声的响应是系统设计的一个主要问题。对于基于航空母舰的系统[16]，使用的是抛物面雷达天线系统，来自这种类型天线系统的信号几乎没有噪声，因此，噪声问题不像飞机着陆系统那样重要。

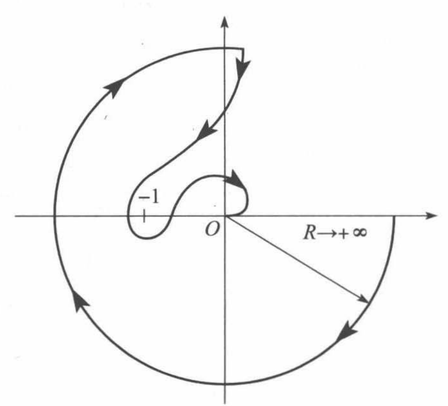


图 12-27　横向控制系统的奈奎斯特图

α-β 滤波器　为了降低雷达噪声的影响，可以选用一种 α-β 跟踪滤波器[17]对作用于控制器输

入端的雷达信号进行滤波处理(α-β 滤波器公式在习题 2-21 中给出)。设计该种滤波器，以对给定的含噪声雷达系统的输出信号，估计出飞机的横向位置信号 $y(k)$ 和飞机的横向速度信号 $\dot{y}(k)$。然后，将估计的 $y(k)$ 送入 PID 补偿器的位置通道和积分通道，将估计的 $\dot{y}(k)$ 送入 PID 补偿器的微分通道，如此 PID 补偿器结构如图 12-28 所示。

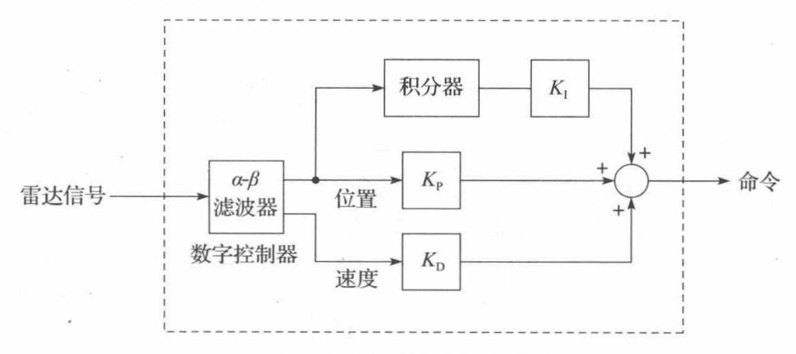
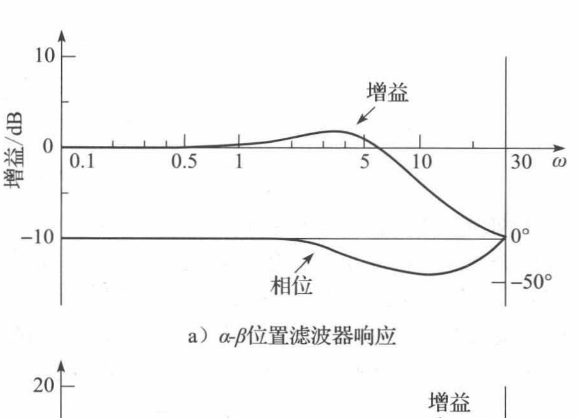
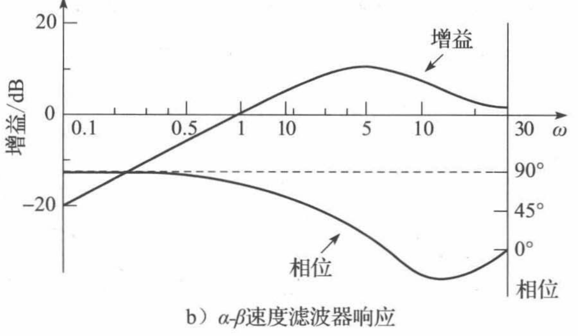


图 12-28 控制器的基本形式

α-β 滤波器的实数频率 ω 的频率响应曲线如图 12-29 所示，其中，采样周期 $T=0.1$s，于是，$\omega_s/2=31.4$rad/s。注意，图 12-29a 给出的位置滤波器在低频段的增益为 1，无相移，但会抑制高频噪声；图 12-29b 给出的速度滤波器在低频段为一段每 10 倍频程上升 20dB 的斜线，这是精确微分器的表现，而相位特征则不同，精确微分器相位恒等于 90°，图中速度滤波器的相位则不然，该滤波器也会抑制高频噪声。图中曲线对应的 $\alpha=0.51$，$\beta=0.1746$，这是 F4J 型飞机的控制器所用的参数取值。



a) α-β位置滤波器响应



b) α-β速度滤波器响应

图 12-29

α 滤波器 在本系统中，α-β 滤波器所具有的降噪特点对雷达噪声的抑制还不够充分。为了进一步降低雷达噪声，我们在 PID 控制器的不同点加入一种称为 α 滤波器[16]的低通滤波器，α 滤波器的传递函数为：

$$D_\alpha(z)=\frac{\alpha z}{z-(1-\alpha)} \quad (12\text{-}20)$$

图 12-30 给出了 α 滤波器在 $\alpha=0.234$、$T=0.1$s下的频率响应，该滤波器也被 F4J 控制器所使用。像通常用到的低通滤波器一样，该滤波器也为系统增加了相位滞后，从图 12-27 给出的系统奈奎斯特图可以看出，相位滞后一直是主要的设计问题，因此，最终的设计结果一定包括在期望的稳定裕度与雷达噪声抑制之间做权衡。

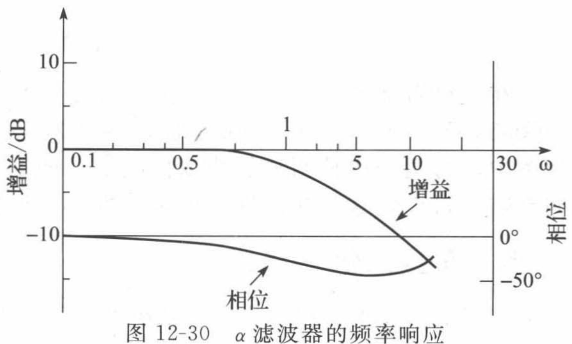


图 12-30 α 滤波器的频率响应

按照要求形成的滤波器最终设计结果

如图 12-31 所示。考虑到由微分项所产生的相位超前的量不太够用，将一个附加的微分器加到 $\dot{y}(k)$的通路上，以由此产生一个附加的相位超前，该微分器具有如下的传递函数[见式(8-38)]：

$$D_a(z) = \frac{z-1}{Tz} \tag{12-21}$$

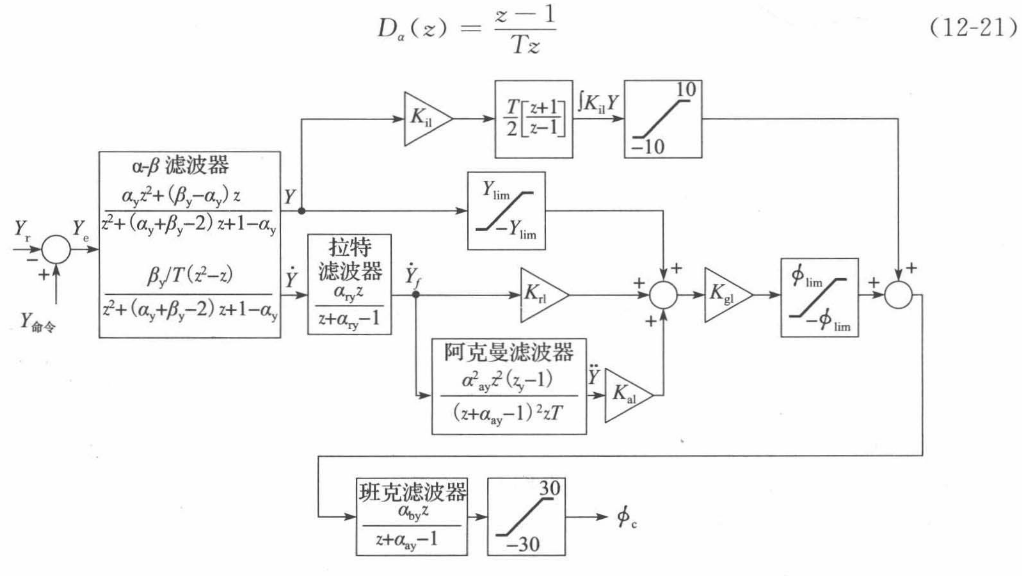


图 12-31　横向控制系统控制器

由于对噪声信号的微分会放大高频的噪声，因此需要在这个通道上加入两段 α 滤波。在正常的系统运行期间，不会出现滤波器的非线性问题。极限值ϕ_{lim}和Y_{lim}及图中给出的各增益均是飞程的函数，各增益将随着与着陆点的接近而增大，到飞行的最后 1500m 不再改变 F4J 型飞机使用的横向控制器对实时频率 ω 的频率响应，如图 12-32 所示。除了高频段增加了衰减以减少噪声的影响之外，我们由此图见到的是标准 PID 滤波器的频率响应。

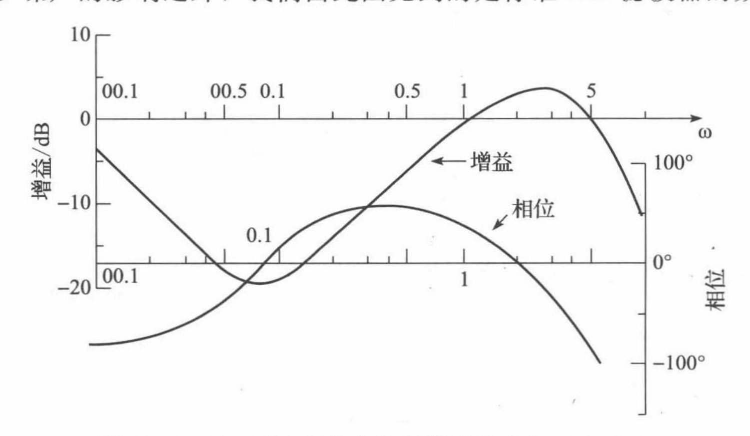


图 12-32　F4J 型飞机横向控制器频率响应，$T=0.1\mathrm{s}$

在飞机着陆前 1500m 之内的飞行中，控制器的通道增益确定为：$K_{\mathrm{P}}=0.1$，$K_{\mathrm{I}}=0.0033$，$K_{\mathrm{D}}=0.75$，$K_{\mathrm{A}}=0.1$(加速通道)，另有相位裕度 60°、增益裕度 8dB。在横向控制系中，有两个比较明显的非线性问题，即副翼和方向舵机械转动的极限。在高风湍流下的着陆，将出现这些非线性，稳定特性也将退化。

12.5　新生儿供氧系统

本案例研究用于新生儿供氧系统的反馈控制器的性能。首先，我们复现了陶比(Taube)

等人的模型及闭环系统[20-22]如图 12-33 所示。然后用 MATLABPID 工具包设计三个不同采样间隔下的 PIDF 控制器，给出 PIDF 控制器设计结果与陶比的原创设计的对比。

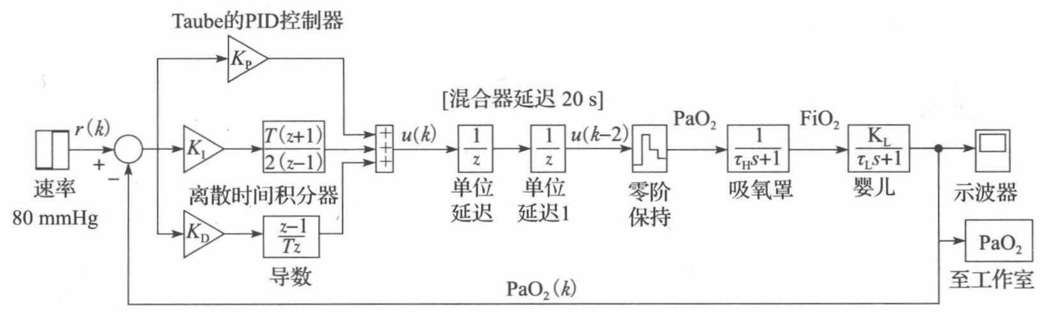


图 12-33 Simulink 软件闭环系统模型

1. 控制对象的传递函数

该模型的主要依据是塞诺(Sano)及菊池(Kikuchi)模型[23]，塞诺及菊池模型使用了如下假设：

1）吸氧率和耗氧量恒定不变；

2）身体内的气体混合和吸入氧气瞬间完成；

3）呼吸交换律恒定，呼吸交换律是指一次呼吸中吸入的氧气分子数量与呼出的二氧化碳分子数量之比。

关于控制对象的模拟模型，我们按照文献[20]的做法，将混合器、吸氧罩和婴儿分开考虑。三者的传递函数分别如下。

$$\text{对于混合器：}\quad G(s)_{\text{Blender}} = K_{\text{b}}\mathrm{e}^{-T_{\text{b}}s} \tag{12-22}$$

式中：指数项代表氧气输送中的混合器时间延迟因子；K_{b}是氧气混合器的增益。

文献[20]给出了他们的实验结果：$K_{\text{b}}=1.0$，$T_{\text{b}}=20\text{s}$。

$$\text{对于吸氧罩：}\quad G(s)_{\text{Hood}} = \frac{1}{1+\tau_{\text{H}}s} \tag{12-23}$$

式中：τ_{H}是吸氧罩的时间常数。

用来表示氧气从混合器到吸氧罩所历经的时间量。文献[20]使用的是$\tau_{\text{H}}=55\text{s}$。

$$\text{对于婴儿：}\quad G(s)_{\text{Baby}} = \frac{K_{\text{L}}}{1+\tau_{\text{L}}s} \tag{12-24}$$

式中：K_{L} 是肺转移率；参数τ_L 为肺的时间常数。

用来表示肺部被动呼出一定量的空气所需要的时间的常数，它与肺部初始的空气量无关。据文献[20]，$K_{\text{L}}=90$，$\tau_{\text{L}}=12\text{s}$。

至此，可得控制对象完整的模拟传递函数为：

$$G_{\text{p}}(s) = \frac{K_{\text{L}}K_{\text{b}}\mathrm{e}^{-T_{\text{b}}s}}{(1+\tau_{\text{H}}s)(1+\tau_{\text{L}}s)} \tag{12-25}$$

将全部已知常数代入上式，得：

$$G_{\text{p}}(s) = \frac{90\mathrm{e}^{-20s}}{(1+55s)(1+12s)} = \frac{(3/22)\mathrm{e}^{-20s}}{s^2+(67/660)s+(1/660)} \tag{12-26}$$

上述模型是在文献[23]提出的简化模型的基础上得到的，文献[23]使用了如下稳定状态下的关系：

$$\text{PaO2} = (K_L)\text{FiO2} + K_2 \tag{12-27}$$

对于患有严重呼吸窘迫的婴儿来说，K_L 和 K_2 可以分别取 90 和 0，所需的氧气比应超过 90%以维持正常的血氧水平。控制的目的是维持 PaO2=80mm Hg。

2. 陶比 PID 控制器

对本系统给出的陶比 PID 控制器是参数化的，具有一些自适应特性[20-22]，其增益及阶跃响应的性能可通过如下 MATLAB 程序得到：

```
Kb=1; TH=55; TL=12; KL=90; Tb=20; T= 10; K=KL*Kb; d=1.5*T+Tb;
KI = 0.5/(K*d)
a = exp(T/TL); b = exp(T/TH); m = a*b; s = a+b;
KD = KI/(1+m-s)
KP = (s-2)*KD
Dz = tf([KP+KI*T/2+KD/T KI*T/2-KP-2*KD/T KD/T],[1 -1 0],10);
Dz_PID = zpk(Dz)
baby = tf(KL, [TL 1]);
hood = tf([1],[TH 1],'inputdelay',20); % hood with 20s delay
Gp = hood*baby;
Gz = c2d(Gp,10),
Cz = feedback(Dz*Gz,1);
opt = stepDataOptions;
opt.StepAmplitude = 80;
step(Cz,1000,opt),grid % Plot Taube Step Response, Ref=80mmHg
[Gm,Pm] = margin(Dz*Gz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
disp('Unit-step performance metrics:')
stepinfo(Cz)

Gz =
            4.937 z + 3.523
 z^(-2) * ----------------------
          z^2 - 1.268 z + 0.3623

 KI = 1.5873e-04
 KD = 6.1189e-04
 KP = 9.1806e-04

Dz_PID =
 0.0017729 (z^2 - 0.1392z + 0.03451)
-----------------------------------
             z (z-1)
```

所产生的阶跃响应如图 12-34 所示。

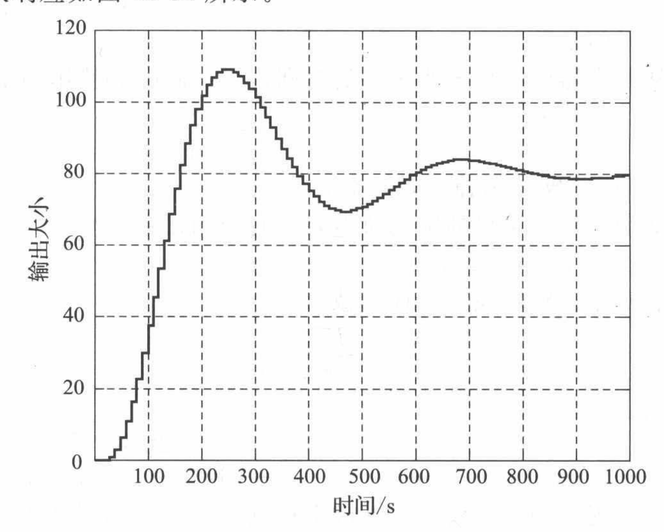


图 12-34 由文献[20-22]提出的系统的阶跃响应

该系统的性能参数如下：

```
GmdB:          8.0819
Pm:            35.7669
RiseTime:      90
SettlingTime:  780
SettlingMin:   0.8678
SettlingMax:   1.3612
Overshoot:     36.1163
Undershoot:    0
Peak:          1.3612
PeakTime:      250
```

稳定时间13min。下面，就参照例8.6所为，通过MATLAB软件的PID工具包(pidtool)用不同的PID控制器，改进上述原创性的设计。

3. 基于MATLAB的PID工具包的PIDF控制器

首先，我们沿用陶比文献[20]-[22]使用的方法，选采样间隔 $T=10s$、混合器延迟 $T_b=2T$。因此，延时的混合器模型为 z^{-2}(见式(4-39))。MATLAB程序细节如下：

```
T = 10;
Gp = tf([3/22],[1 67/660 1/660]); % without blender delay
delay = tf([1],[1 0 0],T); % blender delay = z^(-2)
Gpz = c2d(Gp,T);
Gz=delay*Gpz
disp(' ')
disp('Now opening MATLAB pidtool GUI')
disp('Set Pm = 64, ww1 = 0.0172') % Found by trial and error
% To get the same results shown below, first increase the
%phase margin to 64 using the up arrow on the value box, then
%increase the bandwidth ww1 to 0.0172 using the same procedure
pidtool(Gz,'pidf')

Gz =
       4.937 z + 3.523
 ----------------------------
 z^4 - 1.268 z^3 + 0.3623 z^2

Now opening MATLAB pidtool GUI
Set Pm = 64, ww1 = 0.0172

% Gains from MATLAB pidtool with Pm = 64, ww1 = 0.0172
T, KP = 0.013567, KI = 0.00018871, KD = 0.09763, TF = 5.5064
disp('PIDF using Equation (8-65)') %Find Dz using Eqn (8-65)
Dz_PIDF=KP+(KI*T)*tf([1],[1 -1],T)+KD*tf([1 -1],[TF -TF+T],T)
Dz_PIDF = zpk(Dz_PIDF), Dz_PIDFGz = Dz_PIDF*Gz;
Cz_PIDF = feedback(Dz_PIDFGz,1); opt = stepDataOptions;
opt.StepAmplitude = 80;
step(Cz_PIDF,1000,opt),grid %Plot PIDF Step Response, Ref=80mmHg
disp('PIDF Gain and Phase Margin:')
[Gm,Pm] = margin(Dz_PIDFGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
% disp('Unit-step performance metrics:')
PIDF_stepinfo=stepinfo(Cz_PIDF)

T = 10
KP = 0.0136
KI = 1.8871e-04
KD = 0.0976
TF = 5.5064

PIDF using Equation (8-65)
Dz_PIDF =
 0.031297 (z-0.841) (z-0.3115)
```

```
   ----------------------------
      (z-1) (z+0.8161)

GmdB:            11.0470
Pm:              63.9920
RiseTime:        60
SettlingTime:    110
SettlingMin:     0.9207
SettlingMax:     1.0173
Overshoot:       1.7342
Undershoot:      0
Peak:            1.0173
PeakTime:        130
```

图 12-35 所示的是 PID 工具包给出的结果，图 12-36 给出系统的阶跃响应。

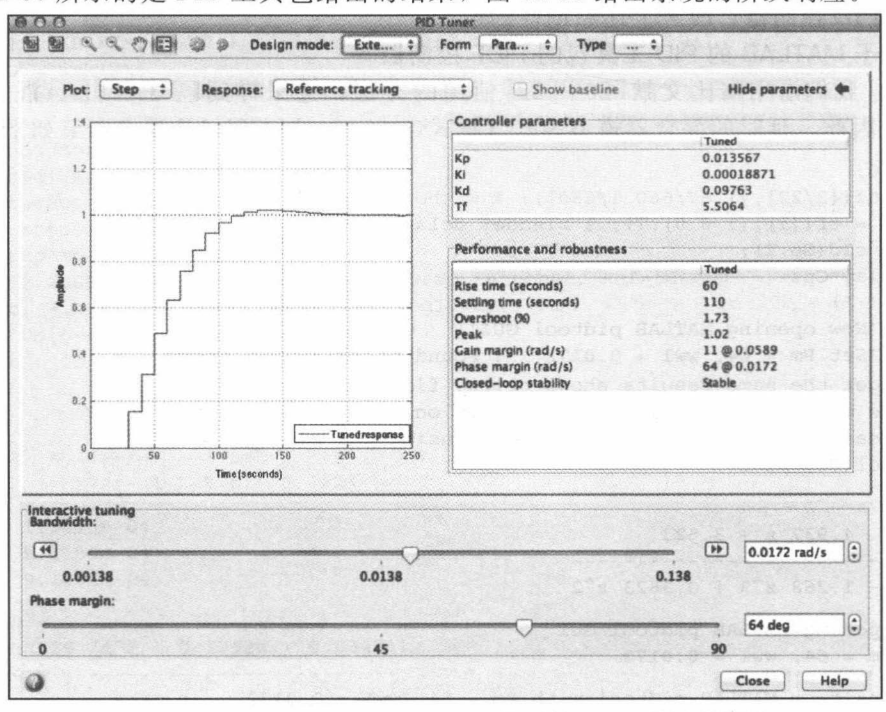


图 12-35　MATLAB 软件的 PID 工具包(T=10s)的屏幕截图

来源：MathWorks 公司，具有转载许可

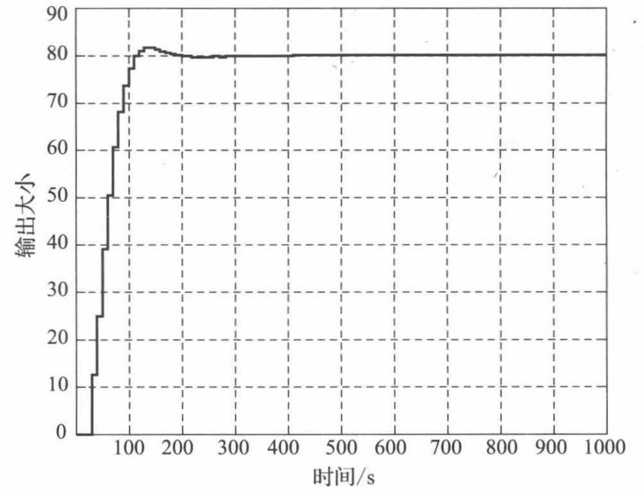


图 12-36　PIDF 控制器的阶跃响应

T=10s

可以看出，PIDF 控制器的性能改善如下：稳定时间由 13min 降到 110s。请注意，婴儿肺部的时间常数为 12s，我们用的采样间隔是 10s，这一采样间隔似乎是过长了，于是再选 $T=5\text{s}$，混合器延时模型用 z^{-4}，用新参数再次启用 PID 工具包进行设计。所用 MATLAB 语句如下。

```
T = 5;
Gp = tf([3/22],[1 67/660 1/660]); % without blender delay
delay = tf([1],[1 0 0 0 0],T); % blender delay = z^(-4)
Gpz = c2d(Gp,T);
Gz=delay*Gpz
disp(' ')
disp('Now opening MATLAB pidtool GUI')
disp('Set Pm = 64, ww1 = 0.0234') % Found by trial and error
pidtool(Gz,'pidf')

 Gz =
       1.445 z + 1.22
 ---------------------------
 z^6 - 1.572 z^5 + 0.602 z^4

% Gains from MATLAB pidtool with Pm = 64, ww1 = 0.0234
T, KP = 0.018487, KI = 0.00024205, KD = 0.19303, TF = 2.8731
% Find Dz using Equation (8-65)
disp('PIDF using Equation (8-65)')
Dz_PIDF=KP+(KI*T)*tf([1],[1 -1],T)+KD*tf([1 -1],[TF -TF+T],T);
Dz_PIDF = zpk(Dz_PIDF)
Dz_PIDFGz = Dz_PIDF*Gz;
Cz_PIDF = feedback(Dz_PIDFGz,1);
opt = stepDataOptions; opt.StepAmplitude = 80;
step(Cz_PIDF,1000,opt),grid%Plot PIDF Step Resp., Ref=80 mmHg
disp('PIDF Gain and Phase Margin:')
[Gm,Pm] = margin(Dz_PIDFGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
% disp('Unit-step performance metrics:')
PIDF_stepinfo=stepinfo(Cz_PIDF)

T = 5
KP = 0.0185
KI = 2.4205e-04
KD = 0.1930
TF = 2.8731

PIDF using Equation (8-65)
Dz_PIDF =
 0.085672 (z-0.9208) (z-0.6895)
 ------------------------------
        (z-1) (z+0.7403)

GmdB:          9.1688
Pm:            63.9993
RiseTime:      40
SettlingTime: 75
SettlingMin:  0.9201
SettlingMax:  1.0128
Overshoot:    1.2805
Undershoot:   0
Peak:         1.0128
PeakTime:     90
```

图 12-37 所示的是 PID 工具包的运行窗口，图 12-38 给出了设计结果的阶跃响应。

可以看出，系统的稳定时间从 110s 进一步降低到 75s，新的采样间隔下的性能指标再次得以改进。

进一步的，用鼻导管替换吸氧罩，也可以改进系统的响应时间。设这一更换可使混合

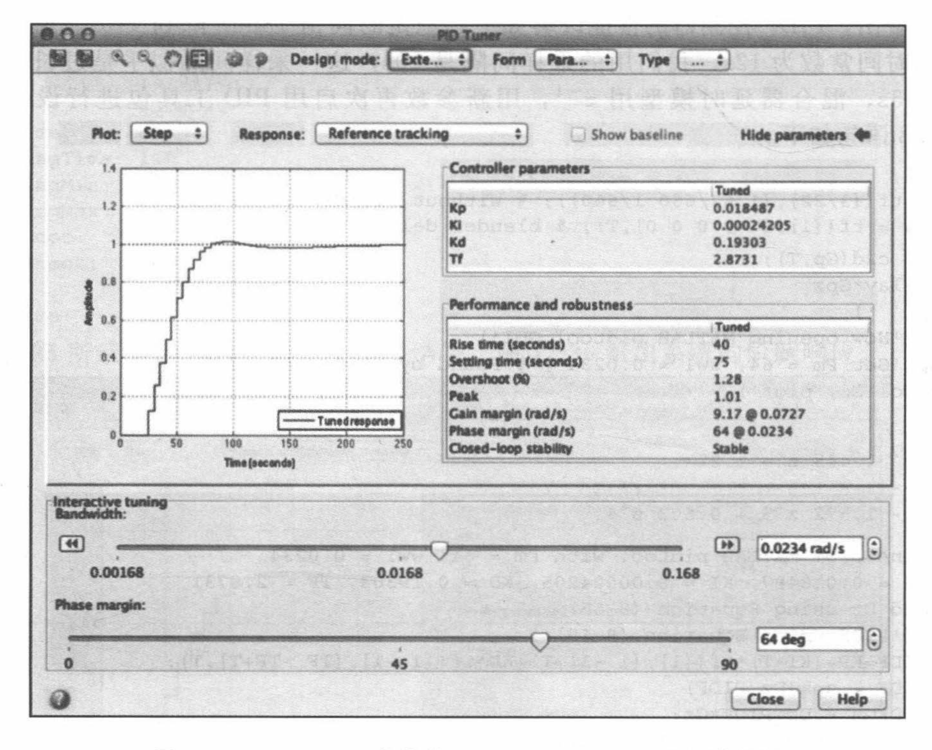


图 12-37 MATLAB 软件的 PID 工具包(T=5s)的屏幕截图

来源：MathWorks 公司，具有转载许可

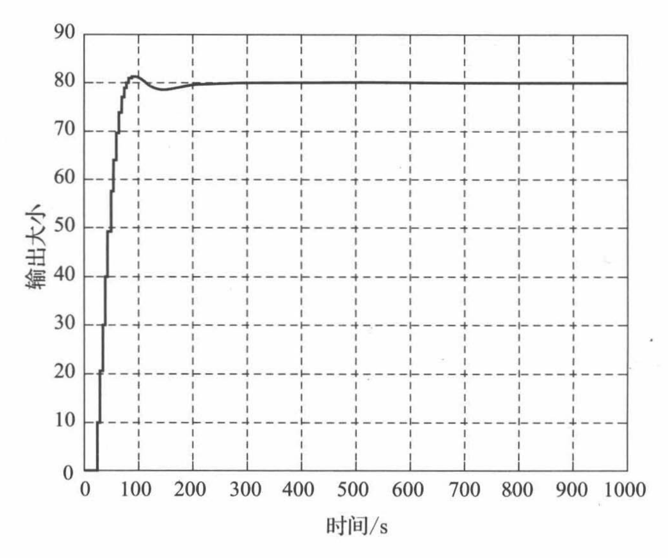


图 12-38 PIDF 控制器的阶跃响应

T=5s

器的延时从 20s 缩短到 10s，同时将吸氧器的时间常数从 55s 改成 2s，使控制对象的整体传递函数变成：

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{90\mathrm{e}^{-10s}}{(1+2s)(1+12s)}=\frac{(15/4)\mathrm{e}^{-10s}}{s^2+(7/12)s+(1/24)} \tag{12-28}$$

选 T=2s，混合器延时模型用 z^{-5}，用下面的 MATLAB 程序得到新的设计结果：

```
T = 2; tf([15/4],[1 7/12 1/24]); % without blender delay
delay = tf([1],[1 0 0 0 0 0],T); % blender delay = z^(-5)
Gpz = c2d(Gp,T); Gz=delay*Gpz
disp(' ')
disp('Now opening MATLAB pidtool GUI')
disp('Set Pm = 64, ww1 = 0.058') % Found by trial and error

pidtool(Gz,'pidf')

Gz =
       5.202 z + 3.532
 ----------------------------
 z^7 - 1.214 z^6 + 0.3114 z^5

Now opening MATLAB pidtool GUI
Set Pm = 64, ww1 = 0.058

% Gains from MATLAB pidtool with Pm = 64, ww1 = 0.058
T, KP = 0.011288, KI = 0.00055493, KD = 0.020054, TF = 1.1507
disp('PIDF using Equation (8-65)') % Find Dz using Eqn (8-65)
Dz_PIDF=KP+ KI*T)*tf([1],[1 -1],T)+KD*tf([1 -1],[TF -TF+T],T);
Dz_PIDF = zpk(Dz_PIDF), Dz_PIDFGz = Dz_PIDF*Gz;
Cz_PIDF = feedback(Dz_PIDFGz,1);
opt = stepDataOptions; opt.StepAmplitude = 80;

step(Cz_PIDF,1000, opt),grid %Plot PIDF Step Resp., Ref=80mmHg
disp('PIDF Gain and Phase Margin:')
[Gm,Pm] = margin(Dz_PIDFGz); GmdB = 20*log10(Gm), Pm
% disp('Unit-step performance metrics:')
PIDF_stepinfo=stepinfo(Cz_PIDF)

T = 2
KP = 0.0113
KI = 5.5493e-04
KD = 0.0201
TF = 1.1507

PIDF using Equation (8-65)
Dz_PIDF =
 0.028716 (z-0.8903) (z-0.3879)
 -----------------------------
       (z-1) (z+0.7381)

GmdB:          7.2441
Pm:            63.9994
RiseTime:      14
SettlingTime:  74
SettlingMin:   0.9313
SettlingMax:   1.0577
Overshoot:     5.7672
Undershoot:    0
Peak:          1.0577
PeakTime:      34
```

图 12-39 所示的是 PID 工具包的运行结果，图 12-40 给出了设计结果的阶跃响应。

我们注意到，在新的采样间隔下，系统的上升时间从 40s 降低到 14s，该项性能得以改进，不过此时，超调从 1.3%增加到了 5.8%、增益裕度从 9.2dB 降低到了 7.2dB，稳定时间基本未变。

本项案例研究表明：就一个特定的应用问题而言，可以说，找到合适的 PID 控制器增益是一件相当具有挑战性的工作。MATLAB 软件的 PID 工具包可以减少这种整定增益参

数的耗时。

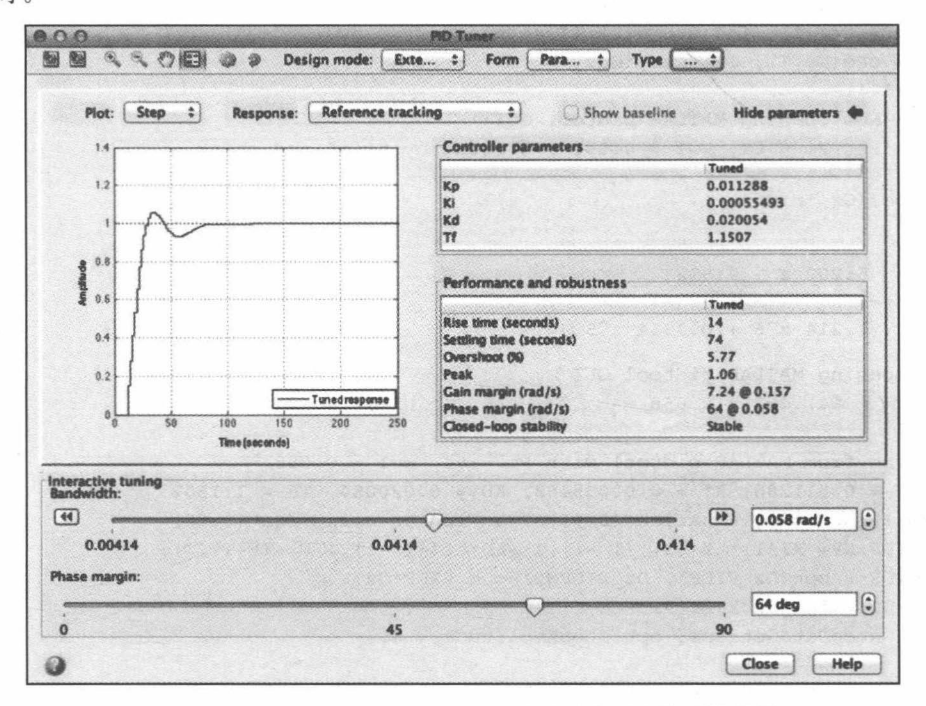


图 12-39　MATLAB 软件的 PID 工具包(T=2s)的屏幕截图

来源：MathWorks 公司，具有转载许可

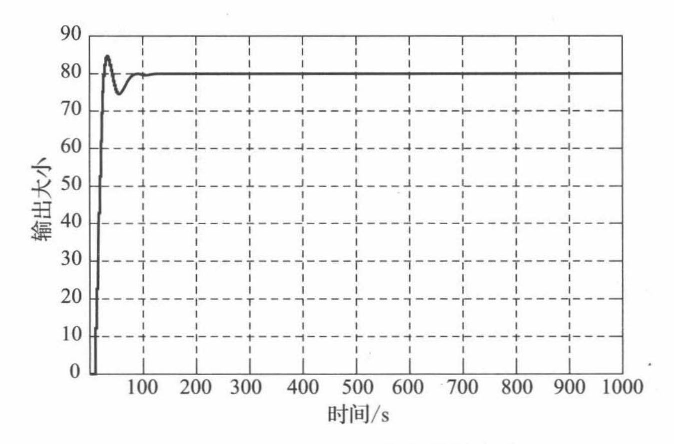


图 12-40　PIDF 控制器的阶跃响应

T=2s

12.6　电力系统模型拓扑辨识

设某电力网由 n 台同步发电机按照给定的拓扑结构相互连接而成。令 $E_i\angle\delta_i$ 表示第 i 台发电机的开路电压相量，在忽略阻尼和线路电阻的前提下，第 i 台发电机的机电动力学模型可以写成：

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i - \omega_s \\ M_i\dot{\omega}_i &= P_{mi} - \sum_{k\in N_i}\frac{E_iE_k}{x_{ik}}\sin(\delta_i-\delta_k)\end{aligned} \tag{12-29}$$

式中：ω_i(rad/s)是角速度；P_{mi} 是机械功率输入标幺值；M_i 是机械惯量；N_i 是连接到第 i

台发电机的总节点数；x_{ik}是第i台发电机和第k台发电机之间连线的电抗；$\delta_{ik}=\delta_i-\delta_k$及$\omega_s=120\pi\text{rad/s}$是60Hz系统的同步转速。

对各发电机($i=1, 2, \cdots, n$)就初始平衡条件(δ_{io}, 120π)对式(12-29)进行线性化处理，得到小信号模型为：

$$\begin{pmatrix}\Delta\dot{\delta}\\ \Delta\dot{\omega}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L} & 0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix}\Delta\delta\\ \Delta\omega\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{\varepsilon}_j\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \tag{12-30}$$

式中：

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}=(\Delta\dot{\delta}_1 \quad \cdots \quad \Delta\dot{\delta}_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}=(\Delta\dot{\omega}_1 \quad \cdots \quad \Delta\dot{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{I}$是n维单位矩阵；$\boldsymbol{M}$是机械惯量的对角阵；$\boldsymbol{\varepsilon}_j$是第$j$个单位向量，它的第$j$个元素为1，其他元素为0。对于第$j$个发电机，考虑到输入被建模为机械功率的变化。假设输入u为$t=0$时的脉冲，矩阵$\boldsymbol{L}$是$n\times n$维拉普拉斯矩阵，其元素具有如下形式：

- 若节点i、j之间连通，则$L_{ij}=(E_i E_j/x_{ij})\cos(\delta_{ij,0})$
- 若节点i、j之间不连通，则$L_{ij}=0$
- 对于第i行，$L_{ii}=-\sum\limits_{j\in N_i}(E_i E_j/x_{ij})\cos(\delta_{ij,0})$

其中，N_i是直接连接到第i台发电机的发电机指示集。

设整个电力网由r片相互之间稀疏连接的区域组成，第i片区域有m_i个节点，每个节点可以写成式(12-30)方块阵的形式，式中，非对角线上的(i, j)表示第i片区域和第j片区域之间的连通性，取值为0则表示两区域不连通。因为网络的聚集性，非对角块比对角块更稀疏。如果节点i、j之间由一条电抗x_{ij}较小的短联络线连接，则L_{ij}就是一个大的正数，类似地，如果节点i、j之间由一条电抗x_{ij}较大的长联络线连接，则L_{ij}就是一个小的正数。由于这种局部区域和区域族之间电抗间的差异，矩阵$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}$的特征值将划分成$(r-1)$个慢变模式，而剩下的$(n-r)$个模式具有快变特征值，表示区域内的局部振荡。有一个基本假设，就是$(r-1)$个慢变模式可以归因于r个由一个等效的拓扑结构相互连通的“等效”发电机。我们的目的是利用对$\delta(t)$和$\omega(t)$的测量找出连接着r台等效发电机的这个等效拓扑结构。给定这些状态的测量值之后，我们的首要任务就是应用11.4节描述的子空间识别算法，识别系统矩阵，计算其慢变特征值，从测量到的输出中提取这些慢变特征值的脉冲响应。如10.5节所述，输出中的慢变成分可以通过最小二乘算法来估计等效的拓扑结构。

可以从模型式(12-30)直接看到，这个降维系统的拓扑结构可以通过估计降维模型(即等效发电机转动惯量和传输线的等效电抗)的参数辨识出来。开始，人们可以假设这个拓扑结构是一张完全图，这意味着，每一个区域都是靠等效的联结线导纳w_{ij}相互连通的，区域i的等效惯量是M_i^e，然后用可以测到的慢变分量估计w_{ij}和M_i^e。识别到的w_{ij}可以将降维电网的拓扑结构确定下来。人们还可以设置一个阈值w_L，使得若$w_{ij}<w_L$，则将w_{ij}置为0，即区域i与j之间不再连通。接下来，我们提出一个线性最小二乘法，对于所有的i和j，估计w_{ij}和M_i^e。为使符号更简洁，我们将所有的权重w_{ij}表示为$\boldsymbol{w}$，将所有的转动惯量M_i^e表示为$\boldsymbol{M}^e$。

至此，可以把降维模型的时间离散表达式写成：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{M}^e)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{u}(k) \tag{12-31}$$

式中：$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$是系统的未知参数($\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{M}^e$)的函数。

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$由连续时间动力学模型(式(12-30))通过采样周期T确定下来。慢变模式动力学模型的第k此采样为$\boldsymbol{x}(k)=[x_1(k) \cdots x_r(k)]^{\mathrm{T}}$，$k=1, \cdots, N$，于是，可将式(12-31)重

写为：

$$\underbrace{[\boldsymbol{x}(k+1)]}_{\boldsymbol{G}_{k+1}}=\underbrace{\begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}(k))^T & 0 & 0 & \boldsymbol{u}(k) & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & (\boldsymbol{x}(k))^T & 0 & 0 & \boldsymbol{u}(k)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}_k}\underbrace{\begin{bmatrix}A_{d11}\\ \vdots\\ A_{dnn}\\ B_{d1}\\ \vdots\\ B_{dn}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} \tag{12-32}$$

连接 F_k 和G_k，则包括所有测量值的最小二乘法公式如下：

$$\min_{y}\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{G}\|_2 \tag{12-33}$$

式中：$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 分别为：

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{G}_m\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_0\\ \vdots\\ \boldsymbol{F}_{m-1}\end{bmatrix}$$

上述线性最小二乘法(LS)问题是凸的，可以用 CVX 软件[26]求解。CVX 软件是基于MATLAB语言的凸优化建模系统软件，不过，该公式有一个缺陷，就是 $\boldsymbol{F}$ 取决于测量值，而测量值通常会被噪声所干扰。例如，先假设 d$\boldsymbol{F}$ 和 d$\boldsymbol{G}$ 分别会造成 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 中的扰动，然后，估计 $\boldsymbol{y}$ 时的偏差(表示为 d$\boldsymbol{y}$)上限与$\kappa^2(\boldsymbol{F})$成正比，其中，κ 是 $\boldsymbol{F}$ 的条件数[27]。

下面，我们用对 IEEE 39 总线电力系统模型的研究案例，来说明基于最小二乘法的系统辨识方法。所用电力系统模型如图 12-41 所示。

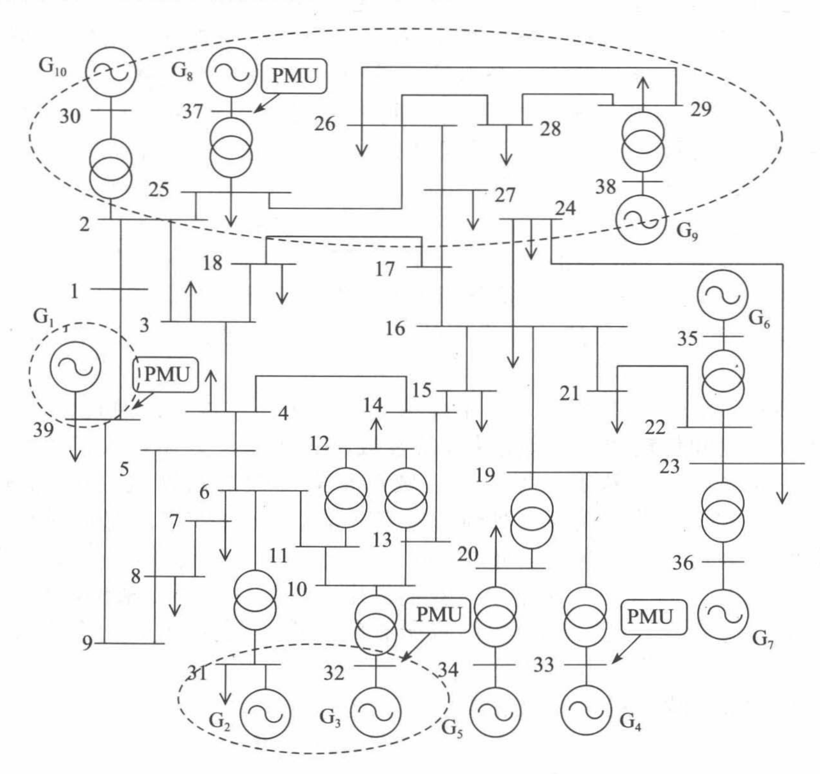


图 12-41 具有 10 台发电机的电力系统模型

10 台发电机划分于 4 片区域

该案例有10台发电机和39条总线，它们分布于5片区域中(见图12-41)。对于每台发电机，我们采用二阶动态模型，在图中的总线上标记有4个相量测量装置(PMU)，意味着有称为PMU的电力系统传感器安装在了总线上，由它们提供相位角及频率的测量值。该系统干扰为$t=1$s(通过1.005s)发生于29条总线上的短路电流。由基于MATLAB的电力系统分析工具箱执行全部的仿真工作，所提供的辨识结果如下。

● 精准等效系统矩阵为：

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}^{-1}=\begin{pmatrix}-7.9237 & 5.7529 & 0.3241 & 0.8105 & 1.0362\\ 9.2245 & -21.3526 & 3.97 & 5.8124 & 2.3457\\ 2.0571 & 15.7177 & -38.7316 & 15.4481 & 5.5086\\ 2.7404 & 12.2565 & 8.2278 & -25.8022 & 2.5776\\ 8.5838 & 12.1187 & 7.1880 & 6.3150 & -34.2054\end{pmatrix}
$$

● 所辨识的等效系统矩阵为：

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}^{-1}=\begin{pmatrix}-7.8459 & 4.9063 & 0.0 & 1.1716 & 1.768\\ 9.1447 & -17.0256 & 0.0 & 7.8808 & 0.0\\ 0.0 & 21.2502 & -44.5462 & 19.0870 & 4.2085\\ 0.6348 & 16.7347 & 0.0 & -20.3650 & 2.9911\\ 5.5511 & 23.5078 & 0.0005 & 9.50 & -38.5591\end{pmatrix}
$$

图12-42所示的是基于LS算法的辨识系统与实际测到的输出慢变成分，两者的动态行为对比。

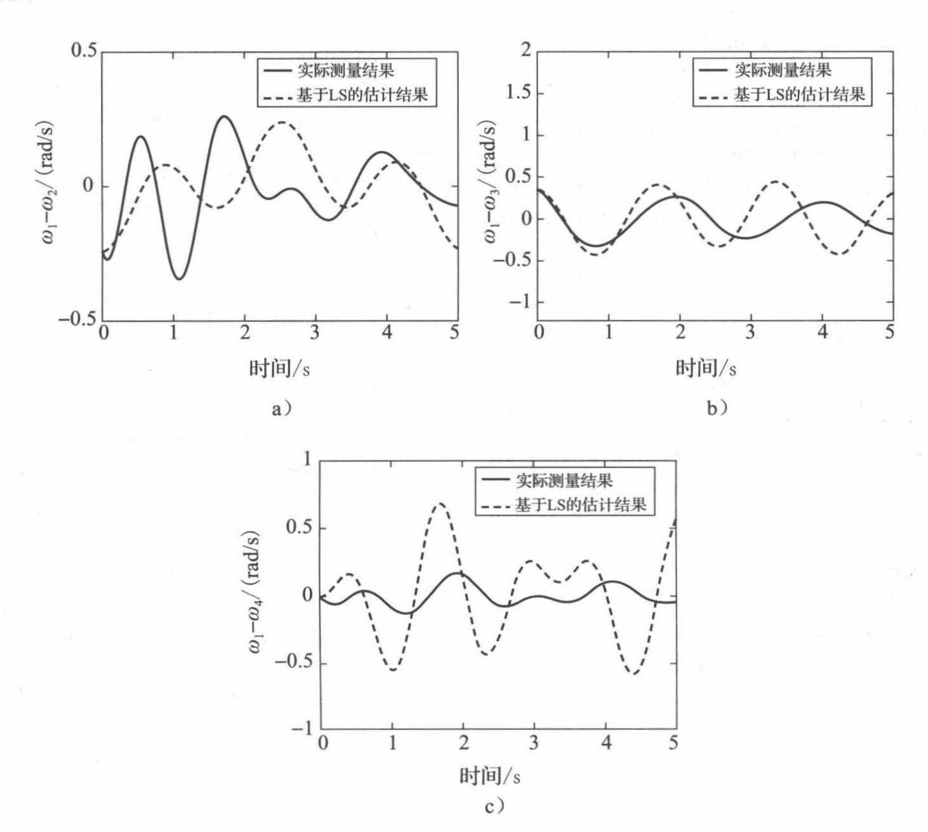


图12-42 测量结果与基于LS的辨识结果对比

参考文献

[1] M. S. Paranjape, "Microprocessor Controller for a Servomotor System," M.S. thesis, Auburn University, Auburn, AL, 1980.

[2] _____, *9900 Family Systems Design.* Dallas, TX: Texas Instruments Learning Center, 1978.

[3] C. H. Roth, *Fundamentals of Logic Design,* 3d ed. St. Paul, MN: West Publishing Co., 1985.

[4] C. L. Phillips and J. Parr, *Feedback Control Systems,* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011.

[5] J. D. Powell and P. Katz, "Sample Rate Selection for Aircraft Digital Control," *AIAA J.,* 13, pp. 975–979, 1975.

[6] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems,* 3d ed. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 2006.

[7] J. C. Hsu and A. U. Meyer, *Modern Control Principles and Applications.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.

[8] A Gelb and W. E. Vander Velde, *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear Design.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.

[9] R. E. Wheeler, "A Digital Control System for Plant Growth Chambers," M.S. thesis, Auburn University, Auburn, AL, 1980.

[10] R. Boylestad and L. Nashelsby, *Electronic Devices and Circuit Theory.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978.

[11] L. A. Leventhal, *Introduction to Microprocessors: Software, Hardware, Programming.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978.

[12] "AN/TPN-22 Mode 1 Final Report," Contract N00039-75-C-0021, ITT Gilfillan, Van Nuys, CA, 1979.

[13] "Software Implementation ALS Computer Program," Contract N00421-75-C-0058, Bell Aerospace Corporation, Buffalo, NY, Mar. 1975.

[14] A. P. Schust, Jr., "Determination of Aircraft Response Characteristics in Approach/ Landing Configuration for Microwave Landing System Program," Report FT-61R-73, Naval Air Test Center, Patuxent River, MD, 1973.

[15] C. L. Phillips, E. R. Graf, and H. T. Nagle, Jr., "MATCALS Error and Stability Analysis," Report AU-EE-75-2080-1, Auburn University, Auburn, AL, 1975.

[16] R. F. Wigginton, "Evaluation of OPS-II Operational Program for the Automatic Carrier Landing System," Naval Electronic Systems Test and Evaluation Facility, Saint Inigoes, MD, 1971.

[17] T. R. Benedict and G. W. Bordner, "Synthesis of an Optimal Set of Radar Track-While-Scan Smoothing Equations," *IRE Trans. Autom. Control,* Vol. AC-7, pp. 27–31, 1962.

[18] Qifu Li, "Feedback Control of Neonatal Fractional Inspired Oxygen," ECE 592U Digital Control Systems Class Project, NC State University, May, 2003.

[19] A. Gauli, R. Sukumaran, and S. Dutta, "Digital Control of Oxygen Saturation in Infants," ECE 592 Digital Control Systems Class Project, NC State University, May, 2012.

[20] J. C. Taube, "Adaptive control of neonatal fractional inspired oxygen," US patent 4,889,116, Dec. 26, 1989.

[21] J. C. Taube, "Automatic Control of Neonatal Fractional Inspired Oxygen," Masters Thesis, Drexel University, 1989.

[22] J. C. Taube, R. Pillutla, and J. Mills, "Criteria for an adaptive fractional inspired oxygen controller," Proc. of IEEE Symposium on Engineering of Computer-Based Medical Systems, pp. 129–132, 8–10 Jun 1988.

[23] A. Sano and M. Kikucki, "Adaptive control of arterial oxygen pressure of newborn infants under incubator oxygen treatments," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D* 132(5), pp. 205–211, 1985.

[24] R. Podmore, "Identification of coherent generators for dynamic equivalents." *IEEE Transactions on Power Systems* 97:1344–1354, 1978.

[25] A. Chakrabortty, J. H. Chow, and A. Salazar, "A Measurement-Based Framework for Dynamic Equivalencing of Large Power Systems Using Wide-Area Phasor Measurements," *IEEE Transactions on Smart Grid* 2(1), pp. 68–81, 2011.

[26] CVX Research, Inc. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0. http://cvxr.com/cvx, April 2011.

[27] L. N. Trefethen and D. Bau, *Numerical Linear Algebra,* SIAM, 1997.

附录 I
设 计 方 程

在这里，我们用直接代入法来证明式(8-33)是式(8-31)和式(8-32)的解。为方便起见，分别将 $D(\mathrm{j}\omega_{w1})$ 和 $G(\mathrm{j}\omega_{w1})$ 简记为 D 和 G，然后，将式(8-33)代入式(8-29)，得：

$$D=\frac{a_0+\mathrm{j}\omega_{w1}a_1}{1+\mathrm{j}\omega_{w1}b_1}=\frac{a_0+\mathrm{j}\,\dfrac{1-a_0|G|\cos\theta}{|G|\sin\theta}}{1+\mathrm{j}\,\dfrac{\cos\theta-a_0|G|}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{a_0|G|\sin\theta+\mathrm{j}(1-a_0|G|\cos\theta)}{|G|[\sin\theta+\mathrm{j}(\cos\theta-a_0|G|)]} \tag{A1-1}$$

因此

$$|D|^2=\frac{a_0^2|G|^2\sin^2\theta+1-2a_0|G|\cos\theta+a_0^2|G|^2\cos^2\theta}{|G|^2[\sin^2\theta+\cos^2\theta-2a_0|G|\cos\theta+a_0^2|G|^2]}$$

$$=\frac{a_0^2|G|^2+1-2a_0|G|\cos\theta}{|G|^2[a_0^2|G|^2+1-2a_0|G|\cos\theta]}=\frac{1}{|G|^2} \tag{A1-2}$$

至此，式(8-31)得以满足。

为证明 θ 就是 $D(\mathrm{j}\omega_{w1})$ 的角度，我们先将式(A1-1)的分子式角和分母式角分别记为 θ_1 和 θ_2，再根据式(A1-1)得：

$$\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{\dfrac{1-a_0|G|\cos\theta}{a_0|G|\sin\theta}-\dfrac{\cos\theta-a_0|G|}{\sin\theta}}{1+\dfrac{\cos\theta-a_0|G|\cos^2\theta-a_0|G|+a_0^2|G|^2\cos\theta}{a_0|G|\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta[1-2a_0|G|\cos\theta+a_0^2|G|^2]}{\cos\theta[1-2a_0|G|\cos\theta+a_0^2|G|^2]}=\tan\theta \tag{A1-3}$$

其中，用到了关系式：

$$\sin^2\theta-\cos^2\theta=1-2\cos^2\theta$$

至此，式(8-32)得以满足。

附录 Ⅱ

梅森增益公式

本附录讲述在给定系统信号流图或系统框图的前提下，求出其传递函数的方法。

根据定义，连续**线性时不变**(LTI)系统的传递函数是系统输出的拉普拉斯变换与系统输入的拉普拉斯变换之比。令系统输入的拉普拉斯变换为 $E(s)$，输出的拉普拉斯变换为 $C(s)$，$G(s)$是传递函数，对如下关系，图 A2-1a 给出了一种图形表示法：

$$C(s) = G(s)E(s) \tag{A2-1}$$

对此框图而言，由定义知，其输出等于图中给定的传递函数乘以输入，借助图中箭头的方向可明晰哪个是输入、哪个是输出。

信号流图可同样用来图形化地表示传递函数的关系，图 A2-1b 所示的就是表示式(A2-1)的信号流图。在信号流图中，信号标识在节点上，如图 A2-1b 所示流图中的 $E(s)$和 $C(s)$，节点间每一条带箭头的支路(连线)与一个传递函数相对应，该传递函数标识在箭头附近。根据定义，由支路流出的信号等于该支路的传递函数乘以流入该支路的信号。

在这里要强调两点。其一，框图和信号流图所蕴含的信息完全相同，说不上哪个更比哪个有优势，选用哪种方式完全取决于使用者的习惯。其二，框图或信号流图均根据一个方程或一组方程构建而成，它仅是那个或那组方程的图形表示，不携带任何超出那些方程的额外信息。

a) b)

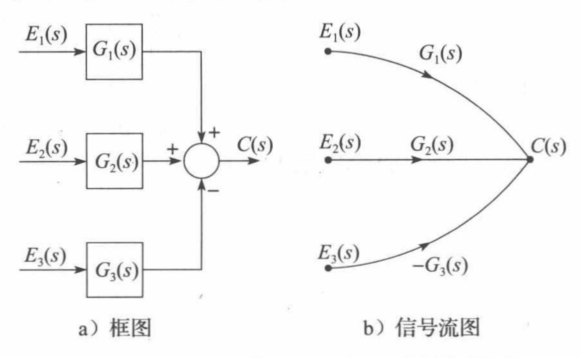
图 A2-1 框图和信号流图的基本要素

对于框图而言，需要再引入一个要素，即求和节点，该节点用图 A2-2a 所示的圆圈表示。图 A2-2 所示的是对下式的图形表示：

$$C(s) = G_1(s)E_1(s) + G_2(s)E_2(s) - G_3(s)E_3(s) \tag{A2-2}$$

根据定义，从图 A2-2 所示求和节点输出的信号等于进入该节点的各信号之和，而进入该节点的每一路信号又取决于标在该路箭头线侧的那个信号。需要注意的是，在这里，求和节点可以有多路输入，但仅一路输出。

对于信号流图而言，节点本身就可实现求和功能。在这里，求和节点一定有多个指向该节点的支路，如图 A2-2b 所示。根据定义，节点上的信号等于连向该节点的支路信号之和。



a）框图 b）信号流图

图 A2-2 框图和信号流图相互等效的例子

接下来，我们对通过框图或信号流图求得传递函数的方法做一个简单的审视。该方法称为梅森增益公式[1]。此方法相对简单，但使用时应格外小心，如若不慎，容易忽略掉一些传递函数的分子项或分母项，目前，尚不存在一种能够获知所被忽略的那些项的可行方法。不过，对于简单的系统，在一定的经验下，通过梅森增益公式所得的结果是信得过的。

在给出如何将梅森增益公式应用到信号流图(或框图)的规则之前，先给出如下定义：

源节点 仅提供信号流出的节点称为源节点。即与源节点相连的支路，其箭头方向均

是背离此节点的。

汇节点 仅存在流向节点的信号的节点称为汇节点。

路 路是一条连续的支路连接，其中，从一个节点到另一个节点间的支路，其方向相同。即从该条路的第一个节点到第二个节点、从第二个节点到第三个节点……最后到达终节点，所有的信号流向均相同。

环 环是一条闭合的路(所有的支路方向均相同)，在此环路上，各节点仅历经一次。请注意，环中不可能出现源节点，因为环中的每一个节点均至少存在一条信号流入的支路和一条信号流出的支路。

前向通路 前向通路是一条与源节点和汇节点相连的路，从前向通路的源节点到汇节点，其各节点仅历经一次。

路增益 路增益等于形成该路的各支路传递函数之积。

环路增益 环路增益等于形成该环路的各支路传递函数之积。

互不接触的环 不存在公共节点的两个环是互不接触的环。如果一个环和一条路之间也不存在公共节点，它们则也是互不接触的。

下面我们用图 A2-3 所示信号流图来解释上述定义。图中，存在两个互不接触的环，它们的增益分别是$-G_2H_1$ 和$-G_4H_2$；还有两个与输入 $R(s)$和输出 $C(s)$相连的前向通路，其增益分别为 $G_1G_2G_3G_4G_5$ 和 $G_6G_4G_5$，其中，增益为 $G_6G_4G_5$ 的前向通路与增益为$-G_2H_1$ 的环是互不接触的，但与另一个环则不然，增益为 $G_1G_2G_3G_4G_5$ 的前向通路与两个环均是有接触的。

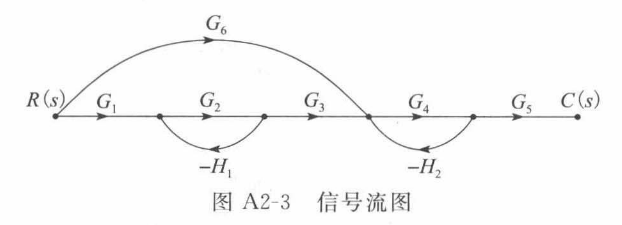


图 A2-3 信号流图

有了上述定义，我们来谈梅森增益公式。这一公式仅仅给出从系统源节点(输入)到汇节点(输出)的传递函数，表述如下：

$$T=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{p}M_k\Delta_k=\frac{1}{\Delta}(M_1\Delta_1+M_2\Delta_2+\cdots+M_p\Delta_p) \tag{A2-3}$$

式中：T 为从系统输入节点到输出节点的增益(传递函数)；p 为系统的前向通路数；

$\Delta=1-$(各独立回路增益之和)

$+$(所有相互独立的两环路增益的乘积之和)

$-$(所有相互独立的三环路增益的乘积之和)

$+$(所有相互独立的四环路增益的乘积之和)

$-$(……)

M_k 为第 k 条前向通路的信号；

Δ_k为流图中独立于第 k 条前向通路的 Δ 的那部分。

下面用 1 个例子来说明如何使用梅森公式。

例 A2.1 已知系统如图 A2-3 所示。我们用 L_i ㊀来表示第 i 条环路的增益，对例图而言，仅存在两条环路，其增益分别为：

$$L_1=-G_2H_1;\quad L_2=-G_4H_2$$

有两条前向通路，其增益分别为：

㊀ 原文中是 L_1，疑有误。——译者注

$$M_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 ; \quad M_2 = G_6 G_4 G_5$$

由图 A2-3 可以直接写出 Δ：

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2 = 1 + G_2 H_1 + G_4 H_2 + G_2 G_4 H_1 H_2$$

因为图中的两个环路是互不接触的，即这两个环路没有公共节点，因此就有了上式中最后一项。

难度较大的是如何写出式(A2-3)中的 Δ_k，如同上面叙述的，Δ_1 是流图中独立于第 1 条前向通路的 Δ 的那部分，求得 Δ_1 的一种方法是重新画出不含前向通路 1 的信号流图，这时，应将前向通路 1 的所有节点全部移除，图 A2-4a 和 b 分别给出了从原信号流图中移除第 1 条和第 2 条前向通路之后的信号流图。于是，图 A2-4a 所示信号流图的 Δ 就是 Δ_1，图 A2-4b 所示信号流图的 Δ 就是 Δ_2，由于图 A2-4a 所示流图中不存在环路、图 A2-4b 所示流图中环路数为 1，因此：

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 1 - (-G_2 H_1)$$

根据式(A2-3)，可得图 A2-3 信号流图所示系统的传递函数如下：

$$T = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_6 G_4 G_5 (1 + G_2 H_1)}{1 + G_2 H_1 + G_4 H_2 + G_2 G_4 H_1 H_2}$$

需要注意的是，该例信号流图虽然简单，其传递函数中依然呈现出许多项，因此难免出现一些项被忽略的问题，诸如克莱默规则[2]的代数法可用来验证经梅森公式所得的结果。

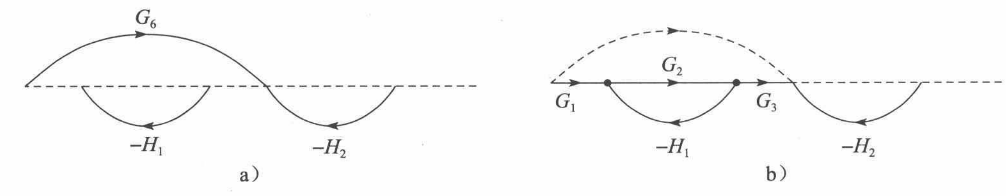


图 A2-4　移除一条前向通路的信号流图

如前所述，梅森公式可直接用于框图。这时，需要将前文所述定义中用到的术语进行置换，如表 A2-1 所示。其中，术语“信号”被定义为框或求和节点的输入或输出。

表　A2-1

信号流图		框图
输入节点	→	输入信号
输出节点	→	输出信号
支路	→	框
节点	→	信号

在框图中，我们是能够从众多的内部信号中识别出输出信号的。◀

参考文献

[1] S. J. Mason, “Feedback Theory: Some Properties of Flow Graphs,” *Proc. IRE* 41, pp. 1144–1156, 1953.

[2] C. L. Phillips and R. D. Harbor, *Feedback Control Systems,* 2d ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

附录 Ⅲ 对 $E^*(s)$ 的估计

由式(3-7)定义的 $E^*(s)$ 在系统分析中所能起到的作用有限，这是因为它是一个无穷级数。实际上，对于许多有用的时间函数来讲，其 $E^*(s)$ 可以表示成闭式，下面，我们来推导之。

根据式(3-6)，有：

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) \tag{A3-1}$$

该函数作为 $E^*(s)$ 的拉普拉斯反变换是有条件的，即要求在各采样瞬间 $e(t)$ 连续。如果在某个采样瞬间 $e(t)$ 不连续，就会出现问题，原因是拉普拉斯反变换在不连续点的值是左右极限的均值。正如 3.3 节定义所述，如果 $e(t)$ 在某个采样瞬间不连续，就应将 $e(t)$ 在那个瞬间的右极限代入 $E^*(s)$。比如，若 $e(t)$ 在原点不连续，由式(A3-1)直接计算 $E^*(s)$ 时，会使 $t=0$ 处的值为 $e(0)/2$。因此在 $e(0)\neq 0$ 的情况下，应将式(A3-1)表示为：

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) + e(0)\delta(t) \tag{A3-2}$$

如果 $e(t)$ 在其他采样瞬间不连续，取值为 $\Delta e(kT)\delta(t-kT)$ 的冲击函数就必须加到式(A3-2)上去，其中，$\Delta e(kT)$ 是 $e(t)$ 在 $t=kT$ 时刻不连续的变化幅度，即

$$\Delta e(kT) = e(kT^+) - e(kT^-)$$

式中：$e(kT^-)$ 等于 $e(t)$ 在 $t=kT-\varepsilon$ 的估值，ε 是任意小的数。

接下来的推导是在采样瞬间 $e(t)$ 均是连续的条件下的展开。根据式(A3-1)，有：

$$E^*(s) = E(s) * \Delta_T(s) \tag{A3-3}$$

式中：$*$ 表示复卷积[1]；$\Delta_T(s)$ 为 $\delta_T(t)$ 的拉普拉斯变换。根据式(3-5)，有：

$$\Delta_T(s) = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \tag{A3-4}$$

可见，$\Delta_T(s)$ 的极点为满足下式的 s 的值：

$$e^{-Ts} = 1 \tag{A3-5}$$

满足式(A3-5)的解 $s=j(2\pi n/T)=jn\omega_s$，$n=0$，±1，±2，…，其中，ω_s 为采样角频率，单位为 rad/s。在图 A3-1 所示的 s 平面上，可见对 $\Delta_T(s)$ 的极点的标注。

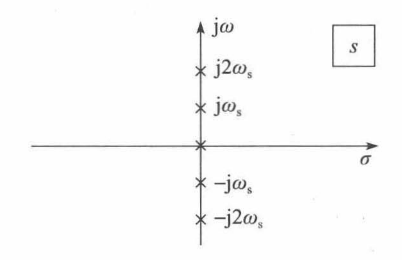


图 A3-1　$\Delta_T(s)$ 的极点

根据定义，可将式(A3-3)表示成如下形式：

$$\begin{aligned} E^*(s) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(\lambda)\Delta_T(s-\lambda)\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(\lambda)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}\,d\lambda \end{aligned} \tag{A3-6}$$

式(A3-6)中被积函数的极点如图 A3-2 所示。式中的 c 必须使 $E(\lambda)$ 的极点是在积分路径的左侧，s 的取值必须使 $\Delta_T(s-\lambda)$ 的极点在积分路径的右侧[1]。由式(A3-6)和图 A3-2 可知，$E^*(s)$ 可以写成如下形式：

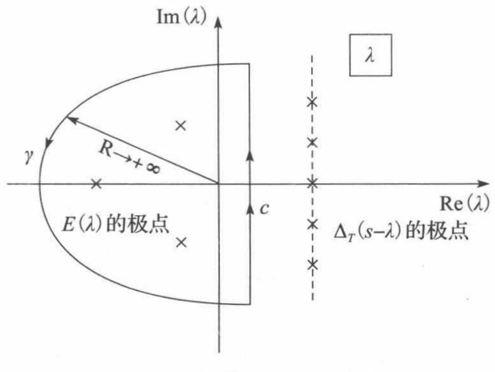


图 A3-2　式(A3-5)极点分布

$$\begin{aligned} E^*(s) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} E(\lambda)\Delta_T(s-\lambda)\,d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2\pi j}\oint E(\lambda)\Delta_T(s-\lambda)\,d\lambda \end{aligned} \tag{A3-7}$$

考虑式(A3-7)的第二个积分。当 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda E(\lambda)=0$(即 $e(0)=0$)时，该项为 0。若 $e(0)$不为 0，由文献[2]知，第二个积分等于 $e(0)/2$。然而，由式(A3-2)知，若 $e(0)$不为 0，式(A3-7)中应加上 $e(0)/2$。因此，无论在哪种情形下，有：

$$E^*(s)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\gamma}E(\lambda)\Delta_T(s-\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{A3-8}$$

对(A3-8)的详细推导感兴趣的读者可以参考文献[1]、[2]和[3]。

留数定理[3]可以用来计算式(A3-8)。下面我们给出这个定理的一般表述。

留数定理　若 C 是闭曲线，且除了 C 内部的有限个奇点外，$f(z)$在 C 上及 C 的内部是解析的，则有：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{j}[r_1+r_2+\cdots+r_n]$$

式中：r_1，r_2，…，r_n 是 $f(z)$在 C 内奇点处的留数。

根据这一定理，式(A3-8)获得如下表示：

$$E^*(s)=\sum_{\text{在}E(\lambda)\text{的极点处}}\left[\mathrm{Res}\left(E(\lambda)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)}}\right)\right] \tag{A3-9}$$

留数均应在 $E(\lambda)$的极点处求得，因为从图 A3-2 可以看出，闭合回路内的奇点均是该函数的极点。若 $E(s)$只有简单极点，我们可以利用式(2-33)，或者，令

$$E(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{A3-10}$$

式中：$N(s)$和 $D(s)$是 s 的多项式。

式(A3-9)可以表示成[4]：

$$E^*(s)=\sum_n\left[\frac{N(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda_n)}}\right] \tag{A3-11}$$

式中：λ_n 是 $E(\lambda)$的简单极点，且

$$D'(\lambda)=\frac{\mathrm{d}D(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$$

对于多阶极点，留数可以利用式(2-34)求出。

下面考虑 $e(t)$中包含时间延迟的情况。例如，考虑如下类型的延迟信号：

$$e(t)=e_1(t-t_0)u(t-t_0) \tag{A3-12}$$

我们有：

$$E(s)=\mathrm{e}^{-t_0 s}\mathscr{L}[e_1(t)]=\mathrm{e}^{-t_0 s}E_1(s) \tag{A3-13}$$

这种情况下，式(A3-7)中第二项积分对应的 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda E(\lambda)$往往不是有限的(见图 3-2)，因此，式(A3-9)不适用。此时求出延迟信号的星形变换的闭式需要特别的技巧，这些技巧运用了改进的 z 变换，详见第 4 章。尽管如此，如果时间信号延迟了采样周期的整数倍，我们仍然可以使用略微变形后的式(A3-9)：

$$[\mathrm{e}^{-kTs}E_1(s)]^*=\mathrm{e}^{-kTs}\sum_{\text{在}E(\lambda)\text{的极点处}}\left[\mathrm{Res}\left(E_1(\lambda)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)}}\right)\right] \tag{A3-14}$$

式中：k 是一个正整数。

等式(A3-6)可以通过图 A3-3 中的路径 α 计算。其中，$\Delta_T(s-\lambda)$的极点被 α 包围。若 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda E(\lambda)$为 0，则 α 中无穷半圆路径上的积分为 0，且

$$E^*(s)=-\sum_{\text{在}\Delta_T(s-\lambda)\text{的极点处}}[\mathrm{Res}(E(\lambda)\Delta_T(s-\lambda))] \tag{A3-15}$$

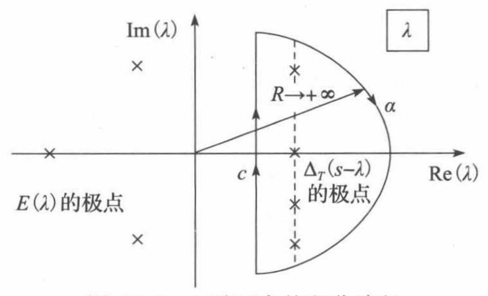


图 A3-3　λ 平面中的积分路径

上式的推导与式(A3-9)的推导步骤一致。注

意到：

$$\Delta_T(s-\lambda)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)}}=\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \tag{A3-16}$$

的简单极点位于λ平面上的固定直线上，呈周期性排布，如图 A3-3 所示。因此$E^*(s)$可以表示为：

$$E^*(s)=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{N(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)}E(\lambda_n) \tag{A3-17}$$

$\Delta_T(s-\lambda)$的极点为：

$$s-\lambda_n=\mathrm{j}\frac{2\pi n}{T}=\mathrm{j}n\omega_s,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{A3-18}$$

解 λ_n 可得：

$$\lambda_n=s-\mathrm{j}n\omega,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{A3-19}$$

此时

$$D'(\lambda)=-T\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)} \tag{A3-20}$$

由此可得：

$$D'(\lambda_n)=-T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}=-T \tag{A3-21}$$

利用式(A3-16)和式(A3-21)，式(A3-17)可以表示为：

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(s+\mathrm{j}n\omega_s) \tag{A3-22}$$

当$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=0$但$e(0)\neq0$时，沿$\alpha$的无穷半圆部分的积分为 0。然而，由于式(A3-2)需要加上一项，使得式(A3-22)变成：

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(s+\mathrm{j}n\omega_s)+\frac{e(0^+)}{2} \tag{A3-23}$$

因此，式(A3-23)的一般表示为：

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(s+jn\omega_s)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta e(nT)\mathrm{e}^{-nTs} \tag{A3-24}$$

式中：$\Delta e(nT)$是$e(t)$在$t=nT$处不连续的变化幅度。

下面将$E^*(s)$的三个表达式总结为：

$$E^*(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs} \tag{A3-25}$$

$$E^*(s)=\sum_{\text{在}E(\lambda)\text{的极点处}}\left[\mathrm{Res}\left(E(\lambda)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T(s-\lambda)}}\right)\right] \tag{A3-26}$$

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(s+\mathrm{j}n\omega_s)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta e(nT)\mathrm{e}^{-nTs} \tag{A3-27}$$

式(A3-25)是$E^*(s)$的定义式，式(A3-26)和式(A3-27)由式(A3-25)推得。

附录 Ⅳ
矩　　阵

在此，我们来简要概述矩阵问题，希望深入了解矩阵问题的读者请参阅文献[1]～[5]。矩阵问题起因于对线性方程组的求解。例如，对于如下线性方程组：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned} \tag{A4-1}$$

可以写成向量-矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{A4-2}$$

并约定

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{A4-3}$$

便可将式(A4-2)写成：

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{u} \tag{A4-4}$$

式中：$\boldsymbol{A}$ 为 3×3(3 行、3 列)的矩阵；$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 均是 3×1 的矩阵。通常又将仅含一行或一列的矩阵称为向量，仅有一行一列的矩阵成为标量，式(A4-1)中，x_1 就是一个标量。

一般的，将具有 m 行、n 列(即 $m \times n$)的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \tag{A4-5}$$

式中：a_{ij} 表示矩阵中第 i 行、j 列上的元素。$m=n$ 的矩阵称为方阵。

下面给出关于矩阵的一些重要定义。

单位阵　单位阵是一个 $n \times n$ 的方阵，它的主对角线元素取值为 1，其他元素均为 0。例如，3×3 的单位阵就是

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A4-6}$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 阶的，则有：

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A} \tag{A4-7}$$

上式出现的矩阵之间相乘运算的定义将在后面给出。

对角阵　对角阵是一个 $n \times n$ 的方阵，它的非对角线元素取值均为 0。

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \tag{A4-8}$$

对称阵　对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的行和所有的列而言，如果 $a_{ij}=a_{ji}$，则该矩阵是对称的。

矩阵的转置　将矩阵的行和列进行对换，便可实现对矩阵的转置。例如，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix} \tag{A4-9}$$

式中：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵。

转置矩阵具有如下性质：

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{A4-10}$$

分块矩阵为：

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{G}\end{bmatrix} \tag{A4-11}$$

式中：$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 均是 $n\times n$ 阶的；$\boldsymbol{H}$ 是 $2n\times 2n$ 阶的。

对 $\boldsymbol{H}$ 进行转置，得到：

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{A4-12}$$

迹 矩阵的迹等于矩阵对角线上各元素之和。记 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，则：

$$\boldsymbol{A}\text{ 的迹}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} \tag{A4-13}$$

特征值 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是如下多项式方程的根：

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0 \tag{A4-14}$$

式中：$|\cdot|$表示行列式；λ 是标量。

特征向量 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是一个向量，记为 $\boldsymbol{x}_i$，满足如下约束：

$$\lambda_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i \tag{A4-15}$$

式中：λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

性质 $n\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有如下两个性质：

$$|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{A4-16}$$

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{A4-17}$$

对于 $2n\times 2n$ 的分块矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}\end{bmatrix} \tag{A4-18}$$

如果 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 是 $n\times n$ 阶的，$\boldsymbol{O}$ 是 $n\times n$ 阶的空阵，则有：

$$|\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{G}| \tag{A4-19}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是方阵，则有：

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \tag{A4-20}$$

余子式 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的余子式 m_{ij} 是删除 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行、第 j 列之后余下的阵列形成的行列式。例如，对于式(A4-3)给出的矩阵 $\boldsymbol{A}$，其 m_{21} 为：

$$m_{21}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3-1=2 \tag{A4-21}$$

代数余子式 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 c_{ij} 由下式给出：

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij} \tag{A4-22}$$

对于式(A4-21)而言，

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\times(2)=-2$$

伴随矩阵 代数余子式矩阵的转置称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$。例如，对于式(A4-3)给出的矩阵 $\boldsymbol{A}$，其伴随矩阵为：

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&-5&-1\\-2&1&1\\-2&2&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{A4-23}$$

逆 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$、$\boldsymbol{A}$ 的行列式记为 $|\boldsymbol{A}|$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆根据下式求出：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{A4-24}$$

例如，式(A4-3)所示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为：

$$|\boldsymbol{A}|=-2 \tag{A4-25}$$

再利用式(A4-3)给出的结果，可得：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1&1\\ \frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix} \tag{A4-26}$$

关于逆矩阵的性质有二：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \tag{A4-27}$$

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{A4-28}$$

需要注意的是，仅当矩阵是方阵且矩阵行列式不为 0 时，方可求得矩阵的逆。如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，就可求得 $\boldsymbol{A}^{-1}$，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$。对于方阵 $\boldsymbol{A}$，如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-T} \tag{A4-29}$$

$$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \tag{A4-30}$$

一种实用的行列式计算 对于分块矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{E}&\boldsymbol{G}\end{bmatrix} \tag{A4-31}$$

式中：$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 均是 $n\times n$ 阶的；$\boldsymbol{H}$ 是 $2n\times 2n$ 阶的。则 $\boldsymbol{H}$ 的行列式为[6]：

$$|\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{G}|\,|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}|=|\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}| \tag{A4-32}$$

假设其中所出现的逆矩阵存在。

矩阵求逆引理 矩阵求逆引理如下[6]：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{A4-33}$$

同样假设其中所出现的逆矩阵存在。

1. 关于矩阵的代数运算

为了支撑诸如式(A4-2)以及更多的运算，以解决式(A4-1)等的问题，需要定义关于矩阵的代数运算。

相加 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行相加，就是对矩阵中的每一个同行同列的元素 a_{ij} 和 b_{ij} 进行求和运算。例如

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix} \tag{A4-34}$$

乘系数 系数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$，就是用系数 k 乘以矩阵中的每一个元素。

向量相乘 $1\times n$ 的行向量与 $n\times 1$ 的列向量相乘运算定义如下：

$$[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \tag{A4-35}$$

矩阵相乘 一个 $n\times p$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以与一个 $p\times m$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相乘，就是说，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数。令

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$$

则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中位于 i 行、j 列的元素等于用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素进行向量相乘。例如，式(A4-3)给出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与式(A4-26)给出的矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 相乘运算如下：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&1\\\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}\tag{A4-36}$$

2. 其他关系

下面给出几个重要的矩阵关系。

求导 一个矩阵的导数，是对矩阵的元素求导，例如，对于

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\tag{A4-37}$$

其导数为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}\tag{A4-38}$$

积分 一个矩阵的积分，是对矩阵的元素进行积分运算，例如，对于(A4-37)，有：

$$\int\boldsymbol{x}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\int x_1\mathrm{d}t\\\int x_2\mathrm{d}t\end{bmatrix}\tag{A4-39}$$

一个性质 设通过下述运算得到标量 G

$$G=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\tag{A4-40}$$

则

$$\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial G}{\partial x_1}\\\vdots\\\frac{\partial G}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\boldsymbol{y},\quad\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}\tag{A4-41}$$

二元式 设通过下述运算得到标量 F 为二元式：

$$F=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\tag{A4-42}$$

例如，如果 $\boldsymbol{x}$ 是二阶的，则

$$\begin{aligned}F=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}&=[x_1x_2]\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}\\q_{21}&q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\\&=q_{11}x_1^2+(q_{12}+q_{21})x_1x_2+q_{22}x_2^2\end{aligned}\tag{A4-43}$$

因此

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_ix_j\tag{A4-44}$$

不失一般性，可以假设 $\boldsymbol{Q}$ 是对称的。在这种情况下，有：

$$\frac{\partial F}{\partial x}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2q_{11}x_1+(q_{12}+q_{21})x_2\\ (q_{12}+q_{21})x_1+2q_{22}x_2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{Qx} \tag{A4-45}$$

双线性形式 对向量 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 组织下列运算，得到标量 G，则称 G 为双线性形式。

$$G=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy} \tag{A4-46}$$

例如，设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是二阶的，则有：

$$\begin{aligned}G=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy}&=(x_1\quad x_2)\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}\\ q_{21}&q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\\ &=q_{11}x_1y_1+q_{12}x_1y_2+q_{21}x_2y_1+q_{22}x_2y_2\end{aligned} \tag{A4-47}$$

因此

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_iy_i \tag{A4-48}$$

需要注意的是，不能假设 $\boldsymbol{Q}$ 是对称的。这时，有：

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_{11}y_1+q_{12}y_2\\ q_{21}y_1+q_{22}y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{Qy} \tag{A4-49}$$

及

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y_1}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_{11}x_1+q_{12}x_2\\ q_{21}x_1+q_{22}x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{A4-50}$$

如果注意到式(A4-40)和式(A4-41)，上述关系是显而易见的。例如，将式(A4-40)中的 $\boldsymbol{y}$ 替换成 $\boldsymbol{Qy}$，即可根据式(A4-41)得到式(A4-49)。

不定性 如果对于 $\boldsymbol{x}\neq 0$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qx}>0$，则该二次式便是正定的，如果对于 $\boldsymbol{x}\neq 0$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qx}\geqslant 0$，则该二次式便是半正定的。10.2 节给出了一个关于不定性的检验，下面再给出一个检验，即如果 $\boldsymbol{F}$ 是正定(半正定)的，主对角线余子式 Δ_i，$i=1, 2, \cdots, n$ 则均为正(非负)，其中，

$$\Delta_1=q_{11},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}q_{11}&q_{12}\\ q_{21}&q_{22}\end{vmatrix},\cdots,\quad \Delta_n=|\boldsymbol{Q}| \tag{A4-51}$$

参考文献

[1] F. R. Gantmacher, *Theory of Matrices,* Vols. I and II. New York: Chelsea Publishing Company, Inc., 1959.

[2] P. M. DeRusso, R. J. Roy, and C. M. Close, *State Variables for Engineers.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1965.

[3] K. Ogata, *Modern Control Engineering,* 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1990.

[4] G. Strang, Linear Algebra and Its Applications. New York: Academic Press, Inc., 1976.

[5] G. H. Gloub and C. F. Loan, *Matrix Computations.* Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 1983.

[6] T. E. Fortman, "A Matrix Inversion Identity," *IEEE Trans. Autom. Control* AC-15, p. 599, 1970.

附录 V

拉普拉斯变换

在此，我们来简要概述拉普拉斯变换问题。我们会发现，在以传递函数的形式为线性时不变(LTI)模拟系统建模时，拉普拉斯变换是非常有用的。拉普拉斯变换还可以用来求解这类系统的自由响应和强制响应。不过，当今人们更多的是通过仿真(如利用计算机程序来求解系统方程)来获取其响应的求解，特别是面对大型系统的时候。对拉普拉斯变换的一些细节感兴趣的读者，建议进一步阅读文献[1]~[3]。

1. 引言

根据定义，时间函数 $f(t)$的拉普拉斯变换为[1]

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{A5-1}$$

式中：$\mathscr{L}$表示拉普拉斯变换。

需要注意的是，通过对函数在时间上的积分，拉普拉斯变换成为复变量 s 的函数。拉普拉斯反变换定义如下：

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \tag{A5-2}$$

式中：$\mathscr{L}^{-1}$表示拉普拉斯反变换；$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$。

式(A5-1)和式(A5-2)形成拉普拉斯变换对。给定函数 $f(t)$，通过式(A5-1)的积分运算，即可获得其拉普拉斯变换 $F(s)$，而再将 $F(s)$用于式(A5-2)，则可还原 $f(t)$。式(A5-2)中 σ 的取值取决于式(A5-1)的收敛域。人们很少使用式(A5-2)来计算拉普拉斯反变换，而是通过式(A5-1)来构建一张用于时间函数的拉普拉斯变换表。下面给出按照这一思路求解指数函数 e^{-at}的拉氏变换的事例。根据式(A5-1)，有：

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int^{+\infty_0}\mathrm{e}^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t=\left.\frac{-\mathrm{e}^{-(s+a)t}}{s+a}\right|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}(s+a)>0\end{aligned} \tag{A5-3}$$

式中：Re(•)表示表达式的实部。

附录Ⅵ给出了众多函数的拉普拉斯变换和 z 变换。表中的前两列是拉普拉斯变换，最后一列用于数字控制系统的分析和设计。

根据拉普拉斯变换的定义式(A5-1)，有：

$$\mathscr{L}[kf(t)]=k\,\mathscr{L}[f(t)]=kF(s) \tag{A5-4}$$

和

$$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)]=\mathscr{L}[f_1(t)]+\mathscr{L}[f_2(t)]=F_1(s)+F_2(s) \tag{A5-5}$$

式中：k 为常数。

利用上述两个关系可以使附录Ⅵ给出的拉普拉斯变换表的使用获得极大的拓展。

下面给出拉普拉斯变换及拉普拉斯反变换的一些例子。首先需注意到，面对 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 情况[1]，通过复数积分式(A5-2)计算拉普拉斯反变换的结果。因此，为了一致性目的，我们总将时间为负时的 $f(t)$值指定为 0。同时，对于由下式定义的单位阶跃函数简记为 $u(x)$：

$$u(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases} \tag{A5-6}$$

式(A5-3)导出的 e^{-at} 的拉普拉斯变换与 $e^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换相同。于是，对于任意函数 $f(t)$，有：

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[f(t)u(t)]=F(s) \tag{A5-7}$$

例 A5.1 求时间函数 $f(t)=5u(t)+3e^{-2t}$ 的拉普拉斯变换。

根据附录Ⅵ和式(A5-4)，有：

$$\mathscr{L}[5u(t)]=5\,\mathscr{L}[u(t)]=\frac{5}{s}$$

$$\mathscr{L}[3e^{-2t}]=3\,\mathscr{L}[e^{-2t}]=\frac{3}{s+2}$$

根据式(A5-5)，有：

$$F(s)=\mathscr{L}[5u(t)+3e^{-2r}]=\frac{5}{s}+\frac{3}{s+2}$$

经整理得：

$$F(s)=\frac{5}{s}+\frac{3}{s+2}=\frac{8s+10}{s(s+2)}$$

上述合并的结果比和式的形式更易于对传递函数的处理。◀

上述例子说明了一个要点，即通常情况下，我们经过努力，可将拉普拉斯变换结果表示成变量 s 的多项式的比(称这个多项式的比为有理式)。然而，在寻找拉普拉斯反变换的表中仅会给出低阶函数的对照结果，因此需要我们将一般的有理函数的形式变换成表中所具呈现的形式，这种方法称为部分分式分解法，请看一个简单的变换关系：

$$\frac{c}{(s+a)(s+b)}=\frac{k_1}{s+a}+\frac{k_2}{s+b}$$

式中：a、b、c 为已知常数。

要求求出部分分式表达式中的系数 k_1 和 k_2。我们先来推导一般性的所需关系：

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)},\quad m<n \tag{A5-8}$$

式中：分别将分子多项式和分母多项式记为 $N(s)$ 和 $D(s)$。

为了实现部分分式展开，首先需要求出分母多项式的根，然后便可将 $F(s)$ 表示成：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n} \tag{A5-9}$$

式中：Π符号表示各项之间相乘。

假设我们希望算出系数 k_j，就应该用 $(s-p_j)$ 同乘式(A5-9)的两侧，得到：

$$(s-p_j)F(s)=\frac{k_1(s-p_j)}{s-p_1}+\cdots+k_j+\cdots+\frac{k_n(s-p_j)}{s-p_n} \tag{A5-10}$$

如果计算上式在 $s=p_j$ 时的取值，会发现上式右侧除第 j 项之外均为 0，于是有：

$$k_j=(s-p_j)F(s)\big|_{s=p_j},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{A5-11}$$

数学上，称 k_j 为 $F(s)$ 对极点 $s=p_j$ 的留数。

如果分母多项式含有重根，可以将其按照如下方式展开：

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)^r}\\ &=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_{21}}{s-p_2}+\frac{k_{22}}{(s-p_2)^2}+\cdots+\frac{k_{2r}}{(s-p_2)^r}\end{aligned} \tag{A5-12}$$

可以看出，分母多项式中的 r 重根将产生部分分式展开式中的 r 个项，重根项的系数计算

方法如下：

$$k_{2j} = \frac{1}{(r-j)!} \frac{\mathrm{d}^{r-j}}{\mathrm{d}s^{r-j}}[(s-p_2)^r F(s)]|_{s=p_2} \tag{A5-13}$$

相关推导可参见文献[4]。

上述关于实数根的论述同样适用于复数根的情况。设 $F(s)$ 含有一对复数极点，并令 $p_1=a-\mathrm{j}b$，$p_2=a+\mathrm{j}b$，则式(A5-9)便可写成：

$$F(s) = \frac{k_1}{s-a+\mathrm{j}b} + \frac{k_2}{s-a-\mathrm{j}b} + \frac{k_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} \tag{A5-14}$$

系数k_1 和k_2 可以使用前面的式(A5-11)求得。不过，我们会发现，这两个系数是复数，且k_2 与k_1 是共轭的。为了更便于获得反变换，可以使用如下方法。根据式(A5-11)，有：

$$\begin{aligned} k_1 &= (s-a+\mathrm{j}b)F(s)|_{s=a-\mathrm{j}b} = R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \\ k_2 &= (s-a-\mathrm{j}b)F(s)|_{s=a+\mathrm{j}b} = R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = k_1^* \end{aligned} \tag{A5-15}$$

式中：星号表示复数共轭。

定义式(A5-14)中前两项的反变换为 $f_1(t)$，利用欧拉等式，得：

$$\begin{aligned} f_1(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}b)t} + R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{j}b)t} = 2R\mathrm{e}^{at}\left[\frac{\mathrm{e}^{j(bt-\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(bt-\theta)}}{2}\right] \\ &= 2R\mathrm{e}^{at}\cos(bt-\theta) \end{aligned} \tag{A5-16}$$

这一方法展现了一种便利的、计算相对简单的反变换。得到的阻尼正弦，其幅度为 $2R$、相位为 θ，R 和 θ 的定义由式(A5-15)给出。接下来，我们来看求拉普拉斯反变换的三个例子。

例 A5.2 求如下有理函数的拉普拉斯反变换：

$$F(s) = \frac{5}{s^2+3s+2} = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

首先，将 $F(s)$写成部分分式展开式：

$$F(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

其中的系数根据式(A5-11)计算：

$$k_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \left.\frac{5}{s+2}\right|_{s=-1} = 5$$

$$k_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \left.\frac{5}{s+1}\right|_{s=-2} = -5$$

于是，得部分分式展开结果：

$$\frac{5}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s+1} + \frac{-5}{s+2}$$

可以证明，重新整合上式右侧，可得上式左侧。于是对 $F(s)$的拉普拉斯反变换为：

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (5\mathrm{e}^{-t} - 5\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

式中函数 $u(t)$经常被遗漏，但是，我们必须清楚这个反变换结果一定是：时间小于 0 时为 0、时间大于 0 时非 0。 ◀

例 A5.3 求如下函数的拉普拉斯反变换：

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^3+2s^2+s} = \frac{2s+3}{s(s+1)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_{21}}{s+1} + \frac{k_{22}}{(s+1)^2}$$

容易算出系数k_1 和系数k_{22}：

$$k_1 = sF(s)|_{s=0} = \left.\frac{2s+3}{(s+1)^2}\right|_{s=0} = 3$$

$$k_{22}=(s+1)^2F(s)\big|_{s=-1}=\frac{2s+3}{s}\bigg|_{s=-1}=-1$$

再用式(A5-13)求出k_{21}：

$$k_{21}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+1)^2F(s)]\bigg|_{s=-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{2s+3}{s}\right]\bigg|_{s=-1}$$
$$=\frac{s\times(2)-(2s+3)\times(1)}{s^2}\bigg|_{s=-1}=\frac{-2-1}{1}=-3$$

于是，得部分分式展开结果：

$$F(s)=\frac{2s+3}{s(s+1)^2}=\frac{3}{s}+\frac{-3}{s+1}+\frac{-1}{(s+1)^2}$$

根据附录Ⅵ，$f(t)=3-3\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}$。◀

例 A5.4 下述函数具有一对复数极点，求其拉普拉斯反变换：

$$F(s)=\frac{10}{s^3+4s^2+9s+10}=\frac{10}{(s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{10}{(s+2)[(s+1)^2+2^2]}$$
$$=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+1+\mathrm{j}2}+\frac{k_2^*}{s+1-\mathrm{j}2}$$
$$=\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}+\frac{k_2^*}{s+p_2^*}$$

系数k_1的计算方法不变：

$$k_1=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\frac{10}{(s+1)^2+4}\bigg|_{s=-2}=\frac{10}{5}=2$$

利用式(A5-15)计算系数k_2：

$$k_2=(s+1+\mathrm{j}2)F(s)=\frac{10}{(s+2)(s+1-\mathrm{j}2)}\bigg|_{s=-1-\mathrm{j}2}$$
$$=\frac{10}{(-1-\mathrm{j}2+2)(-1-\mathrm{j}2+1-\mathrm{j}2)}=\frac{10}{(1-\mathrm{j}2)(-\mathrm{j}4)}$$
$$=\frac{10}{(2.236\angle(-63.4^\circ))(4\angle(-90^\circ))}=1.118\angle 153.4^\circ=R\angle\theta$$

通过式(A5-16)，得：

$$f(t)=2\mathrm{e}^{-2t}+2.236\mathrm{e}^{-t}\cos(2t-153.4^\circ)$$ ◀

2. 拉普拉斯变换的性质

有了拉普拉斯变换的定义之后，我们还需要一些拉普拉斯变换的性质，用于控制系统的分析和设计。作为一个例子，我们来推导终值性。

设我们希望获知$f(t)$的终值，即$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$，同时，我们又不希望通过拉普拉斯反变换、而是希望从拉普拉斯变换$F(s)$直接求得这个终值。终值性可以使我们做到这一点。为了推导出这个性质，需要首先求函数$f(t)$的导数的拉普拉斯变换：

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]=\int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{A5-17}$$

设

$$u=\mathrm{e}^{-st},\quad \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

便可使用分部积分法，即

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]=uv\bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}v\mathrm{d}u=f(t)\mathrm{e}^{-st}\bigg|_0^{+\infty}-s\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=0-f(0)+sF(s)=sF(s)-f(0) \tag{A5-18}$$

为了确保数学上的正确性，初始条件项应该为 $f(0^+)$[1]，而

$$f(0^+)=\lim_{t\to 0}f(t),\quad t>0 \tag{A5-19}$$

只不过，我们依然使用符号 $f(0)$。

下面，我们来推导终值性。根据式(A5-17)

$$\lim_{s\to 0}\left[\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\right]=\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\lim_{t\to+\infty}f(t)-f(0) \tag{A5-20}$$

假设上述关系的左极限存在，根据式(A5-18)和式(A5-20)，有：

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)-f(0s)=\lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0)] \tag{A5-21}$$

或

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s) \tag{A5-22}$$

如果上述关系的左极点不存在，其右极限也可能存在。

表 A5-1 列举出了拉普拉斯变换的一些有用性质，但未给出这些性质的证明，对此感兴趣的读者可参阅文献[3]～[4]。接下来，给出拉普拉斯变换性质的一个应用举例。

表 A5-1　拉普拉斯变换性质

名称	定理
导数	$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]=sF(s)-f(0^+)$
n 阶导数	$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^+)-\cdots-f^{(n-1)}(0^+)$
积分	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$
位移	$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-t_0s}F(s)$
初值	$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to+\infty}sF(s)$
终值	$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$
频移	$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}f(t)]=F(s+a)$
卷积	$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

例 A5.5 应用拉普拉斯变换的性质举例。设时间函数 $\cos(at)$，它的拉普拉斯变换：

$$F(s)\ \mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[\cos(at)]=\frac{s}{s^2+a^2}$$

根据表 A5-1，可得与附录Ⅵ已知的结果：

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]=\mathscr{L}[-a\sin(at)]=sF(s)-f(0)=\frac{s}{s^2+a^2}-1=\frac{-a^2}{s^2+a^2}$$

再根据表 A5-1，同样可得与附录Ⅵ已知的结果：

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=\mathscr{L}\left(\frac{\sin(at)}{a}\right)=\frac{F(s)}{s}=\frac{1}{s^2+a^2}$$

$f(t)$ 的初值为：

$$f(0)=\lim_{s\to+\infty}sF(s)=\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{s^2}{s^2+a^2}\right]=1$$

这显然是正确的。如果我们不小心使用了终值定理，便有：

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\left[\frac{s^2}{s^2+a^2}\right]=0$$

这是错误的，因为 $\cos(at)$ 没有终值，该函数随时间的无限增加始终在 1 和 −1 之间连续变化。该例强调：终值定理不能用于没有终值的函数。◀

例 A5.6 设函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-0.5t}$ 发生了 4s 的延时，重新描述为：

$$f_1(t)=f(t-4)u(t-4)=\mathrm{e}^{-0.5(t-4)}u(t-4)$$

函数 $f(t)$ 和函数 $f_1(t)$ 的变化曲线如图 A5.1 所示。需要注意的是，在使用表 A5-1 所示的延时性质时，必要条件是：$f(t)$ 被延时 4s，得到的延时函数在时间小于 4s(延时时间)时取值为 0。根据延时性，

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-t_0 s}F(s),\quad F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$$

例中，非延时函数为 $\mathrm{e}^{-0.5t}$，于是，$F(s)=1/(s+0.5)$，因此，

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-0.5(t-4)}u(t-4)]=\frac{\mathrm{e}^{-4s}}{s+0.5}$$

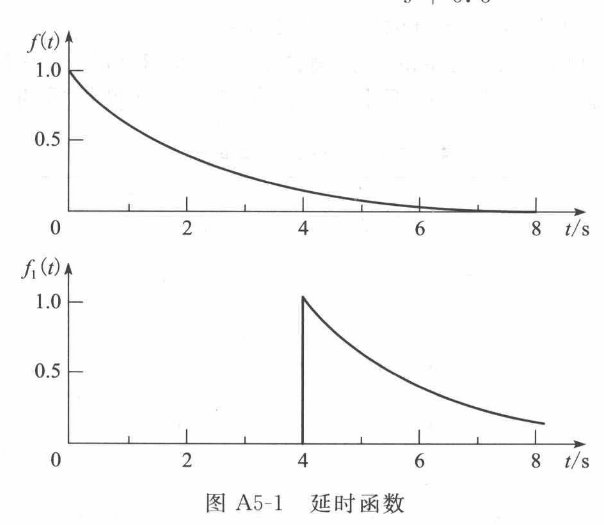


图 A5-1 延时函数

请注意，延时函数的拉普拉斯变换包含了一个指数函数，而不再是 s 的多项式之比。◀

3. 微分方程及传递函数

分析和设计控制系统时，拉普拉斯变换用来将常系数线性微分方程变换成代数方程。代数方程较微分方程更易分析和处理。如若可能，我们总是将常系数线性微分方程作为模型来模拟物理系统，因此，拉普拉斯变换就是用来简化线性时不变系统的十分有用的工具。

一个用线性微分方程来模拟物理现象的例子是牛顿定律：

$$M\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=f(t) \tag{A5-23}$$

式中：$f(t)$ 是作用于质量为 M 的物体上的力，由此造成物体发生 $x(t)$ 的位移。

假设式(A5-23)所用单位一致，并已知物体质量 M 和作用力 $f(t)$，则根据表 A5-1，式(A5-23)的拉普拉斯变换为：

$$M[s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)]=F(s) \tag{A5-24}$$

式中：$\dot{x}(t)$ 表示 $x(t)$ 的导数。

为了求出物体的位移，需要知晓作用力、物体的初始位置 $x(0)$，以及其初始速度 $\dot{x}(0)$，然后，可以求解 $X(s)$ 的方程，再进行拉普拉斯反变换，求得位移 $x(t)$。现在我们来求解 $X(s)$：

$$X(s)=\frac{F(s)}{Ms^2}+\frac{x(0)}{s}+\frac{\dot{x}(0)}{s^2} \tag{A5-25}$$

以假设作用力为0为例，得到式(A5-25)的拉普拉斯反变换为：

$$x(t)=x(0)+\dot{x}(0)t,\quad t\geqslant 0 \tag{A5-26}$$

如果初始速度$\dot{x}(0)$也为0，物体将始终保持在初始位置。如果初始速度不为0，物体的位移速度将等于初始速度。

我们注意到，如果初始条件全部为0，式(A5-25)则变为：

$$X(s)=\frac{1}{Ms^2}F(s) \tag{A5-27}$$

我们所考虑的物理现象(系统)能够用常系数线性微分方程来模拟，这类系统响应(输出)的拉普拉斯变换就可表示成激励函数(输入)的拉普拉斯变换乘以称为传递函数的s的函数(初始条件全部为0)，通常将传递函数标记为$G(s)$。例如，从式(A5-27)可得传递函数为：

$$G(s)=\frac{1}{Ms^2} \tag{A5-28}$$ ◀

再举如下一例。

例 A5.7 设系统用如下微分方程来模拟：

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+2x(t)=2f(t)$$

式中：$f(t)$是激励(输入)函数；$x(t)$是响应(输出)函数

对其进行拉普拉斯变换，得：

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+3[sX(s)-x(0)]+2X(s)=2F(s)$$

将其写成响应$X(s)$的函数：

$$X(s)=\frac{2F(s)+(s+3)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+3s+2}$$

忽略初始条件，得传递函数为：

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{2}{s^2+3s+2}$$

设系统输入为单位阶跃函数，其拉普拉斯变换为$F(s)=1/s$，则0初始条件下的系统响应为：

$$X(s)=G(s)F(s)=\left[\frac{2}{s^2+3s+2}\right]\left[\frac{1}{s}\right]$$

或将其用部分分式法展开为：

$$X(s)=\frac{2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

上式的拉普拉斯反变换结果为：

$$x(t)=1-2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t},\quad t\geqslant 0$$

历经较长时间后，$x(t)$将趋近1。通过终值定理给出的结果依然如此：

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}(sX(s))=\lim_{s\to 0}\frac{2}{s^2+3s+2}=1$$ ◀

可以将上例的响应$X(s)$表示成：

$$X(s)=G(s)F(s)+\frac{(s+3)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+3s+2}=X_{\mathrm{f}}(s)+X_{\mathrm{ic}}(s) \tag{A5-29}$$

这种响应结果的表示具有一般性，其中，$X_{\mathrm{f}}(s)$为强制响应，也称为零状态响应；$X_{\mathrm{ic}}(s)$为初始条件响应，也称为零输入响应；总响应为上述两响应之和。强制函数项与初始条件无关，初始条件项与强制函数无关。这时的线性方程组所呈现出来的特性，称为叠加性。

在从事线性反馈控制系统的研究工作中，传递函数的概念是最最重要的。综前所述，设系统的输入为$r(t)$、输出为$c(t)$，输出与输入间的关系由如下微分方程给出：

$$\frac{\mathrm{d}^nc}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}c}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}+a_0c$$

$$= b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r \tag{A5-30}$$

若在忽略所有初始条件的前提下，对式(A5-30)进行拉普拉斯变换，得到：

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)C(s)$$
$$= (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)R(s) \tag{A5-31}$$

就是说，在忽略所有初始条件的前提下，我们可以将 $C(s)/R(s)$ 作为 s 的有理函数进行求解：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{A5-32}$$

可以看出，式(A5-32)的分母多项式是式(A5-31)中 $C(s)$ 的系数，读者会记起，在研究求解微分方程分类方法中，令该多项式等于 0，便是微分方程式(A5-30)的特征方程。

在已触及到的物理系统中，由于大多采用微分方程来描述，因此，我们会经常提及系统的特征方程，或说成用来描述系统的微分方程的特征方程。式(A5-30)中的系数a_i 是该微分方程所描述的物理系统的参数，如质量、摩擦因数、弹簧刚度常数、电感和电阻。由此可见，特征方程的确刻画了系统的特性，方程的根又仅取决于系统的参数，系统的响应取决于这些根，而与系统的输入 $r(t)$的形式无关。因此，其解是微分方程的通解。

参考文献

[1] G. Doetsch, *Guide to the Applications of the Laplace and z-Transforms*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1971.

[2] J. D. Irwin, *Basic Engineering Circuit Analysis*, 3d ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1990.

[3] W. Kaplan, *Operational Methods for Linear Systems*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.

[4] R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, 2d ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972.

习题

A5-1 用式(A5-1)给出的拉普拉斯变换的定积分公式推导如下函数的拉普拉斯变换。

(1) $f(t)=u(t-2.5)$；(2) $f(t)=e^{-4t}$；(3) $f(t)=t$.

A5-2 (1) 用拉普拉斯变换表，求解如下函数的拉普拉斯变换；

(2) 对(1)问求得的结果 $F(s)$进行拉普拉斯反变换，以证明(1)问结果的正确性。

(i) $f(t)=3te^{-t}$，　(ii) $f(t)=-5\cos t$

(iii) $f(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$，　(iV) $f(t)=7e^{-0.5t}\cos(3t)$

(V) $f(t)=5\cos(4t+30°)$，　(vi) $f(t)=6e^{-2t}\sin(t-45°)$

A5-3 (1) 求解如下函数的拉普拉斯反变换 $f(t)$；

(2) 用拉普拉斯变换表，对(1)问求得的结果 $f(t)$进行拉普拉斯反变换，以证明(1)问结果的正确性。

(i) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，　(ii) $F(s)=\dfrac{3}{(s+1)(s+2)}$

(iii) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^2+s-2}$，　(iv) $F(s)=\dfrac{10s}{s^2+5s+4}$

A5-4 (1) 求解如下函数的拉普拉斯反变换 $f(t)$；

(2) 用拉普拉斯变换表，对(1)问求得的结果 $f(t)$进行拉普拉斯反变换，以证明(1)问结果的正确性。

(i) $F(s)=\dfrac{5}{s(s+1)(s+2)}$，　(ii) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

(iii) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^2+2s+5}$，　(iV) $F(s)=\dfrac{s-30}{s(s^2+4s+29)}$

A5-5 已知拉普拉斯变换为：

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+13}$$

(1) 将其拉普拉斯反变换表示成 2 个复指数函数的和；

(2) 利用欧拉公式，将(1)问的结果整理成 $f(t)=B\mathrm{e}^{-at}\sin(bt+\phi)$ 的形式；

(3) 将拉式反变换表示成 $f(t)=B\mathrm{e}^{-at}\cos(bt+\theta)$；

(4) 对(3)问得到的 $f(t)$ 进行拉普拉斯变换，以证明所得结果的正确性。

A5-6 (1) 已知拉普拉斯变换如下所示，绘制其 $f(t)$ 的曲线：

$$F(s)=\frac{\mathrm{e}^{-11s}-\mathrm{e}^{-12s}}{s}$$

(2) (1)问的时间函数是一个矩形脉冲。求图 PA5-6 所示三角形脉冲的拉普拉斯变换。

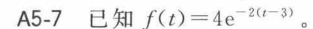


图 PA5-6　三角形脉冲

A5-7 已知 $f(t)=4\mathrm{e}^{-2(t-3)}$。

(1) 先对 $f(t)$ 求导、再用拉普拉斯变换表求 $\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]$；

(2) 先求 $F(s)$、再利用微分性质求 $\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]$；

(3)对函数 $f(t)=4\mathrm{e}^{-2(t-3)}u(t-3)$ 重复(1)问和(2)问。

A5-8 设函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换如下：

$$F(s)=\frac{3s+4}{s^2+3s+2}$$

(1) 在不解出 $f(t)$ 的前提下，求 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$㊀；

(2) 在不解出 $f(t)$ 的前提下，求 $\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$；

(3) 先求解 $f(t)$，再执行所需运算，以证明(1)问和(2)问所得结果。

A5-9 对于题 A5-4 所给函数：

(1) 请问，哪个函数的拉普拉斯反变换没有终值，即对哪个拉普拉斯反变换，$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ 不存在；

(2) 对于存在终值的那些函数，求其终值；

(3) 对于(2)问涉及的函数，求其拉普拉斯反变换，证明所得结果。

A5-10 已知 $f_1(t)=u(t)$，$f_2(t)=\sin(10t)$。

(1) 求 $\mathscr{L}[f_1(t)]\mathscr{L}[f_2(t)]$；

(2) 求 $\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)]$；

(3) $\mathscr{L}[f_1(t)]\mathscr{L}[f_2(t)]$ 是否等于 $\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)]$？

(4) 用表 A5-1 中的卷积求(1)问所得结果的拉普拉斯反变换；

(5) 通过直接求解 $\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]$，证明(4)问的结果。

A5-11 已知微分方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+4x(t)=10u(t)$$

(1) 设初值为 0，求 $x(t)$。证明由此解得到的初始条件是正确的，即用解出的 $x(t)$ 求出 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$；

(2) 将所求 $x(t)$ 直接代入微分方程，证明(1)问所得结果满足该微分方程；

(3) 设 $x(0)=1$、$\dot{x}(0)=1$，求 $x(t)$，证明由此解得到的初始条件是正确的，即用解出的 $x(t)$ 求出 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$；

(4) 将所求 $x(t)$ 直接代入微分方程，证明(3)问所得结果满足该微分方程；

(5) 用计算机程序对各部分分式展开式进行验证。

A5-12 已知微分方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)=5,\quad t\geqslant 0$$

(1) 设初值为 0，求 $x(t)$，证明由此解得到的初始条件是正确的，即用解出的 $x(t)$ 求出 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$；

(2) 将所求 $x(t)$ 直接代入微分方程，证明(1)问所得结果满足该微分方程；

(3) 设 $x(0)=1$、$\dot{x}(0)=1$，求 $x(t)$，证明由此解得到的初始条件是正确的，即用解出的 $x(t)$ 求出 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$；

㊀ 书中原为 $\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}t}$，疑有误。——译者注

(4) 将所求 $x(t)$ 直接代入微分方程，证明(3)问所得结果满足该微分方程；

(5) 用计算机程序对各部分分式展开式进行验证。

A5-13 已知用于描述系统的微分方程，求该系统的传递函数 $C(s)/R(s)$。其中，$\dot{c}(t)$表示对 $c(t)$求关于 t 的一阶导数，$\ddot{c}(t)$表示对 $c(t)$求关于 t 的二阶导数，等等。

(1) $\dot{c}(t)+2c(t)=r(t)$

(2) $\ddot{c}(t)+2\dot{c}(t)=r(t-t_0)u(t-t_0)+3\dot{r}(t)$

(3) $\dddot{c}(t)+3\ddot{c}(t)+2\dot{c}(t)+c(t)=\dot{r}(t)+3\dot{r}(t)$

A5-14 已知系统的传递函数 $C(s)/R(s)$，求该系统的微分方程。

(1) $G(s)=\dfrac{60}{s^2+10s+60}$，　(2) $G(s)=\dfrac{3s+20}{s^3+4s^2+8s+20}$

(3) $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$，　(4) $G(s)=\dfrac{7e^{-0.2s}}{s^2+6s+32}$

A5-15 (1) 写出题 A5-11 的特征方程；

(2) 写出题 A5-12 的特征方程；

(3) 写出题 A5-13 的特征方程；

(4) 写出题 A5-14 的特征方程。

A5-16 方程式(A5-4)和方程式(A5-5)说明拉普拉斯变换具有线性性质，此练习题是要说明这些线性性质不能用于非线性的行为体。

(1) 已知 $f_1(t)=e^{-t}$，求 $F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)]$和$\mathscr{L}[f_1^2(t)]$；

(2) 通过(1)问的结果回答问题：$\mathscr{L}[f_1^2(t)]=F_1^2(s)$吗？就是说，时间函数平方的拉普拉斯变换等于拉普拉斯变换的平方吗？

(3) 已知 $f_1(t)=e^{-t}$，$f_2(t)=e^{-2t}$，求 $F_1(s)$、$F_2(s)$及$\mathscr{L}[f_1(t)/f_2(t)]$；

(4) 通过(3)问的结果回答问题：$\mathscr{L}[f_1(t)/f_2(t)]=F_1(s)/F_2(s)$吗？就是说，时间函数商的拉普拉斯变换等于两个时间函数拉普拉斯变换的商吗？

A5-17 (1) 设描述某系统的微分方程由习题 A5-11 给出，写出该系统的自由响应项；

(1) 设描述某系统的微分方程由习题 A5-12 给出，写出该系统的自由响应项；

(2) 设描述某系统的传递函数由习题 A5-14 的(4)问给出，写出该系统的自由响应项。

附录 VI
z 变换表

表 A6-1 z 变换表

拉普拉斯变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$	改进(因子展开形式)的 z 变换
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1}+\frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2\,(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
$\frac{(k+1)!}{s^k}$	t^{k-1}	$\lim\limits_{a\to 0}\left((-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}\right]\right)$	$\lim\limits_{a\to 0}\left((-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-amT}}{z-\mathrm{e}^{-aT}}\right]\right)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$	$\frac{\mathrm{e}^{-amT}}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{Tz\mathrm{e}^{-aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}$	$\frac{T\mathrm{e}^{-amT}[\mathrm{e}^{-aT}+m(z-\mathrm{e}^{-aT})]}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}$
$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$	$t^k\mathrm{e}^{-at}$	$(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}\right]$	$(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\frac{\mathrm{e}^{-amT}}{z-\mathrm{e}^{-aT}}\right]$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{z(1-\mathrm{e}^{-aT})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT})}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{\mathrm{e}^{-amT}}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t-\frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{a}$	$\frac{z[(aT-1+\mathrm{e}^{-aT})z+(1+\mathrm{e}^{-aT}-aT\mathrm{e}^{-aT})]}{a\,(z-1)^2(z-\mathrm{e}^{-aT})}$	$\frac{T}{(z-1)^2}+\frac{amT-1}{a(z-1)}+\frac{\mathrm{e}^{-amT}}{a(z-\mathrm{e}^{-aT})}$
$\frac{a^2}{s\,(s+a)^2}$	$1-(1+at)\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-at}}-\frac{aT\mathrm{e}^{-aT}z}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}$	$\frac{z}{z-1}-\left[\frac{1+amT}{z-\mathrm{e}^{-aT}}+\frac{aT\mathrm{e}^{-aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}\right]\mathrm{e}^{-amT}$

（续）

拉普拉斯变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$	改进（因子展开形式）的 z 变换
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$	$\frac{z\sin(aT)}{z^2-2z\cos(aT)+1}$	$\frac{z\sin(amT)+\sin(1-m)aT}{z^2+2z\cos(aT)+1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{z(z-\cos(aT))}{z^2-2z\cos(aT)+1}$	$\frac{z\sin(amT)-\cos(1-m)aT}{z^2-2z\cos(aT)+1}$
$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{-at}\sin(bt)$	$\frac{1}{b}\left[\frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}\right]$	$\frac{1}{b}\left[\frac{e^{-amT}[z\sin(bmT)+e^{-aT}\sin((1-m)bT)]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}\right]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-amT}[z\cos(bmT)+e^{-aT}\sin((1-m)bT)]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
$\frac{a+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-at}(\cos(bt)+\frac{a}{b}\sin(bt))$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT})}$ $A=1-e^{-aT}(\frac{a}{b}\cos(bT)+\frac{a}{b}\sin(bT))$ $B=e^{-2aT}+e^{-aT}\left(\frac{a}{b}\sin(bT)-\cos(bT)\right)$	$\frac{1}{z-1}$ $-\frac{e^{-amT}[z\cos(bmT)+e^{-aT}\sin((1-m)bT)]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$ $\frac{+\frac{a}{b}\{e^{-amT}[z\sin(bmT)+e^{-aT}\sin((1-m)bT)]\}}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}+\frac{e^{-at}}{a(a-b)}+\frac{e^{-at}}{b(b-a)}$	$\frac{(Az+B)z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})(z-1)}$ $A=\frac{b(1-e^{-aT})-a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)}$ $B=\frac{ae^{-aT}(1-e^{-aT})-be^{-bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$	

本书就数字控制系统的分析和设计问题进行全面系统的介绍，在对z变换等必要的数学问题做出适当铺垫和对采样-数据保持等特殊问题进行适当讲解之后，阐述数字控制系统的分析和数字控制系统的设计，最后给出了5个案例的设计例程：卫星控制、天线跟踪、瞄准系统、机器人控制系统和温度控制系统。

本书适合于本科高年级或研究生一年级的数字控制系统课程选用，也可作为控制工程师的自学读本。

本书特色

- 兼顾数字控制系统和模拟控制系统的关系。
- 注重从经典方法到现代方法的自然过渡。
- 强调计算机辅助分析及计算机辅助设计技术的讲解。
- 示例丰富且具有连贯性、习题配置充分。





www.pearson.com

投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计·锡彬



上架指导：数字控制系统

ISBN 978-7-111-57356-2



定价：79.00元